МАТЕМАТИКА

УДК 512.579

ПОЛИГОНЫ И ЧАСТИЧНЫЕ ПОЛИГОНЫ НАД ПОЛУРЕШЕТКАМИ

Т. В. Апраксина, М. Ю. Максимовский

Московский государственный институт электронной техники (ТУ),
кафедра высшей математики 1
E-mail: taya.apraksina@gmail.com, maksimovskiy@gmail.com

Рассматриваются полигоны и частичные полигоны над полурешетками. Получено необходимое и достаточное условие того, что данное упорядоченное множество X является полигоном над полурешеткой. Изучены свойства частичных полигонов над полурешетками и получено достаточное условие продолжаемости частичного полигона X над полурешеткой S до полного полигона.

Ключевые слова: полигон, частичный полигон, полурешетка.

Acts and Partial Acts over Semilattices

T. V. Apraksina, M. Yu. Maksimovskiy

Moscow Institute of Electronic Technology,
Chair of Higher Mathematics 1
E-mail: taya.apraksina@gmail.com, maksimovskiy@gmail.com

We consider the acts and the partial acts over semilattices. We obtain a necessary and sufficient condition to be a partially ordered set X an act over a semilattice. The properties of partial acts are investigated and a sufficient condition is found for the expansion of partial act X over a semilattice S to a full S-act.

Key words: act, partially act, semilattice.

НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

Полигоном над полугруппой S (см. [1]) называется множество X вместе с отображением $X \times S \to X$, $(x, s) \mapsto xs$, причем $x(st) = (xs)t$ при всех $x \in X$, $s, t \in S$. *Частичный полигон* — это множество X, для которого задано частичное отображение $X \times S \to X$, причем для любых $x \in X$, $s, t \in S$ произведения $x(st)$ и $(xs)t$ существуют или не существуют одновременно и $x(st) = (xs)t$ в случае, если оба этих выражения существуют. Частичный полигон является частичной универсальной алгеброй (см. монографию [2]). Полигон над полугруппой является алгебраической моделью автомата (см. [3]); здесь элементы множества X — состояния, а S — входные сигналы. Частичный полигон можно интерпретировать как автомат, удовлетворяющий условию: если произведение xs не определено, то автомат, находясь в состоянии x и получив на вход сигнал s, прекращает работу.

В ряде работ исследовались полигоны над полугруппами, имеющими несложное строение. Так, в статье [4] были полностью описаны в теоретико-множественных и теоретико-групповых терминах все полигоны над вполне простыми и вполне 0-простыми полугруппами. В [5, 6] были изучены полигоны над полурешетками (коммутативными полугруппами идемпотентов) и важным частным случаем полурешеток — цепями. Цель данной работы — продолжить исследования полигонов над полурешетками и цепями и распространить их на частичные полигоны.

Полурешеткой мы, как обычно, называем частично упорядоченное множество (в дальнейшем — просто упорядоченное множество), в котором любое двухэлементное подмножество имеет точную нижнюю грань. Известно (см. [7]), что полурешетку можно рассматривать как коммутативную полугруппу идемпотентов, в которой операция определяется по формуле $a \cdot b = \inf\{a, b\}$ и, наоборот, коммутативная полугруппа идемпотентов является полурешеткой, если порядок определить по формуле $a \le b \Leftrightarrow ab = a$.

При рассмотрении полигонов X над полугруппой S удобно считать, что к полугруппе S добавлена единица 1 (даже если S уже имела единицу) и $x \cdot 1 = x$ при всех $x \in X$. Положим $S^1 = S \cup \{1\}$.

Для упорядоченного множества X и элемента $x \in X$ нижний конус x^∇ определяется следующим образом: $x^\nabla = \{y \in X | y \le x\}$. Упорядоченное множество X называется *связным*, если для любых $x, y \in X$ существует последовательность элементов $x_0, x_1, \ldots, x_n \in X$ такая, что $x_0 = x$, $x_n = y$ и $(x_{i+1} \le x_i)$ либо $(x_i \le x_{i+1})$ при $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Нетрудно проверить, что всякое упорядоченное множество является объединением попарно не пересекающихся связных подмножеств (*компонент связности*).

В работе [5] было доказано, что полигон X над полурешеткой S является частично упорядоченным множеством относительно порядка

$$x \le y \quad \Longleftrightarrow \quad x \in yS^1. \tag{1}$$

Естественно возникают две задачи:

(А) для данной полурешетки S описать полигоны над S;

(Б) найти условия, при которых данное упорядоченное множество X является полигоном над некоторой полурешеткой.

Задача (А) была решена в [5] для случая, когда S — конечная цепь. Что касается задачи (Б), то в [5] были найдены необходимые условия на упорядоченное множество X, чтобы оно могло быть полигоном над какой-либо полурешеткой. А именно имеет место

Предложение 1 [5, предл. 2 и 3]. *Если X — полигон над полурешеткой, то:*

(a) для любого $x \in X$ нижний конус x^∇ является полурешеткой;

(b) для любых $x, y \in X$, если x и y лежат в одной компоненте связности, то существует такое z, что $z \le x, y$.

Нетрудно показать, что из (a) следует (b) для любого упорядоченного множества X. Однако условие (a) (а начит, и (b)) не является достаточным для того, чтобы упорядоченное множество X было полигоном над некоторой полурешеткой. Необходимое и достаточное условие этого будет приведено нами ниже.

Обозначим через $T(X)$ полугруппу всех преобразований множества X, т. е. отображений $\alpha : X \to X$, умножающихся по правилу $x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta$ при $x \in X$, $\alpha, \beta \in T(X)$. Пусть X — упорядоченное множество. Обозначим через $\Phi(X)$ множество отображений $\varphi : X \to X$, удовлетворяющих условиям:

(I) $\forall\, x, y \in X \ x \le y \ \Rightarrow \ x\varphi \le y\varphi$ (т. е. φ *изотонно*);

(II) $\forall\, x \in X \ \ x\varphi \le x$ (φ — уменьшающее);

(III) $\varphi^2 = \varphi$ (φ — идемпотентное);

(IV) $\forall\, x, y \in X \ (x = x\varphi \,\&\, y \le x \ \Rightarrow \ y = y\varphi)$.

Заметим, что условия (I)–(III) означают, что φ является оператором замыкания на двойственном упорядоченном множестве $X^* = (X, \ge)$, а условие (IV) — тот факт, что множество замкнутых элементов стабильно относительно взятия в X^* мажоранты.

Лемма 2. *$\varphi\psi = \psi\varphi$ для любых $\varphi, \psi \in \Phi(X)$.*

Доказательство. Пусть $x \in X$ и $\varphi, \psi \in \Phi(X)$. Из условия 2 следует, что $x\varphi\psi \le x\varphi$. Так как $(x\varphi)\varphi = x\varphi$ (ввиду (III)), то из (IV) мы получаем, что $x\varphi\psi\varphi = x\varphi\psi$. Отсюда, учитывая (I) и (II), получим: $x\varphi\psi = x\varphi\psi\varphi \le x\psi\varphi$. Таким образом, $x\varphi\psi \le x\psi\varphi$. Аналогично получается, что $x\psi\varphi \le x\varphi\psi$. Следовательно, $x\psi\varphi = x\varphi\psi$. Ввиду произвольности элемента $x \in X$ получаем, что $\varphi\psi = \psi\varphi$. □

Следствие 3. *Для любого частично упорядоченного множества X множество $\Phi(X)$ является коммутативной полугруппой идемпотентов.*

Доказательство. Используя лемму 2, можно показать, что $\varphi\psi \in \Phi(X)$ для любых $\varphi, \psi \in \Phi(X)$. □

Очевидно, полугруппа $\Phi(X)$ является подполугруппой полугруппы $T(X)$. Пусть X — полигон над полугруппой S. Будем говорить, что S действует на X *эффективно*, если

$$\forall\ s,t \in S\ (s \neq t\ \Rightarrow\ \exists\ x \in X\ (xs \neq xt)).$$

Теорема 4. *Пусть X — упорядоченное множество. Тогда X является полигоном над некоторой полурешеткой в том и только том случае, если*

$$\forall\ x,y \in X\ (x \leq y\ \Rightarrow\ \exists\ \varphi \in \Phi(X)\ (x = y\varphi)). \tag{2}$$

Доказательство. Пусть X — полигон над полурешеткой S. Возьмем элементы $x, y \in X$ такие, что $x \leq y$. По определению порядка в X мы имеем: $x = ys$ при некотором $s \in S$. Несложно проверить, что отображение $\varphi_s : X \to X$, $x \mapsto xs$ удовлетворяет условиям (I)–(IV), поэтому $\varphi_s \in \Phi(X)$. Так как $x = y\varphi_s$, то выполняется условие теоремы 4.

Докажем теперь обратное утверждение. Пусть для упорядоченного множества X выполнено условие (2). По следствию 3 $\Phi(X)$ — полурешетка. Обозначим через 1_X тождественное отображение $x \mapsto x$ при всех $x \in X$. Очевидно, 1_X удовлетворяет условиям (I)–(IV), поэтому $1_X \in \Phi(X)$. Так как $\Phi(X)$ — подполугруппа полугруппы $T(X)$, то множество X является полигоном над полурешеткой $\Phi(X)$. Осталось проверить, что первоначальный частичный порядок на X совпадает с порядком, определенным по формуле (1). Действительно, если $x \leq y$, то, ввиду условия (2), $x = y\varphi$ при некотором $\varphi \in \Phi(X)$. Наоборот, если $x \in y\Phi(X)$, то, ввиду условия (2), $x = y\varphi$ при некотором $\varphi \in \Phi(X)$, а значит, $x = y\varphi \leq y$. □

Замечание. Из доказательства теоремы видно, что если упорядоченное множество X является полигоном над какой-нибудь полурешеткой, то оно является полигоном над полурешеткой $\Phi(X)$. Таким образом, $\Phi(X)$ в этом случае является максимальной полурешеткой, действующей эффективно на X. (Здесь максимальность понимается по включению, так как все полурешетки, эффективно действующие на X, можно считать подмножествами множества $T(X)$).

Рассмотрим теперь случай, когда упорядоченное множество X само является полурешеткой. Для каждого $a \in X$ обозначим через φ_a отображение $X \to X$, определенное правилом $x\varphi_a = \inf\{x, a\}$ $(x \in X)$.

Теорема 5. *Если X — полурешетка, то отображение $f : X \to \Phi(X)$, $af = \varphi_a$, является вложением полурешеток.*

Доказательство. Легко проверяется, что отображение f является гомоморфизмом полурешеток X и $\Phi(X)$. Кроме того, очевидно, что если $a \neq b$ при $a, b \in X$, то $\varphi_a \neq \varphi_b$, так как $\Phi(X)$ действует эффективно на X. □

Назовем полурешетку X *направленной*, если для любых $x, y \in X$ найдется элемент $z \in X$ такой, что $z \geq x, y$. В частности, направленными полурешетками являются всякая решетка и всякая цепь. Нетрудно привести пример, показывающий, что не всякая направленная полурешетка является решеткой.

Будем говорить, что упорядоченное множество удовлетворяет *условию максимальности*, если любое непустое его подмножество имеет максимальный элемент.

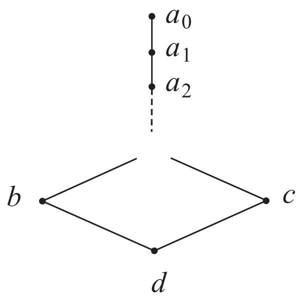
Теорема 6. *Пусть X — направленная полурешетка с условием максимальности. Тогда отображение $f : X \to \Phi(X)$, $af = \varphi_a$, является изоморфизмом полурешеток X и $\Phi(X)$.*

Доказательство. Заметим вначале, что в направленной полурешетке с условием максимальности всегда существует наибольший элемент. Обозначим его через u. Покажем, что для любого $\varphi \in \Phi(X)$ имеет место равенство $x\varphi = xa$ для некоторого $a \in X$. Если $\varphi = 1_X$, то $\varphi = \varphi_u$. Пусть $\varphi \neq 1_X$. Тогда найдется элемент $y \in X$ такой, что $y\varphi \neq y$. Имеем: $y\varphi \leq y$, $(y\varphi)\varphi = y\varphi$. Ввиду условия максимальности существует максимальный элемент $a \in X$ такой, что $a\varphi = a$. Покажем, что $x\varphi = xa$ для всех $x \in X$. Возможны три случая.

(a) $y > a$. Тогда $y\varphi \geq a\varphi = a$. Но элемент $y\varphi$ неподвижный (т. е. $y\varphi\varphi = y\varphi$), значит, $y\varphi \leq a$ (ввиду максимальности элемента a). Таким образом, $y\varphi = a = \inf\{y, a\} = y \cdot a$.

(b) $y \leq a$. Тогда $y\varphi = y = y \cdot a$.

(c) y и a не сравнимы. Так как X — направленная полурешетка, то найдется элемент $z \in X$ такой, что $z > a, y$. Имеем: $z > a$, $a\varphi = a$. Отсюда $z\varphi \geq a\varphi = a$. Так как элемент $z\varphi$ неподвижный и $z\varphi \geq a$, то $z\varphi = a$ ввиду максимальности элемента a. Далее, так как $y < z$, то $y\varphi \le z\varphi = a$. Таким образом, $y\varphi \le y, a$. Осталось показать, что $y\varphi = \inf\{y, a\}$. Предположим, что $c \in X$ — такой элемент, что $c \le a$ и $c \le y$. Покажем, что $c \le y\varphi$. Так как $c \le a, b$, то $c\varphi = c$. $c\varphi \le y\varphi$, значит, $c \le y\varphi$. □



Направленная полурешетка, не являющаяся решеткой

Сделаем несколько замечаний относительно направленных полурешеток. Очевидно, что если X — полная направленная полурешетка с условием максимальности, то X — решетка. В частности, конечная направленная полурешетка является решеткой. Для бесконечных полурешеток это неверно: полурешетка, изображенная на рисунке является направленной и удовлетворяет условию максимальности, но решеткой не является, так как не существует $\sup\{b, c\}$.

Если отказаться от требования направленности, то теорема 6 перестает быть верной. Например, для полурешетки $X = \{1, 2, 3\}$, $3 \le 1$, $3 \le 2$ мы имеем:

$$\Phi(X) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \right\},$$

поэтому X и $\Phi(X)$ не изоморфны.

Перейдем теперь к частичным полигонам.

Предложение 7. *Пусть X — частичный полигон над полурешеткой S. Положим*

$$x \le y \ \Leftrightarrow x = y \ \text{ или } \ x = ys \ \text{ при некотором } \ s \in S. \tag{3}$$

Тогда $(X, \le)$ — упорядоченное множество.

Доказательство. Рефлексивность отношения $\le$ очевидна. Пусть $x \le y$ и $y \le z$. Тогда $x = yt$, $y = zs$ при некоторых $s, t \in S^1$. Отсюда получаем: $x = (zs)t$. Следовательно, существует произведение $z(st)$ и $x = z(st)$. Это означает, что $x \le z$. Наконец, пусть $x \le y$ и $y \le x$. Тогда $x = ys$, $y = xt$ при некоторых $s, t \in S^1$. Отсюда получаем: $x = ys = (xt)s = x(ts) = x(t^2s) = x(tst) = ((xt)s)t = (ys)t = = xt = y$. □

Предложение 8. *Пусть X — частичный полигон над полурешеткой S. Тогда:*

(I) *если $x \in X$, $s, t \in S$ таковы, что $s \le t$ и существует xs, то существует и xt;*

(II) *если существует xs и $y \ge x$, то существует и ys;*

(III) *если $xs = x$ и $y \le x$, то $ys = y$;*

(IV) *если $x \le y$ и существуют xs и ys, то $xs = ys$.*

Доказательство. (I) Имеем: $st = ts = s$. Так как существует xs, то $xs = x(ts) = (xt)s$, поэтому существует xt.

(II) Так как $y \ge x$, то $x = yt$ при некотором $t \in S^1$. Имеем: $xs = (yt)s = y(ts) = y(st) = (ys)t$, поэтому существует ys.

(III) Пусть $xs = x$ и $y \le x$. Тогда $y = xt$ при некотором $t \in S^1$. Имеем: $y = xt = (xs)t = x(st) = = x(ts) = (xt)s = ys$.

(IV) Имеем: $x = yt$ при некотором $t \in S^1$. Следовательно, $xs = (yt)s = y(ts) = y(st) = (ys)t$, поэтому $xs \le ys$. □

В теории частичных алгебраических операций важное место занимает вопрос о продолжении частичной операции до полной. Пусть X — частичный полигон над полугруппой S. Мы будем говорить, что этот частичный полигон продолжается до полного, если частичное отображение $X \times S \to X$ продолжается до обычного отображения $X \times S \to X$ и выполняется аксиома полигона $(xs)t = x(st)$.

Предложение 9. *Пусть X — частичный полигон над полурешеткой S. Будем рассматривать X как упорядоченное множество относительно порядка (3). Если для каждого $x \in X$ нижний конус x^∇ является полурешеткой, то для любых $x, y \in X$, лежащих в одной компоненте связности, и любого $s \in S$ произведение xs определено тогда и только тогда, когда ys определено.*

Доказательство. Пусть существует xs. Так как xs и y лежат в одной компоненте связности, то по предложению 1 существует $z \le xs, y$. Так как xs существует и $z \le xs$, то по пункту (III) предложения 8 существует zs и $zs = z$. Наконец, так как zs существует и $y \geq z$, то по пункту (II) предложения 8 существует и ys. $\square$

Таким образом, для каждого $s \in S$ и компоненты связности X_α либо xs определено для всех $x \in X_\alpha$, либо xs не определено ни для одного $x \in X_\alpha$.

Предложение 10. *Пусть X — связный частичный полигон над полурешеткой S. Обозначим через S_0 множество таких $s \in S$, для которых xs определено для какого-нибудь $x \in X$ (а значит, по предыдущему утверждению — для всех $x \in X$). Тогда выполняются условия:*

(I) S_0 — *подполурешетка полурешетки S;*

(II) $\forall\ s, t \in S\ (s \in S_0 \& t \geq s) \ \Rightarrow\ t \in S_0$;

(III) $S' = S \backslash S_0$ — *идеал полугруппы S.*

Доказательство. (I) Пусть $s, t \in S_0$. Покажем, что $st \in S_0$. Обозначим $xs = y$. Так как X — связный полигон, то из существования произведения xt следует существование произведения yt. Таким образом, $st \in S_0$.

(II) Следует непосредственно из пункта (II) предложения 8.

(III) Понятно,что S' — подполугруппа полугруппы S. Пусть $s_1 \in S'$, $s_2 \in S$. Покажем, что $s_1 s_2 \in S'$. Действительно, $x(s_1 s_2) = (xs_1)s_2$, однако произведение xs_1 не определено. Следовательно, ввиду произвольности выбора $s_1 \in S'$, $s_2 \in S$ $S'S \subseteq S$. Аналогично можно показать,что $SS' \subseteq S$. $\square$

Теорема 11. *Пусть X — упорядоченное множество, являющееся частичным полигоном над полурешеткой S. Если каждая компонента связности имеет наименьший элемент, то частичный полигон X продолжается до полного полигона.*

Доказательство. Пусть $X = \cup X_\alpha$ — разбиение множества X на компоненты связности, причем в каждой компоненте X_α есть наименьший элемент. Для $x \in X_\alpha$, $s \in S$ положим

$$xs = \begin{cases} x \cdot s, \text{если } xs \text{ существует,} \\ \min(X_\alpha), \text{если } xs \text{ не существует.} \end{cases}$$

Покажем, что $(x \cdot s) \cdot t = x \cdot (st)$ для всех $x \in X_\alpha$, $s, t \in S$. Пусть $x \in X_\alpha$ и $u = \min X_\alpha$. Из определения ясно, что $u \cdot s = u$ при всех $s \in S$. Проверка равенства $(x \cdot s) \cdot t = x \cdot (st)$ разбивается на три случая.

a) $(xs)t$ существует. Тогда $x(st)$ тоже существует, и мы имеем:

$$(x \cdot s) \cdot t = (xs) \cdot t = (xs)t = x(st) = x \cdot (st).$$

b) xs существует, а $(xs)t$ не существует. Тогда $x(st)$ не существует, и мы имеем:

$$(x \cdot s) \cdot t = xs \cdot t = u, \quad x \cdot (st) = u.$$

c) xs не существует. Тогда $(xs)t$ тоже не существует. Поэтому $x \cdot (st)$ не существует. Мы имеем:

$$(x \cdot s) \cdot t = u \cdot t = u, \quad x \cdot (st) = u. \qquad \square$$

Библиографический список

1. *Kilp M., Knauer U., Mikhalev A. V.* Monoids, Acts and Categories. Berlin : Walter deGruyter, 2000. 529 p.
2. *Ляпин Е. С., Евсеев А. Е.* Частичные алгебраические действия. СПб. : Образование, 1991. 163 с.
3. *Плоткин Б. И., Гринглаз Л. Я., Гварамия А. А.* Элементы алгебраической теории автоматов. М. : Высш. шк., 1994. 192 с.
4. *Avdeev A. Yu., Kozhuhov I. B.* Acts over completely 0-simple semigroups // Acta cybernetica. 2000. № 24. P. 523–531.
5. *Максимовский М. Ю.* О полигонах над полурешетками // Фунд. и прикл. мат. 2008. Т. 14, № 7. С. 151–156.
6. *Кожухов И. Б., Максимовский М. Ю.* Об автоматах над полурешетками // Системный анализ и информационно-управляющие системы : сб. науч. тр. / под ред. проф. В. А. Бархоткина. М. : МИЭТ, 2006. С. 19–34.
7. *Клиффорд А., Престон Г.* Алгебраическая теория полугрупп : в 2 т. Т. 1. М. : Мир, 1972. 283 с.