ИНФОРМАТИКА

НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

УДК 519.4

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ О МИНИМАЛЬНЫХ РАСШИРЕНИЯХ ГРАФОВ

М.Б. Абросимов

Саратовский государственный университет,
кафедра теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии
E-mail: mic@rambler.ru

Рассматриваются некоторые утверждения о минимальных расширениях графов, интуитивно представляющиеся очевидными, однако на самом деле не являющиеся истинными без дополнительных условий.

Some Questions on Minimal Extensions of Graphs

M.B. Abrosimov

Some statements concerning minimal extensions of graphs are presented that seem to be quite evident at first sight but are not so simple under closer inspection.

Неориентированным графом (далее – *графом*) называется пара $G = (V, \alpha)$, где α (отношение смежности) – симметричное и антирефлексивное отношение на множестве вершин V. *Степенью вершины v* в графе будем называть количество вершин в G, смежных с данной, и обозначать через $d(v)$. Здесь и далее определения даются по [7].

Подграфом графа $G = (V, \alpha)$ называется пара $G' = (V', \alpha')$, где $V' \subseteq V$ и $A = A(M, g, v)$.

Вложением графа $G_1 = (V_1, \alpha_1)$ в граф $G_2 = (V_2, \alpha_2)$ называется такое взаимно однозначное отображение $f: V_1 \to V_2$, что для любых вершин $u, v \in V_1$ выполняется следующее условие: $(u, v) \in \alpha_1 \Rightarrow (f(u), f(v)) \in \alpha_2$.

Два графа $G_1 = (V_1, \alpha_1)$ и $G_2 = (V_2, \alpha_2)$ называются *изоморфными,* если можно установить взаимно однозначное соответствие $f: V_1 \to V_2$, сохраняющее отношение смежности:

$$(u, v) \in \alpha_1 \Leftrightarrow (\varphi(u), \varphi(v)) \in \alpha_2, \text{ для любых } u, v \in V_1.$$

Назовем граф $G_R = (V_R, \alpha_R)$ *вершинным k-расширением* графа $G = (V, \alpha)$, если граф G можно вложить в каждый подграф графа G_R, получающийся удалением любых его k вершин и всех связанных с ними ребер.

Назовем граф $G_R = (V_R, \alpha_R)$ *реберным k-расширением* графа $G = (V, \alpha)$, если граф G можно вложить в каждый подграф графа G_R, получающийся удалением любых его k ребер.

Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется *минимальным вершинным k-расширением* (далее – МВ-kР) n-вершинного графа $G = (V, \alpha)$, если выполняются следующие условия:

1) G^* является вершинным k-расширением G, то есть граф G вложим в каждый подграф графа G^*, получающийся удалением любых его k вершин;

2) G^* содержит $n + k$ вершин, то есть $|V^*| = |V| + k$;

3) α^* имеет минимальную мощность при выполнении условий 1) и 2).

Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется *минимальным реберным k-расширением* (далее – МР-kР) n-вершинного графа $G = (V, \alpha)$, если выполняются следующие условия:

1) G^* является реберным k-расширением G, то есть граф G вложим в каждый подграф графа G^*, получающийся удалением любых его k ребер;

2) G^*содержит n вершин, то есть $|V^*| = |V|$;

3) α^* имеет минимальную мощность при выполнении условий 1) и 2).

Также мы будем говорить «минимальное k-расширение» или «k-расширение», если сказанное относится к вершинным и реберным расширениям.

При исследовании минимальных расширений графов выявляется ряд интуитивно очевидных утверждений, которые при ближайшем рассмотрении оказываются не столь простыми. Рассмотрим, например, следующее высказывание.

Пусть G^*является реберным k-расширением графа G. Если минимальная степень вершины графа G есть d, то каждая вершина x^* графа G^* должна иметь степень d^*, такую что $d^* \geq d + k$.

Утверждение столь очевидно, сколь и его доказательство, занимающее 4 строки (см.: [10], теорема 3). Тем не менее, это утверждение является ложным для некоторых графов, имеющих изолированные вершины (например, для графа $Af = Mf + g(x)\int_0^{\pi} f(t)v(t)dt,\ Mf = \int_0^{x} M(x,t)f(t)dt,\ 0 \leq x \leq \pi$ из следующего далее пункта 1.2. Следует заметить, что утверждение является истинным для графов без изолированных вершин).

В данной работе рассматривается ряд подобных утверждений, представляющих некоторый интерес.

1. О МИНИМАЛЬНОМ k-РАСШИРЕНИИ ГРАФА

Рассмотрим задачу нахождения минимального k-расширения графа. Можем ли мы использовать для решения этой задачи знание минимальных расширений графа при значениях меньших k? Представляется интуитивно очевидным, что минимальное 1-расширение минимального $(k-1)$-расширения будет являться минимальным k-расширением.

1.1. «Всякое МВ-*k*Р графа есть МВ-1Р его МВ-(*k*-1)Р»

Очевидно, что МВ-1Р любого МВ-$(k-1)$Р графа является и его вершинным k-расширением. Более того, для некоторых классов графов доказано, что оно является и МВ-kР. Например, для цепей, циклов (см. [9]), предполных графов (см. [5]) и некоторых других связных и несвязных графов утверждение имеет место при всех значениях k.

Далее будет предложено семейство графов, опровергающее исследуемое утверждение.

Рассмотрим граф G вида $P_n \cup P_n \cup O_m$, где $m \geq 2n - 2$. Покажем, что МВ-1Р графа G при $n > 3$ будет граф G^* вида $C_{2n+1} \cup O_m$, причем при $n > 4$ единственным с точностью до изоморфизма (при $n = 2, 3$ МВ-1Р графа G будет граф вида $P_n \cup P_n \cup P_n \cup O_{m-n+1}$). В самом деле граф $C_{2n+1} \cup O_m$ отличается от графа G на три дополнительных ребра. МВ-1Р не может иметь менее двух дополнительных ребер (заметим, что при $n = 2$ МВ-1Р графа G будет граф $P_2 \cup P_2 \cup P_2 \cup O_{m-1}$, отличающийся на одно дополнительное ребро), поскольку степень хотя бы одной вершины будет не ниже двух. Таким образом, нужно показать, что не существует МВ-1Р, отличающегося на два ребра. Предположим, что такой граф существует. Тогда степень любой его вершины не более двух. Рассмотрим, какие графы получаются из графа G добавлением одной вершины и двух ребер (и степень вершин ни в каком из этих графов не больше двух):

$P_n \cup P_n \cup P_2 \cup P_2 \cup O_{m-3}$,
$P_n \cup P_n \cup P_3 \cup O_{m-2}$,
$P_{n+1} \cup P_{n+1} \cup O_{m-1}$,
$P_n \cup P_{n+2} \cup O_{m-1}$,
$P_n \cup C_{n+1} \cup O_m$,
$C_{2n} \cup O_m$.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что ни один из перечисленных графов при $n > 3$ не является вершинным 1-расширением графа G (заметим, что при $n = 3$ граф $P_3 \cup P_3 \cup P_3 \cup O_{m-2}$ является МВ-1Р графа G).

МВ-1Р графа G^* (см. [2, 4]) имеет вид $C^*_{2n+1} \cup O_m$, где C^*_{2n+1} – некоторое минимальное расширение цикла C_{2n+1} – однородный граф порядка 3 (см. [1, 9]). Покажем, что при некоторых значениях n никакой такой граф не является МВ-2Р графа G.

Граф $C^*_{2n+1} \cup O_m$ имеет $\frac{1}{2}(3*(2n+2)) = 3n+3$ ребра. Рассмотрим граф вида $P_n \cup P_n \cup P_n \cup P_n \cup O_{m-2n+2}$. Нетрудно видеть, что такой граф является вершинным 2-расширением графа G и имеет $4n - 4$ ребра. Найдем значения n, при которых он будет являться и МВ-2Р графа G: $4n - 4 < 3n + 3$, откуда $n < 7$. Таким образом, при $n = 5$ или $n = 6$ граф $P_n \cup P_n \cup O_m$ имеет единственное с точностью до изоморфизма МВ-1Р – граф вида $C_{2n+1} \cup O_m$, – и единственное МВ-2Р – граф вида $P_n \cup P_n \cup P_n \cup P_n \cup O_{m-2n+2}$, который не является МВ-1Р графа $C_{2n+1} \cup O_m$. На рис. 1 приводится иллюстрация данного примера при $n = 5$ и $m = 8$. При $n = 7$ граф $P_n \cup P_n \cup O_m$ имеет единственное МВ-1Р и два неизоморфных МВ-2Р, одно из которых является МВ-1Р его МВ-1Р, а другое нет. □

Рассматривая большие значения n можно указать графы, которые имеют МВ-kР, не являющиеся МВ-1Р их МВ-$(k-1)$Р при больших значениях k (например, при $7 < n < 11$ это будет справедливо для $k = 3$ и т.д.).

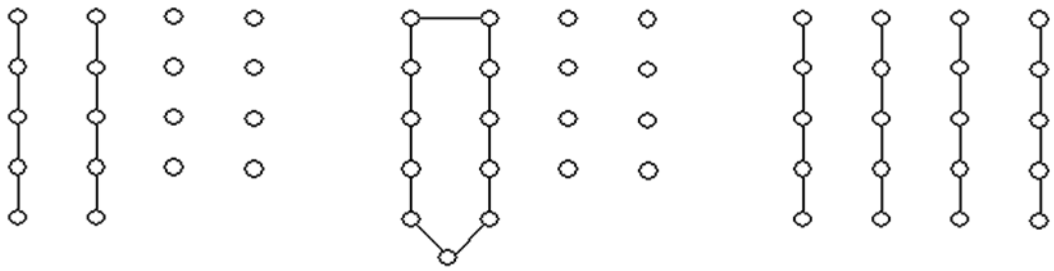


Рис. 1. Граф, его МВ-1Р и МВ-1Р

1.2. «Всякое МР-*k*Р графа есть МР-1Р его МР-(*k*-1)Р»

Рассмотрим граф $P_2 \cup O_2$ (рис. 2, *а*). Этот граф имеет одно ребро; очевидно, что любым МР-kР этого графа будет 4-вершинный граф с $k + 1$ ребром. Так, на рис. 2, *б* изображены два МР-2Р, а на рис. 2, *г* – МР-3Р. На рис. 2, *в* изображены МР-1Р для графов на рис. 2, *б*. Видно, что один из этих графов является МР-2Р графа $P_2 \cup O_2$, а другой нет.

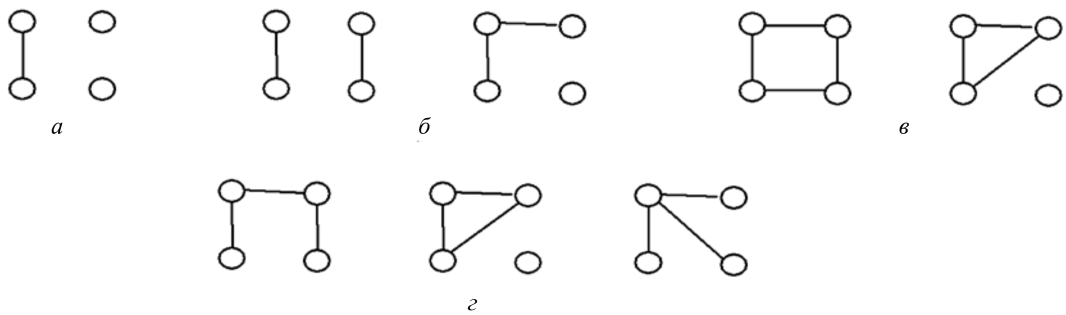


Рис. 1. Граф, его МВ-1Р и МВ-2Р

Предложенные примеры показывают, что ответ на поставленный вопрос является в общем случае отрицательным для вершинных и реберных расширений. Интерес представляет описание классов графов, для которых исследуемое утверждение является истинным. В частности, на данный момент неизвестно связных графов и несвязных графов без изолированных вершин, для которых утверждение было бы ложным.

2. О ТОЧНЫХ РАСШИРЕНИЯХ

Если в п. 1 определений МВ-kР и МР-kР заменить требование вложения графа G в оставшуюся часть графа G^* требованием их изоморфизма, то получим определения *точного вершинного k-расширения* (далее – ТВ-kР) и *точного реберного k-расширения* (далее – ТР-kР). Приведем ряд дополнительных определений по [8].

Автоморфизмом графа G называется изоморфизм графа G на себя.

Две вершины u и v графа G называются подобными, если для некоторого автоморфизма f этого графа $f(u) = v$. Два ребра $e_1 = \{u_1, v_1\}$ и $e_2 = \{u_2, v_2\}$ называются подобными, если существует такой автоморфизм f графа G, что $f(\{u_1, v_1\}) = \{u_2, v_2\}$.

Граф называется *вершинно-симметрическим*, если любая пара его вершин подобна, и *реберно-симметрическим*, если любая пара его ребер подобна. Граф называется *симметрическим*, если он вершинно- и реберно-симметрический.

2.1. «Всякое ТВ-1Р графа есть и ТР-1Р некоторого графа»

В работе [3] показывается, что ТВ-1Р является всегда однородным графом. ТР-1Р в общем случае не является однородным графом. Некоторые ТВ-1Р являются и ТР-1Р. Например, полный граф K_n или цикл C_n. Более того, объединение любого числа одинаковых полных графов или циклов C_n также является как ТВ-1Р, так и ТР-1Р.

Оказывается, имеет место следующая

Теорема. Граф G является ТВ-1Р тогда и только тогда, когда он является вершинно-симметрическим.

Доказательство.

Необходимость.

Пусть граф G является вершинно-симметрическим. Любые две его вершины u и v подобны, откуда очевидным образом следует, что $G – u$ будет изоморфен $G – v$.

Достаточность.

Пусть граф G является ТВ-1Р. Тогда для любых двух вершин u и v графы $G – u$ и $G – v$ изоморфны. В общем случае из того что $G – u$ изоморфен $G – v,$ не следует, что вершины u и v подобны (см. [8]). Покажем, что в случае ТВ-1Р это выполняется.

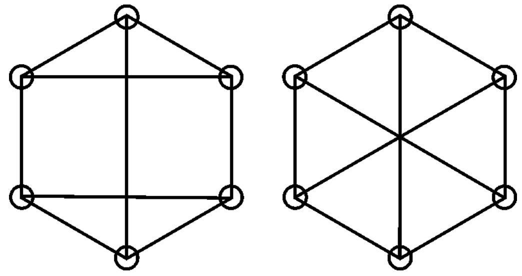
Пусть $G = (V, \alpha)$ – ТВ-1Р, а u и v – произвольные его вершины. Тогда граф G однородный некоторого порядка d. Граф $G – u$ изоморфен $G – v$, и пусть f – подходящий изоморфизм. Пусть $u_1 ,\dots, u_d$ – вершины степени $d – 1$ графа $G – u$, а $v_1, \dots, v_d$ соответственно подобные им вершины в графе $G – v$. Вершина u смежна с вершинами $u_1 ,\dots, u_d$ в графе G и только с ними, а вершина v смежна с вершинами $v_1, \dots, v_d$ и только с ними. Обозначим множество вершин $u_1 ,\dots, u_d$ через $\alpha(u)$, а множество вершин $v_1, \dots, v_d$ через $\alpha(v)$.

Покажем, что вершины u и v подобны. Рассмотрим отображение $f^*(x) = \begin{cases} v, x = u \\ f(x), x \neq u \end{cases}$. Нетрудно видеть, что f^* является взаимно однозначным отображением. Покажем, что f^* – автоморфизм графа G. Рассмотрим пару вершин w_1 и w_2 графа G. Рассмотрим три случая.

1) w_1 и w_2 отличны от u. Тогда $(w_1, w_2) \in \alpha \Leftrightarrow (f^*(w_1), f^*(w_2)) \in \alpha$.

2) Одна из вершин – u (пусть для определенности $w_1 = u$), а другая (то есть w_2) – смежная с ней в графе G вершина, то есть $w_2 \in \alpha(u)$. Тогда $(w_1, w_2) \in \alpha$, однако $f^*(u) = v$, а $f^*(u_i) = v_i$, а поскольку $(v, v_i) \in \alpha$, то и в этом случае выполняется $(w_1, w_2) \in \alpha \Leftrightarrow (f^*(w_1), f^*(w_2)) \in \alpha$.

3) Одна из вершин – u (пусть опять для определенности $w_1 = u$), а другая (то есть w_2) – не смежная с ней в графе G вершина, то есть $w_2 \notin \alpha(u)$. Тогда $(w_1, w_2) \notin \alpha$, однако $f^*(u) = v$, а $f^*(w_2) \notin \alpha(v)$, а поскольку в этом случае $(v, f^*(w_2) \notin \alpha$, то опять выполняется $(w_1, w_2) \in \alpha \Leftrightarrow (f^*(w_1), f^*(w_2)) \in \alpha$.



а *б*

Рис. 3. Два ТВ-1Р, одно из которых не является ТР-1Р

Таким образом, f^* является изоморфизмом, следовательно, вершины u и v подобны. □

Таким образом, всякий вершинно-симметрический граф является ТВ-1Р, однако не всякий такой граф является ТР-1Р. На рис. 3, *а* приведен минимальный по числу вершин вершинно-симметрический граф, не являющийся ТР-1Р. Интересно, что этот граф также является МВ-1Р цикла C_5 и МР-1Р цикла C_6 (см. [1, 6, 9, 10]). На рис. 3, *б* изображено еще одно ТВ-1Р, которое является и ТР-1Р. Интересно, что граф на рис. 3, *б* является МР-1Р цикла C_6, однако не является МВ-1Р цикла C_5.

2.2. «Всякое однородное ТР-1Р графа есть и ТВ-1Р некоторого графа»

В отличие от вершинных точные реберные 1-расширения не обязательно являются однородными графами. Так, например, полный двудольный граф $K_{n,\,m}$ является ТР-1Р при любых значениях $n > 1$, $m > 0$.

Оказывается, имеет место следующая

Теорема. Всякий однородный граф G является ТР-1Р тогда и только тогда, когда он является реберно-симметрическим.

Доказательство

Необходимость

Пусть граф G является реберно-симметрическим. Любые два его ребра e_1 и e_2 подобны, откуда очевидным образом следует, что граф $G - e_1$ изоморфен графу $G - e_2$.

Достаточность

Пусть однородный граф G является ТР-1Р. Обозначим через k степень вершин графа G. Тогда для любых двух ребер $e_1 = \{u_1, v_1\}$ и $e_2 = \{u_2, v_2\}$ графы $G - e_1$ и $G - e_2$ изоморфны. В графе $G - e_1$ вершины u_1 и v_1 имеют степень $k - 1$, а все остальные вершины имеют степень k. Аналогично в графе $G - e_2$ вершины u_2 и v_2 имеют степень $k - 1$, а все остальные вершины имеют степень k. Следовательно, при изоморфизме образом вершин u_1 и v_1 могут быть только вершины u_2 и v_2, а это и означает, что ребра e_1 и e_2 подобны. □

Следующая известная теорема (см. [8]) устанавливает связь между реберно-симметрическими и вершинно-симметрическими графами.

Теорема. Реберно-симметрический граф без изолированных вершин является или вершинно-симметрическим, или двудольным.

Из этой теоремы с учетом доказанного ранее очевидным образом следует следующая

Теорема. Пусть однородный граф G является ТР-1Р, тогда он является или ТВ-1Р, или двудольным графом.

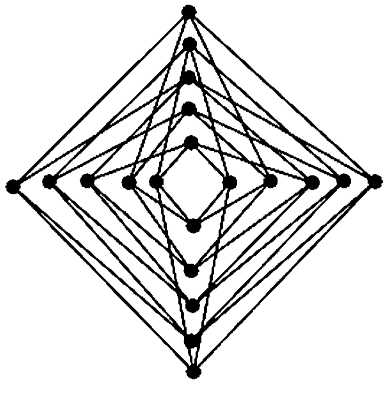


Рис. 4. Граф Фолкмана

Реберно-симметрический граф, не являющийся вершинно-симметрическим называется полусимметрическим. В [11] доказано, что минимальным по числу вершин полусимметрическим графом (а следовательно, и минимальным ТР-1Р, которое не является ТВ-1Р) является 20-вершинный граф Фолкмана (рис. 4).

В [8] приводится ряд утверждений о свойствах симметрических графов, которые с учетом установленных соответствий могут быть сформулированы следующим образом.

Теорема (ср. следствие 14.12). а) Если G – однородное n-вершинное ТР-1Р и степень d каждой вершины нечетна, то граф G является ТВ-1Р.

б) Если граф G – однородное n-вершинное ТР-1Р и степень каждой вершины четна, причем $d \geq p/2$, то граф G является ТВ-1Р.

И, наконец, имеет место следующая

Теорема (ср. теорему 14.13). Для каждого $n \geq 20$, кратного 4, существует однородное n-вершинное ТР-1Р, не являющееся ТВ-1Р.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 05-08-18082.

Библиографический список

1. *Абросимов М.Б.* О неизоморфных оптимальных 1-отказоустойчивых реализациях некоторых графов // Теоретические проблемы информатики и ее приложений. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2000. Вып.3. С. 3–10.

2. *Абросимов М.Б.* Минимальные расширения объединений некоторых графов // Теоретические проблемы информатики и ее приложений. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып.4. С. 3–11.

3. *Абросимов М.Б.* Минимальные расширения дополнений графов // Теоретические проблемы информатики и ее приложений. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып. 4. С. 11–19.

4. *Абросимов М.Б.* О минимальных расширениях графов, содержащих изолированные вершины // Вестник ТГУ. Приложение. Томск, 2002. №1(II). С.24–29.

5. *Абросимов М.Б.* Минимальные k-расширения предполных графов // Известия вузов: Математика. 2003. № 6(493). С. 3–11.

6. *Абросимов М.Б.* О неизоморфных минимальных реберных 1-расширениях некоторых графов // Теоретические задачи информатики и ее приложений. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2004 (в печати).

7. *Богомолов А.М., Салий В.Н.* Алгебраические основы теории дискретных систем. М.: Наука, 1997.

8. *Харари Ф.* Теория графов. М.: Едиториал УРСС, 2003.

9. *Hayes J.P.* A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Trans. Comput. 1976. Vol. C. 25, №9. P.875–884.

10. *Harary F., Hayes J.P.* Edge fault tolerance in graphs // Networks. 1993. Vol. 23. P. 135–142.

11. *Skiena S.* Implementing Discrete Mathematics: Combinatorics and Graph Theory with Mathematica. Reading, MA: Addison-Wesley, 1990.

УДК 512.5

О МИНИМАЛЬНЫХ СИЛЬНО СВЯЗНЫХ КОНГРУЭНЦИЯХ ОРИЕНТИРОВАННЫХ ЦЕПЕЙ

М.Р. Мирзаянов

Саратовский государственный университет,
кафедра теоретических основ компьютерной
безопасности и криптографиии
E-mail: mirzayanovmr@gmail.com

Пусть G = (V, α) – ориентированный граф. Эквивалентность $\theta \subseteq V \times V$ называется его сильно связной конгруэнцией, если факторграф G/θ – сильно связный. Описываются минимальные по включению сильно связные конгруэнции ориентированной цепи и подсчитывается их количество: 2^{n-3}, если цепь имеет *n* вершин.

On Minimal Strongly Connected Congruences of a Directed Path

M.R. Mirzayanov

Let G = (V, α) be a directed graph. An equivalence relation $\theta \subseteq V \times V$ is called a strongly connected congruence of G if the quotient graph G/θ is strongly connected. Minimal (under inclusion) strongly connected congruences of a directed path are described and the total amount of them is found (2^{n-3} if the path has *n* vertices).

Пусть K – некоторый класс орграфов. Если G является K-графом, а отношение эквивалентности θ на множестве его вершин таково, что факторграф G/θ также принадлежит классу K, то θ называется конгруэнцией K-графа G.

Если K – некоторый класс орграфов и G – произвольный орграф, то K-конгруэнцией орграфа G называется отношение эквивалентности θ на множестве его вершин такое, что факторграф G/θ принадлежит классу K.

В [1, 2] ставятся задачи изучения K-конгруэнций орграфов, а также конгруэнций K-графов.

Конгруэнции корневых деревьев и турниров рассмотрела А.В. Киреева в [3, 4]. В работе М.А. Кабанова [5] изучаются функциональные конгруэнции орграфов. Сообщение об алгоритме построения минимальной в смысле количества вершин в факторграфе сильно связной конгруэнции произвольного орграфа содержится в работе М.Р. Мирзаянова [6].