



УДК 539.3

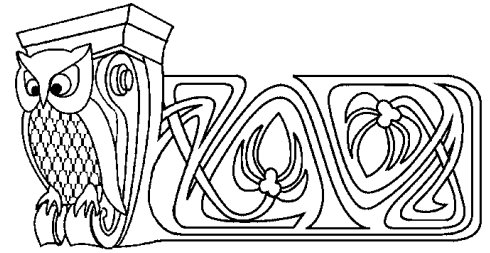
АНАЛИЗ АЛГОРИТМОВ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ТОНКОСТЕННЫХ ОБОЛОЧЕК

В. В. Карпов

Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет,
кафедра прикладной математики и информатики
E-mail: karpov.v.v@lan.spbgasu.ru

Рассматриваются три варианта алгоритмов исследования устойчивости тонкостенных оболочек: алгоритм, основанный на методе Ритца и итерационных процессах; алгоритм, основанный на методе наискорейшего спуска; алгоритм, основанный на методе продолжения решения по параметру. Дается анализ результатов исследования устойчивости оболочек, полученных с использованием этих алгоритмов.

Ключевые слова: алгоритмы устойчивости оболочек, алгоритм метода Ритца, алгоритм метода наискорейшего спуска, алгоритм метода продолжения по параметру.



Analysis of Algorithms Study of Stability of Thin-Walled Shells

V. V. Karpov

Saint-Petersburg State University of Architecture
and Civil Engineering,
Chair of Applied Mathematics and Informatics
E-mail: vvkarpov@lan.spbgasu.ru

We consider three variants of algorithms for studying the stability of thin-shell: An algorithm based on the Ritz method and iterative processes, an algorithm based on the method of steepest descent, the algorithm based on a method of extending the solution to the parameter. Analyzes the results of the study of shells produced using these algorithms.

Key words: algorithms for the stability of shells, the algorithm of the Ritz method, the algorithm is the method of steepest descent algorithm of the continuation parameter.

При исследовании устойчивости тонкостенных оболочек решаются нелинейные задачи. При решении нелинейно-упругих задач и задач ползучести задача исследования устойчивости оболочек существенно усложняется. Дифференциальные уравнения равновесия весьма громоздки, поэтому целесообразнее использовать методы минимизации функционала полной энергии деформации.

Функционал полной энергии деформации подкрепленных оболочек вращения при решении линейно-упругих задач будет иметь вид [1]

$$\begin{aligned} \mathcal{D} = & \frac{E}{2(1-\mu^2)} \int_0^a \int_0^b \left\{ (h + \bar{F})(\varepsilon_x^2 + 2\mu\varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y^2 + \mu_1\gamma_{xy}^2 + \mu_1k(\psi_x - \theta_1)^2 + \mu_1k(\psi_y - \theta_2)^2) + \right. \\ & + 2\bar{S}(\varepsilon_x\chi_1 + \mu\varepsilon_x\chi_2 + \varepsilon_y\chi_2 + \mu\varepsilon_y\chi_1 + 2\mu_1\gamma_{xy}\chi_{12}) + \left. \left(\frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) (\chi_1^2 + 2\mu\chi_1\chi_2 + \chi_2^2 + 4\mu_1\chi_{12}^2) - \right. \\ & \left. - \frac{2(1-\mu^2)}{E} (P_xU + P_yV + qW) \right\} AB \, dx \, dy; \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{A} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} V - k_x W + \frac{1}{2} \theta_1^2, & \varepsilon_y &= \frac{1}{B} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} U - k_y W + \frac{1}{2} \theta_2^2, \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{A} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} U - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} V + \theta_1\theta_2, \\ \theta_1 &= - \left(\frac{1}{A} \frac{\partial W}{\partial x} + k_x U \right), & \theta_2 &= - \left(\frac{1}{B} \frac{\partial W}{\partial y} + k_y V \right), \\ \chi_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} \psi_y, & \chi_2 &= \frac{1}{B} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} \psi_x, \\ 2\chi_{12} &= \frac{1}{A} \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial \psi_x}{\partial y} - \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial A}{\partial y} \psi_x + \frac{\partial B}{\partial x} \psi_y \right), \end{aligned}$$

P_x, P_y, q — компоненты внешней нагрузки вдоль осей x, y, z ; A, B — параметры Ляме; E, μ — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала оболочки.



Высота и расположение ребер задается функцией

$$H(x, y) = \sum_{j=1}^m h^j \bar{\delta}(x - x_j) + \sum_{i=1}^n h^i \bar{\delta}(y - y_i) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m h^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i),$$

где h^i, h^j — высота ребер параллельных осей y и x соответственно, $h^{ij} = \min\{h^i, h^j\}$, $\bar{\delta}(x - x_j)$, $\bar{\delta}(y - y_i)$ — единичные столбчатые функции, равные единице в местах присоединения ребер и равные нулю вне таких мест. Контакт ребра и обшивки происходит по полосе.

Таким образом, толщина всей конструкции равна $h + H$. Если $H > 0$, то оболочка подкреплена ребрами или накладками, а если $H < 0$, то она ослаблена вырезами;

$$\begin{aligned} \bar{F} &= \int_{h/2}^{h/2+H} dz = H, & \bar{S} &= \int_{h/2}^{h/2+H} z dz = \frac{H(h+H)}{2}, \\ \bar{J} &= \int_{h/2}^{h/2+H} z^2 dz = 0.25h^2H + 0.5hH^2 + \frac{1}{3}H^3. \end{aligned}$$

Наиболее простой в реализации алгоритм исследования устойчивости оболочки основан на методе Ритца. При этом получается система нелинейных алгебраических уравнений. Для решения таких систем применяется метод итераций, когда все нелинейные члены переносятся в правую часть.

Искомые функции перемещений $U(x, y)$, $V(x, y)$, $W(x, y)$ и углов поворота нормали $\psi_x(x, y)$, $\psi_y(x, y)$ представляем в виде

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \sum_{I=1}^n U(I)X1(I)Y1(I), & V(x, y) &= \sum_{I=1}^n V(I)X2(I)Y2(I), & W(x, y) &= \sum_{I=1}^n W(I)X3(I)Y3(I), \\ \psi_x(x, y) &= \sum_{I=1}^n PS(I)X4(I)Y4(I), & \psi_y(x, y) &= \sum_{I=1}^n PN(I)X5(I)Y5(I), \end{aligned} \quad (2)$$

где $U(I), V(I), W(I), PS(I), PN(I)$ — неизвестные числовые параметры или функции переменной t при решении задач ползучести; $X1 - X5$ — аппроксимирующие функции переменной x , удовлетворяющие при $x = 0$ и $x = a$ заданным краевым условиям; $Y1 - Y5$ — аппроксимирующие функции переменной y , удовлетворяющие краевым условиям при $y = 0, y = b$.

В соответствии с методом Ритца, подставив (2) в (1), получим систему нелинейных алгебраических уравнений

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial U(I)} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial V(I)} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial W(I)} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial PS(I)} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial PN(I)} = 0,$$

которую кратко можно записать в виде

$$F_{\text{Л}}(X) - cpP = F_{\text{Н}}(X).$$

Здесь $X = (U(I), V(I), W(I), PS(I), PN(I))^T$, $F_{\text{Л}}(X)$ — линейная часть, $F_{\text{Н}}(X)$ — нелинейная часть уравнений; cpP — нагрузочный член.

При последовательном увеличении нагрузки q сначала решается геометрически линейная задача

$$F_{\text{Л}}(X) - cpP = 0,$$

затем методом итерации находится решение геометрически нелинейной задачи

$$F_{\text{Л}}(X_i) - cpP = F_{\text{Н}}(X_{i-1}). \quad (3)$$

Процесс итераций заканчивается, когда прогибы на предыдущей и последующей итерациях практически совпадают. Нагрузка, при которой процесс итераций расходится, принимается за критическую нагрузку.



В качестве примера рассматриваемого алгоритма для исследования устойчивости подкрепленных пологих оболочек рассмотрим три варианта оболочек:

- 1) $\bar{a} = \bar{b} = 600, k_\xi = k_\eta = 953.64;$
 - 2) $\bar{a} = \bar{b} = 600, k_\xi = k_\eta = 476.82;$
 - 3) $\bar{a} = \bar{b} = 600, k_\xi = k_\eta = 238.41.$
- Здесь $\bar{a} = a/h, \bar{b} = b/h, k_\xi = a^2 k_x/h, k_\eta = b^2 k_y/h.$

Прогиб в безразмерном виде и безразмерная нагрузка будут иметь вид $\bar{W} = \frac{W}{h}, \bar{P} = \frac{a^4 q}{Eh^4}.$ Оболочки могут быть подкреплены 18 или 36 ребрами высотой $3h$ и шириной $2h.$

На рис. 1, *a–в* представлены графики «нагрузка \bar{P} – прогиб \bar{W} » в центре оболочки (кривая с индексом 1, кривая с индексом 2 – это прогиб $\bar{W}(0.25, 0.25)$). Кривые с номером 1 соответствуют оболочке без ребер, 2 – оболочке, подкрепленной 18 ребрами, 3 – оболочке, подкрепленной 36 ребрами. Расчеты проведены при $N = 9.$

Как видно из рис. 1, *a–в*, по рассмотренной методике находится только первая из возможных критических нагрузок. При этой нагрузке процесс итерации расходится, и закритическое поведение конструкции исследовать не удастся. Следует отметить, что такая методика удобна и при решении нелинейно-упругих задач (физически нелинейных) и задач ползучести.

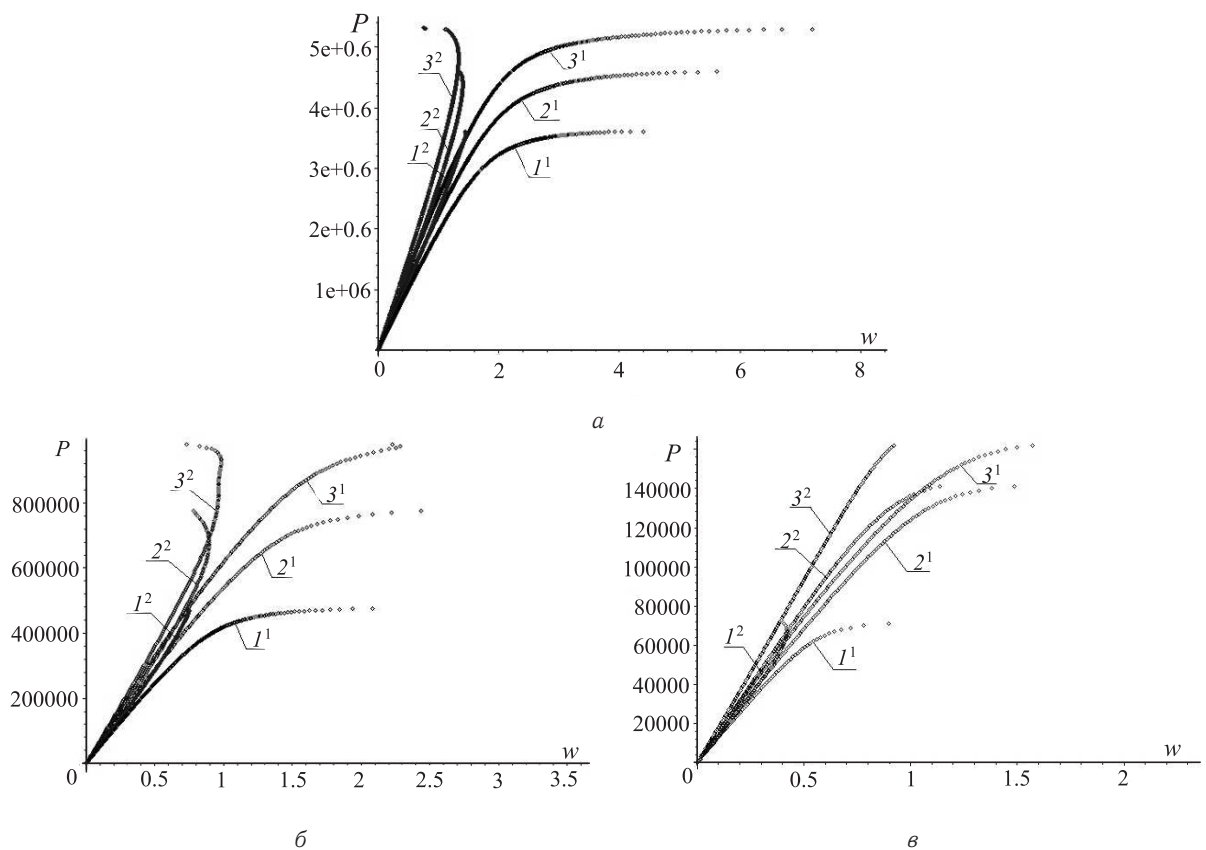


Рис. 1. Кривые зависимости « $\bar{P} - \bar{W}$ » для вариантов оболочки 1 (*a*); 2 (*б*); 3 (*в*), подкрепленной различным числом ребер

Тонкостенные оболочки могут иметь несколько форм потери устойчивости, когда прохлопывается только часть оболочки. Причем такое прохлопывание может происходить несколько раз перед тем, как оболочка прохлопнется полностью. Для исследования местных и общих форм потери устойчивости необходимо иметь возможность исследовать поведение конструкции и в закритической области. Такую возможность дает алгоритм, основанный на методе наискорейшего спуска [2, 3].

Если разложения искомых функций в ряды (2) подставить в функционал (1), то получим нелинейную функцию от неизвестных параметров $U(I), V(I), W(I), PS(I), PN(I)$ или кратко $\Phi(X, q).$ При каждом значении нагрузки q находится минимум этой функции по методу наискорейшего спуска,



когда последовательно уточняется значение X , начиная с некоторого начального значения X_0

$$X_i = X_{i-1} - t_i \frac{\partial \Phi(X_{i-1}, q)}{\partial X}.$$

Если алгоритм, основанный на методе Рунге и итерационных процессах, требует многократного решения систем линейных алгебраических уравнений с изменяющейся в процессе итераций правой частью, что занимает достаточно большое время расчета на ЭВМ, то алгоритм, основанный на методе наискорейшего спуска, свободен от этого недостатка. Некоторая сложность возникает с нахождением параметра t_i на каждой итерации, но эта задача решается методом золотого сечения.

На рис. 2, а–в представлены графики «нагрузка q – прогиб W » оболочки в характерных точках (в центре, четверти и наибольший прогиб) для панелей цилиндрических оболочек. Рассматривается несколько вариантов стальных цилиндрических панелей с радиусом $r = 5.4$ м и толщиной $h = 0.01$ м, разными размерами a вдоль оси x и углами разворота y_k (рад) вдоль оси y .

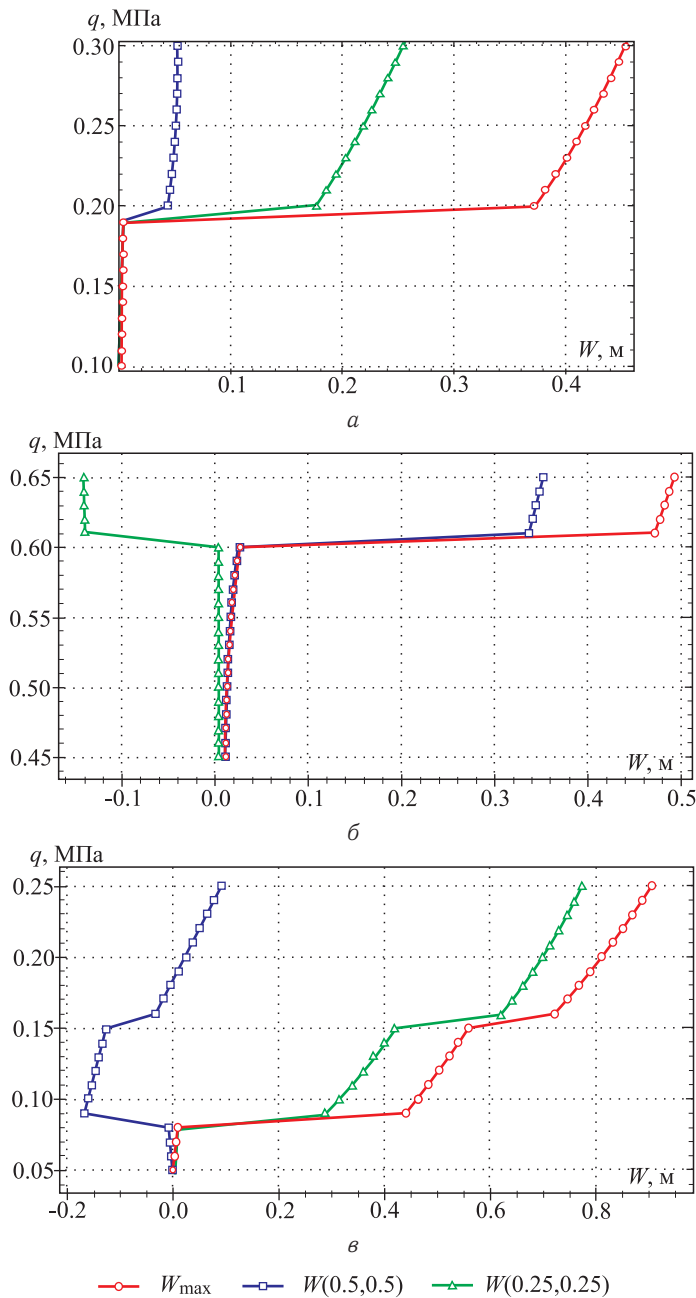


Рис. 2. График «нагрузка q – прогиб W »: $a = 10$ м, $y_k = 1.57$ (а); $a = 10$ м, $y_k = 3.14$ (б); $-a = 20$ м, $y_k = 1.57$ (в)



Как видно из рис. 2, а, б, для панели с параметром $a = 10$ м происходит один раз перескок в новое равновесное состояние и после потери устойчивости прогиб оболочки в различных точках начинает монотонно возрастать. Для панели с параметром $a = 20$ м при $y_k = 1.57$ происходит несколько перескоков в новое равновесное состояние (несколько потерь устойчивости) после чего прогибы в разных точках начинают монотонно возрастать.

Таким образом, этот алгоритм позволяет находить как местные, так и общие формы потери устойчивости оболочек, но не позволяет находить нижние критические нагрузки и точки бифуркации. Эта методика также позволяет решать как физически нелинейные задачи, так и задачи ползучести.

Решения нелинейных задач не единственны. Существует при одной и той же нагрузке несколько форм равновесных состояний. Существуют точки пересечения кривых «нагрузка – прогиб», которые называют точками бифуркации. Вблизи таких точек может наступить перескок с одной формы равновесия на другую. Поэтому необходимо при исследовании устойчивости оболочек находить не только критические нагрузки, но и точки бифуркации.

Алгоритм, основанный на методе продолжения решения по параметру, позволяет находить как верхние, так и нижние критические точки кривой «нагрузка – прогиб» и, кроме того, находить точки бифуркации [2, 4].

Уравнения равновесия (3) кратко можно еще записать в виде

$$F(X, P) = 0.$$

Продифференцировав это уравнение по параметру P получим

$$\frac{\partial F}{\partial X} \frac{dX}{dP} + \frac{\partial F}{\partial P} = 0. \quad (4)$$

Уравнение (4) линейное относительно $\frac{dX}{dP}$. Если при $P = P_0$ известно $X = X_0$, то, используя для решения краевой задачи для уравнения (4) метод Эйлера, получим расчетную схему

$$X_{i+1} = X_i + \Delta X_i, \quad P_{i+1} = P_i + \Delta P_i,$$

где ΔP_i задается, а ΔX_i находится из линейного уравнения

$$F'_X(X_i, P_i) \Delta X_i + F'_P(X_i, P_i) \Delta P_i = 0.$$

На рис. 3 представлены графики «нагрузка \bar{P} – прогиб \bar{W} » в центре оболочки (сплошные линии) и в четверти (пунктирные линии) для пологой оболочки с параметрами $a = b = 120h$, $k_\xi = k_\eta = 32$, подкрепленной двумя ребрами, проходящими параллельно сторонам оболочки и пересекающимися в центре (кривая 2) и 8 ребрами (по 4 в каждом направлении, кривая 8) высотой $3h$ и шириной $2h$. Индекс T означает, что ребра имеют высоту $15h$ и ширину $3h$. Для оболочки, подкрепленной 8 ребрами, происходит общая потеря устойчивости при $\bar{P} = 1750$. При этом прогиб при потере устойчивости составляет около двух толщин оболочки, т. е. половину от величины стрелы подъема оболочки (для рассматриваемой оболочки стрела подъема составляет $4h$). Для оболочки, подкрепленной 2 ребрами, вначале наступает местная потеря устойчивости при $\bar{P} = 800$ (прохлопываются четыре панели между ребрами и краем оболочки, точка M переходит в точку M_1 , а точка N – в точку N_1), затем при $\bar{P} = 1185$ происходит общая потеря устойчивости (оболочка прохлопывается полностью). Для оболочки, подкрепленной более жесткими ребрами (кривая с индексом T), местная потеря устойчивости происходит, а общей потери устойчивости может не произойти. Путем анализа знака определителя матрицы Якоби J можно определить точки бифуркации. В точках бифуркации определитель этой матрицы меняет знак.

Методика, основанная на методе продолжения решения по параметру, сложна для решения физически нелинейных задач и задач ползучести.

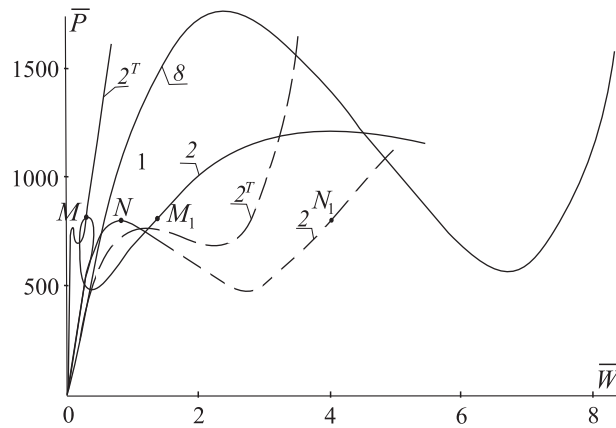


Рис. 3. Зависимость нагрузки от прогиба при различных формах потери устойчивости

Таким образом, анализируя рассмотренные алгоритмы решения задач устойчивости тонкостенных оболочек, можно сделать следующие выводы.

1. Алгоритм, основанный на методе Рунге и итерационных процессах, наиболее прост в реализации на ЭВМ. Он удобен при расчете напряженно-деформированного состояния (НДС) строительных конструкций, так как может быть применен с любого значения нагрузки. Кроме того, конструкции, применяемые в строительстве, могут работать при нагрузках, не только меньших первой критической нагрузки, но и до нагрузок, при которых наступают пластические деформации, или деформации ползучести. Применение такого алгоритма показано в работах автора и его учеников [1, 2, 5].

2. Алгоритм, основанный на методе наискорейшего спуска, позволяющий определить местные и общие формы потери устойчивости, впервые был применен в исследовании устойчивости подкрепленных оболочек вращения в работах [2, 3]. Процесс нахождения НДС оболочки может начинаться с любого значения нагрузки. Этот алгоритм удобен в тех задачах, где требуется знать весь процесс последовательной потери устойчивости оболочки.

3. В дополнение к возможностям перечисленных выше алгоритмов скажем об алгоритме, основанном на методе продолжения решения по параметру и позволяющем находить еще нижние критические нагрузки и точки бифуркации. Такой алгоритм применялся в работах автора и его учеников [1, 2, 4], а также в работах [6, 7].

4. Алгоритмы, основанные на методе Рунге и итерационных процессах и методе наискорейшего спуска при соответствующем подборе числа разложений искомым функций в ряды, дают решение с достаточно высокой точностью. Точность алгоритма, основанного на методе продолжения решения по параметру, зависит не только от числа функций разложений искомым функций в ряды, но и от величины шага нагружения Δq . Для повышения точности расчетов необходимо или брать достаточно малое значение Δq , если для решения линеаризованных уравнений применяется метод Эйлера, или использовать более точные методы для линеаризации уравнений.

Библиографический список

1. Карпов В. В. Математическое моделирование, алгоритмы исследования модели, вычислительный эксперимент в теории оболочек. СПб., 2006. 330 с.
2. Карпов В. В. Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек : в 2 ч. Ч. 1: Модели и алгоритмы исследования прочности и устойчивости подкрепленных оболочек вращения. М., 2010. 286 с.
3. Баранова Д. А., Карпов В. В. Алгоритмы исследования устойчивости оболочек, основанные на методе наискорейшего спуска // Математическое моделирование и краевые задачи : тр. седьмой Всерос. науч. конф. с междунар. участием : в 2 ч. Ч. 1. Самара, 2010. С. 47–51.
4. Карпов В. В., Игнатьев О. В., Сальников А. Ю. Нелинейные математические модели деформирования оболочек переменной толщины и алгоритмы их исследования. М.; СПб., 2002. 420 с.
5. Карпов В. В., Кудрявцев В. К. Устойчивость ребри-



стых пологих оболочек при длительном нагружении // Вестн. ВолгГАСУ. Сер. Строительство и архитектура. 2006. Вып. 6 (21). С. 53–57.

6. Карпов В. В., Филатов В. Н. Закритические деформации гибких пластин в температурном поле с учетом изменения свойств материала от температуры // Тр.

VII Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек. М., 1970. С. 276–279.

7. Карпов В. В., Петров В. В. Уточнение решений при исследовании шаговых методов в теории гибких пластин и оболочек // Изв. АН СССР. МТТ. 1975. № 5. С. 189–191.

УДК 533.6

ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ В ДИНАМИЧЕСКИХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ АЭРОУПРУГОСТИ КРЫЛА

Е. П. Лукашик

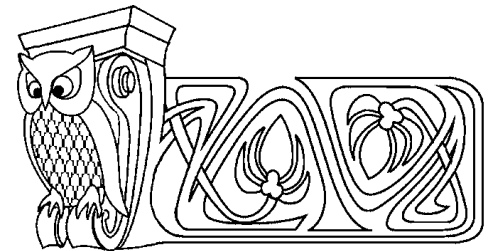
Кубанский государственный университет, Краснодар,
кафедра информационных технологий
E-mail: lep_9091@mail.ru

В настоящей работе рассматривается круг вопросов, связанных с анализом деформированного состояния тонкого упругого крыла при колебаниях в ограниченной акустической среде. В качестве аппарата математических исследований выбрана теория обобщенных функций. Результаты проведенного численного эксперимента подтвердили наличие в акустической среде демпфирующих сил и резонансных явлений, обусловленных гибкими свойствами крыла.

Ключевые слова: ограниченная акустическая среда, тонкое крыло, обобщенные функции, демпфирующие силы, динамическая неустойчивость.

В классической аэроупругости представлены исследования в основном по сравнительно жестким, слабо деформируемым крыльям. Однако в последнее время и в технике, и в научных разработках значительное внимание уделяется упругим несущим поверхностям. Увеличивается диапазон рабочих высот для летательных аппаратов, чаще используются малые высоты, где особенно существенно влияние турбулентности атмосферы. Задачи контроля и управления за реальными процессами аэроупругости становятся предметом обсуждения на международных научных школах, семинарах по гидродинамике больших скоростей, по моделям механики сплошной среды и др. Во многих работах ставится цель найти объективно существующие аналитические зависимости, которые могут представлять интерес с точки зрения управления аэродинамическими процессами [1]. Однако стремление учесть известные свойства материалов требует комплексных исследований явлений, зачастую с привлечением сведений из различных смежных областей.

Решение рассмотренной в данной работе контактной задачи аэроупругости поднимает две взаимно связанные проблемы. Первая из них касается определения внешних гидродинамических сил (при некотором заданном движении поверхности упругого тела), а вторая — оценки деформаций, возникающих в конструкции при уже «известной» нагрузке (выраженной через гидродинамические нагрузки и зависящей от параметров самой конструкции). Для связанной задачи аэродинамики рассмотрена математическая модель, основанная на волновом уравнении, описывающем малые колебания жидкости, и на линейном уравнении изгиба тонких пластин при наличии заданных постоянных усилий в срединной плоскости. Такое приближение позволяет несколько упростить анализ сложных механических явлений, обусловленных взаимодействием аэродинамических и упругих сил, в некоторых



Application of Generalized Functions in Dynamical Contact Problems of Wing Aeroelasticity

E. P. Lukaschik

Kuban State University, Krasnodar,
Chair of Information Technology
E-mail: lep_9091@mail.ru

The range of problems dealing with analysis of deformed state of thin elastic wing at the oscillations in limited acoustic medium is considered in this article. The theory of generalized functions was chosen as an instrument for the mathematical research. By results of performed numerical experiment the existence of damp forces in the acoustic medium and resonance effects caused by elastic properties of the wing was confirmed.

Key words: limited acoustic media, thin wing, generalized functions, damp forces, dynamical instability.