



Пример. Определено напряженно-деформированное состояние круговой арки (рис. 2) при следующих исходных данных [4]: $R = 338.109$ см, $t = 0.47625$ см, $\nu = 0.2$, $E = 700$ Па, $b = 2.54$ см — шири-

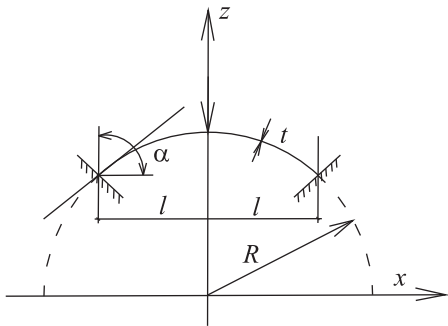


Рис. 2

на сечения арки; $\alpha = 0.128^\circ$. Арка рассматривалась как часть цилиндрической оболочки, срединная линия которой описывается уравнением окружности $x^2 + z^2 = R^2$ с центром в начале координат и радиусом R . Ввиду симметрии рассматривалась четвертая часть оболочки (длиной l) при разбивке ее на восемь элементов по длине и на два элемента по толщине.

В таблице приведены значения прогиба в центре арки в зависимости от силы P (в Н). Символом ν_1 (см) обозначены прогибы, полученные на основе скалярной аппроксимации приращений перемещений и приращений напряжений.

P, H	16	32	48	64	80	88	96	104	112
$\nu_1, \text{ см}$	0.033	0.069	0.109	0.160	0.221	0.254	0.297	0.351	0.498
$\nu_2, \text{ см}$	0.036	0.076	0.112	0.175	0.239	0.277	0.320	0.371	0.429
$\nu_3, \text{ см}$	0.036	0.076	0.112	0.175	0.241	0.279	0.323	0.376	0.437

Перемещения, полученные при использовании приращений перемещений и приращений напряжений как векторных и тензорных полей, обозначены в таблице символом ν_2 . Символом ν_3 обозначены перемещения [3].

Как видно из таблицы, приемлемые результаты с использованием рассматриваемых способов аппроксимации искомых величин получались при нагрузке меньше 100 Н. При большей нагрузке в случае использования скалярной аппроксимации искомых величин происходил срыв вычислительного процесса.

Указанное обстоятельство доказывает корректность разработанной тензорной интерполяции полей искомых величин методом конечных элементов в смешанной формулировке.

Библиографический список

1. Гуреева Н. А. Решение плоской задачи теории упругости с использованием варианта МКЭ в смешанной формулировке // Изв. вузов. Авиационная техника. 2009. № 2. С. 8–11.
2. Седов Л. И. Механика сплошной среды : в 2 т. М. : Наука, 1976. Т. 1. 536 с.
3. Постнов В. А., Хархурим И. Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. Л. : Судостроение, 1974. 344 с.
4. Papenhausen V. Eine energiegerechte, incrementelle Formulierung der geometrisch nichtlinearen. Theorie elastischer Kontinua und ihre numerische Behandlung mit Hilfe finiter Elemente / Tech.-wiss. Mitt. Jnst. Konstr. Ingenieurban Ruhr-Univ. Bochum, 1975. № 13, III. 133 p.

УДК 539.3

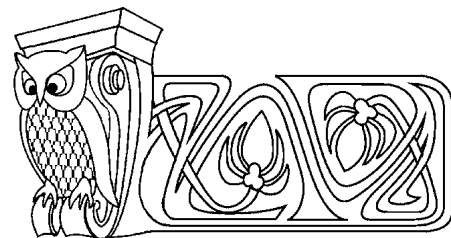
ТРЕХМЕРНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГЕМОДИНАМИКИ С УЧЕТОМ РАБОТЫ РАСПРЕДЕЛЕННОГО СЕРДЦА

А. В. Доль, Ю. П. Гуляев

Саратовский государственный университет
E-mail: dzero@pisem.net, gulvis@yandex.ru

В работе рассмотрена математическая модель гемодинамики крупных кровеносных сосудов. Предложена трехмерная система уравнений, описывающая движение крови по сосудам с учетом влияния стенок на поток.

Ключевые слова: кровоток, кровеносный сосуд, система уравнений.



3-Dimensional Mathematical Model of Blood Flow with Secondary Heart Theory

A. V. Dol, Yu. P. Gulyaev

This paper presents haemodynamics of blood vessels mathematical model. There is 3-dimentional system of equations describes blood flow, where vessel motions are taking in account.

Key words: blood flow, blood vessel, system of equations.



ВВЕДЕНИЕ

В конце XIX – начале XX века профессором М. В. Яновским впервые были проведены исследования, направленные на определение степени влияния сосудистой стенки на поток крови [1]. Уже тогда самим ученым и его последователями были сделаны предположения о наличии в организме человека феномена распределенного, или «периферического», «вторичного», сердца: то есть ускорения потока не только за счет работы сердца, но и в результате деятельности стенок артерий. В середине прошлого столетия было экспериментально доказано, что мощности сердечной мышцы не достаточно, чтобы в одиночку поддерживать необходимые параметры кровотока. На сегодняшний день существует несколько математических моделей, которые в той или иной мере отражают влияние сокращения стенок сосудов на кровь. В данной работе предложена трехмерная модель гемодинамики крупных кровеносных сосудов, которая учитывает влияние продольных сокращений стенки на поток.

1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Моделирование будем проводить в цилиндрической системе координат (x, r, θ) , где ось x совпадает с осью симметрии потока. Материал стенки сосуда предполагается упругим и изотропным, а текущая жидкость является ньютоновской и несжимаемой. Основная система уравнений гидроупругости для осесимметричных движений имеет вид

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \right), \\ \rho \frac{\partial v_r}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(-\frac{\partial^2 v_x}{\partial r \partial x} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial x^2} \right), \\ \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} &= 0, \\ \rho_0 h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial S'}{\partial x} + \frac{S_0 - T_0}{R} \frac{\partial w}{\partial x} - \rho_0 h \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \tau, \\ \rho_0 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{T_0}{R^2} w - \frac{T'}{R} + S_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \sigma, \\ S' &= \frac{Eh}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{w}{R} \right), \\ T' &= \frac{Eh}{1 - \nu^2} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\tau = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial r} \Big|_{r=R} + \frac{\partial v_r}{\partial x} \Big|_{r=R} \right)$, $\sigma = -p|_{r=R} + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} \Big|_{r=R}$. Здесь p – давление, ρ – плотность крови, μ – вязкость крови, v_x – осевая компонента скорости крови, v_r – радиальная компонента скорости крови, R – радиус сосуда, t – время, u , w – перемещения стенки в продольном и поперечном направлениях, S' , T' – силы натяжения в окружном и продольном направлениях соответственно, S_0 , T_0 – начальные значения сил натяжения в окружном и продольном направлениях, E – модуль Юнга стенки, ν – коэффициент Пуассона, h – толщина стенки сосуда, ρ_0 – массовая плотность материала стенки сосуда. Функция $u_0(x, t)$ описывает дополнительное продольное смещение стенки сосуда, вызываемое реактивным мышечным сокращением при прохождении по сосуду пульсовой волны давления. Эта функция моделирует работу вторичного сердца и должна определяться экспериментальным путем. К системе уравнений (1) добавим условия кинематического контакта стенки сосуда с жидкостью:

$$v_x|_{r=R} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u_0}{\partial t}, \quad v_r|_{r=R} = \frac{\partial w}{\partial t}. \quad (2)$$

Таким образом, наша задача заключается в нахождении общего решения системы уравнений гидроупругости (1), (2). В силу линейности уравнений задача традиционно распадается на однородную и неоднородную. Вначале построим общее решение однородной задачи, а затем найдем частное решение неоднородной задачи. В первом случае в качестве базовых функций выбираются волновые гармоники следующего вида:

$$u = u_1 \exp[i(\omega t - \chi x)], \quad w = w_1 \exp[i(\omega t - \chi x)], \quad (3)$$



$$v_x = v_{x1}(r) \exp[i(\omega t - \chi z)], \quad v_r = v_{r1}(r) \exp[i(\omega t - \chi z)], \quad p = p_1(r) \exp[i(\omega t - \chi z)], \quad (4)$$

где ω — частота пульсации кровотока, χ — волновое число.

2. ПОСТРОЕНИЕ ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ – СТОКСА В СЛУЧАЕ ОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ

Подставим функции (4) в первые три уравнения системы (1). Тогда получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений, сводящуюся к уравнениям Бесселя для цилиндрических функций нулевого порядка:

$$\begin{aligned} i\rho\omega v_{x1}(r) &= i\chi A J_0(i\chi r) + \mu \left(\frac{d^2 v_{x1}(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_{x1}(r)}{dr} - \chi^2 v_{x1}(r) \right), \\ i\rho\omega v_{r1}(r) &= i\chi A J_1(i\chi r) + \mu \left(i\chi \frac{dv_{x1}}{dr} - \chi^2 v_{r1}(r) \right), \\ \frac{d^2 p_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dp_1}{dr} - \chi^2 p_1 &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Решение системы уравнений (5) имеет вид

$$p_1 = A J_0(i\chi r), \quad v_{x1}(r) = \frac{\chi}{\rho\omega} A J_0(i\chi r) + B J_0(i\beta r), \quad v_{r1}(r) = \frac{\chi}{\rho\omega} A J_1(i\chi r) + \frac{\chi}{\beta} B J_1(i\beta r), \quad (6)$$

где A и B — произвольные постоянные интегрирования, $\beta = \sqrt{\alpha^2/R^2 + i\chi^2}$, $\alpha = R\sqrt{\omega\rho/\mu}$ — параметр Уомерсли. Здесь использованы только регулярные решения при $r = 0$.

3. ВЫВОД ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ

Подставим волновые функции (3) в однородные уравнения движения оболочки (1) и в однородные кинематические контактные условия (2). Тогда с учетом решений (6) относительно амплитудных значений продольных и радиальных перемещений оболочки получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} (\omega^2 - c_0^2\chi^2)u_1 - i\chi(c_0^2\frac{\nu}{R} + \frac{S-T}{\rho_0 h R})w_1 + \frac{2\mu}{\rho_0 h} \frac{i\chi^2}{\omega\rho} J_1(i\chi R)A + \frac{\mu}{\rho_0 h} \frac{i(\beta^2 + \chi^2)}{\beta} J_1(i\beta R)B &= 0, \\ i\chi \frac{c_0^2\nu}{R} u_1 + \left[\omega^2 + \frac{1}{R^2} \left(\frac{T}{\rho_0 h} - c_0^2 \right) - \chi^2 \frac{S}{\rho_0 h} \right] w_1 - \frac{1}{\rho_0 h} \left[(2\mu \frac{i\chi^2}{\omega\rho} - 1) J_0(i\chi R) - \frac{2\mu}{R} \frac{\chi}{\omega\rho} J_1(i\beta R) \right] A - \\ - \frac{1}{\rho_0 h} \left[2\mu i\chi J_0(i\beta R) - \frac{2\mu\chi}{R\beta} J_1(i\beta R) \right] B &= 0, \\ -i\omega u_1 + \frac{\chi}{\omega\rho} J_0(i\chi R)A + J_0(i\beta R)B = 0, \quad -i\omega w_1 + \frac{\chi}{\omega\rho} J_1(i\chi R)A + \frac{\chi}{\beta} J_1(i\beta R)B &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $c_0^2 = \frac{E}{\rho_0(1-\nu^2)}$ — квадрат скорости продольных волн в круглой цилиндрической оболочке в случае малой вязкости жидкости.

Относительно произвольных постоянных u_1 , w_1 , A и B получена система (7) линейных однородных алгебраических уравнений. Ненулевое решение существует тогда и только тогда, когда её определитель равен нулю. Таким образом, имеем дисперсионное уравнение:

$$\begin{vmatrix} \omega^2 - c_0^2\chi^2 & -i\chi(c_0^2\frac{\nu}{R} - \frac{S-T}{\rho_0 h R}) & \frac{2\mu}{\rho_0 h} \frac{i\chi^2}{\omega\rho} J_1(i\chi R) & \frac{\mu}{\rho_0 h} \frac{i(\beta^2 + \chi^2)}{\beta} J_1(i\beta R) \\ i\chi \frac{c_0^2\nu}{R} & \omega^2 + \frac{1}{R^2} \left(\frac{T}{\rho_0 h} - c_0^2 \right) - \chi^2 \frac{S}{\rho_0 h} & -\frac{1}{\rho_0 h} \left[(2\mu \frac{i\chi^2}{\omega\rho} - 1) J_0(i\chi R) - \frac{2\mu}{R} \frac{\chi}{\omega\rho} J_1(i\beta R) \right] & -\frac{1}{\rho_0 h} \left[2\mu i\chi J_0(i\beta R) - \frac{2\mu\chi}{R\beta} J_1(i\beta R) \right] \\ -i\omega & 0 & \frac{\chi}{\omega\rho} J_0(i\chi R) & J_0(i\beta R) \\ 0 & -i\omega & \frac{\chi}{\omega\rho} J_1(i\chi R) & \frac{\chi}{\beta} J_1(i\beta R) \end{vmatrix} = 0. \quad (8)$$

В общем случае уравнение (8) решается численно. Найденные дисперсионные кривые дают возможность построить общее решение однородной задачи гидроупругости.



**5. УЧЕТ РАБОТЫ РАСПРЕДЕЛЕННОГО СЕРДЦА.
ПОСТРОЕНИЕ ЧАСТНОГО РЕШЕНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ**

Функция $u_0(x, t)$, учитывающая работу распределенного сердца, определяется из эксперимента. В простейшем случае функция $u_0(x, t)$ может быть аналитически представлена в виде:

$$u_0(t, x) = \begin{cases} \gamma \left(1 - \cos \left(\frac{\pi \left(t - \frac{x}{c_{mk}} \right)}{qT} \right) \right), & \text{если } 0 \leq t - \frac{x}{c_{mk}} \leq qT, \\ 0, & \text{если } qT < t - \frac{x}{c_{mk}} < T, \end{cases} \quad (9)$$

где γ — параметр, характеризующий степень мышечной активности, $0 < q \leq 1$, T — период пульсации крови, $c_{mk} = \sqrt{\frac{hE}{2R\rho}}$ — скорость пульсовой волны давления Моэнса–Кортевега.

Скорость и ускорение мышечной активности стенок сосуда представим комплексными рядами Фурье:

$$\frac{\partial u_0(x, t)}{\partial t} = \frac{2\gamma}{T} + \operatorname{Re} \left[\sum_1^{\infty} c_k e^{i \frac{2\pi k}{T} \left(t - \frac{x}{c_{mk}} \right)} \right], \quad \frac{\partial^2 u_0(x, t)}{\partial t^2} = \operatorname{Re} \left[\sum_1^{\infty} c_k \frac{2i\pi k}{T} e^{i \frac{2\pi k}{T} \left(t - \frac{x}{c_{mk}} \right)} \right],$$

$$c_n = \frac{2\beta\pi}{T^2 q} \int_0^{qT} \sin \left(\frac{\pi t}{qT} \right) e^{-i \frac{2\pi k t}{T}} dt.$$

Частное решение неоднородной системы (1)–(2) для каждой волновой гармоники $e^{i \frac{2\pi k}{T} \left(t - \frac{x}{c_{mk}} \right)}$ ищем в виде

$$u_0 = u_{10} \exp[i(\omega t - \chi_0 x)], \quad w_0 = w_{10} \exp[i(\omega t - \chi_0 x)], \quad v_{x0} = v_{x10}(r) \exp[i(\omega t - \chi_0 x)],$$

$$v_{r0} = v_{r10}(r) \exp[i(\omega t - \chi_0 x)], \quad p_0 = p_{10}(r) \exp[i(\omega t - \chi_0 x)] \quad \left(\omega = \frac{2\pi k}{T} \right), \quad (10)$$

где $p_{10} = A_0 J_0(i\chi_0 r)$, $u_{10}(r) = \frac{\chi_0}{\rho\omega} A_0 J_0(i\chi_0 r) + B_0 J_0(i\beta_0 r)$, $v_{10}(r) = \frac{\chi_0}{\rho\omega} A_0 J_1(i\chi_0 r) + \frac{\chi_0}{\beta_0} B_0 J_1(i\beta_0 r)$, $\beta_0 = \sqrt{\frac{\alpha^2}{R^2} + i\chi_0^2}$, $\chi_0 = \frac{\omega}{c_{mk}}$, $\alpha = R\sqrt{\frac{\omega\rho}{\mu}}$ — параметр Уомерсли.

Подставляя функции (10) в неоднородную систему (1)–(2), получим неоднородную алгебраическую систему уравнений относительно постоянных u_{10} , w_{10} , A_0 , B_0 :

$$(\omega^2 - c_0^2 \chi_0^2) u_{10} - i\chi_0 \left(c_0^2 \frac{\nu}{R} + \frac{S-T}{\rho_0 h R} \right) w_{10} + \frac{2\mu}{\rho_0 h} \frac{i\chi_0^2}{\omega\rho} J_1(i\chi_0 R) A_0 + \frac{\mu}{\rho_0 h} \frac{i(\beta_0^2 + \chi_0^2)}{\beta_0} J_1(i\beta_0 R) B_0 = i\varpi \rho_0 h c_k,$$

$$i\chi_0 \frac{c_0^2 \nu}{R} u_{10} + \left[\omega^2 + \frac{1}{R^2} \left(\frac{T}{\rho_0 h} - c_0^2 \right) - \chi_0^2 \frac{S}{\rho_0 h} \right] w_{10} - \frac{1}{\rho_0 h} \left[\left(2\mu \frac{i\chi_0^2}{\omega\rho} - 1 \right) J_0(i\chi_0 R) - \right.$$

$$\left. - \frac{2\mu}{R} \frac{\chi_0}{\omega\rho} J_1(i\beta_0 R) \right] A_0 - \frac{1}{\rho_0 h} \left[2\mu i\chi_0 J_0(i\beta_0 R) - \frac{2\mu\chi_0}{R\beta_0} J_1(i\beta_0 R) \right] B_0 = 0, \quad (11)$$

$$-i\omega u_{10} + \frac{\chi_0}{\omega\rho} J_0(i\chi_0 R) A_0 + J_0(i\beta_0 R) B_0 = c_k, \quad -i\omega w_{10} + \frac{\chi_0}{\omega\rho} J_1(i\chi_0 R) A_0 + \frac{\chi_0}{\beta_0} J_1(i\beta_0 R) B_0 = 0.$$

Очевидно определитель системы (11) отличен от нуля, и тогда её решение определяется однозначно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлена математическая модель гемодинамики крупных кровеносных сосудов, которая учитывает работу распределенного сердца. Построены базовые частные решения, на основании которых методом линейной суперпозиции строится общее решение неоднородной задачи динамики кровотока в крупных артериальных сосудах. Основная трудность при решении поставленной задачи — нахождение корней дисперсионного уравнения (8). В настоящее время разработаны различные асимптотические и численные методы решения подобных дисперсионных уравнений [3].



Библиографический список

1. Обрезан А. Г., Шункевич Т. Н. Теория «периферического сердца» профессора М. В. Яновского: классические и современные представления // Вестн. Санкт-Петерб. ун-та. Сер. 11. 2008. № 3. С. 14–23.
2. Гуляев Ю. П., Коссович Л. Ю. Математические модели биомеханики в медицине. Саратов, 2001. 49 с.
3. Вильде М. В., Гуляев Ю. П. Низкочастотные осесимметричные волны в кровеносных сосудах постоянного сечения: асимптотический подход // Изв. РАН. 2009. № 4. С. 136–151.

УДК 539.3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УПРУГИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОЛИМЕРНЫХ ПОКРЫТИЙ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИСПЫТАНИЙ НА РАСТЯЖЕНИЕ И ИЗГИБ ПЛОСКИХ ОБРАЗЦОВ

Ю. П. Зезин, Е. В. Ломакин, С. В. Мамонов*,
М. И. Мартиросов*, Л. Н. Рабинский*, П. В. Чистяков

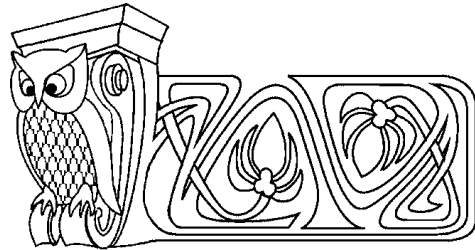
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: yuzezin@gmail.com, lomakin@mech.math.msu.su,
chist206@yandex.ru

*Московский авиационный институт

E-mail: sergei.mamonov@gmail.com, f9_dec@mai.ru

Представлены результаты экспериментального определения модуля упругости и коэффициента Пуассона тонких полимерных покрытий на поверхности образцов стали 08-ПС. Оценки модуля упругости получены с использованием простейших правил смесей по результатам стандартных испытаний образцов с покрытиями на растяжение и четырехточечный изгиб. Значения коэффициента Пуассона получены на основе сопоставления результатов испытаний и численного моделирования процесса изгиба исследуемых образцов. Показано, что оба метода дают близкие значения модуля упругости для различных модификаций исследуемых покрытий.

Ключевые слова: покрытия, полимеры, механические характеристики, модуль упругости, коэффициент Пуассона, растяжение, изгиб.



Determination of Elastic Characteristics of Polymeric Covers by Results of Tests of Flat Specimens at Tension and Bending

Yu. P. Zezin, E. V. Lomakin, S. V. Mamonov, M. I. Martirosov,
L. N. Rabinsky, P. V. Chistjakov

The results of experimental identification of elastic modulus and Poisson's ratio of thin polymeric covers on the surface of the flat specimens of steel 08-OP are presented. The values of elastic modulus were determined with the rule of the mixtures by the standard tests of the specimens with the covers at the tension and four-point bending. The values of the Poisson's ratio were obtained on the base of the comparison of the tests results and the computer modeling of the bending process the studied specimens. It was shown that both methods give us the narrow values of elastic characteristics for different modifications of the studied covers.

Key words: covers, polymers, mechanical characteristics, stiffness modulus, Poisson's ratio, tension, bending.

В настоящее время практически на все элементы машиностроительных конструкций из металлов наносят различные покрытия. Основной задачей нанесения покрытий является защита деталей машин и металлических конструкций от коррозии и износа. Подсчитано [1], что потери металла, связанные с коррозией и износом, составляют около 1/3 ежегодной выплавки этих материалов. Эксплуатационные расходы, связанные с коррозией и износом оборудования, сопоставимы со стоимостью самого оборудования. Коррозия и износ являются причиной 80% общих потерь рабочего времени в процессе эксплуатации оборудования.

Тем не менее, несмотря на несомненную важность и во многих случаях незаменимость покрытий в современной технике, к настоящему времени не разработано стандартных методов определения их упругих характеристик. Среди множества методов испытаний лакокрасочных покрытий лишь три относятся к оценке механических характеристик: испытания на изгиб, испытания на удар и определение стойкости к истиранию [2]. В испытаниях на изгиб определяют наименьший радиус изгиба образца-полосы с исследуемым покрытием, при котором не происходит растрескивание покрытия. В испытаниях на удар определяют наибольшую высоту падения груза массой 1 кг, при которой не наблюдается повреждений покрытия. Результаты подобных испытаний носят качественный характер и могут использоваться лишь для сравнения покрытий. Очевидно, что методы испытаний, позволяющие оценить прочность и упругие характеристики покрытия, имеют целый ряд преимуществ. Знание