



спутника с гибкими стержнями. I // Космические исследования. 1989. Т. 27, вып. 5. С. 643–651.

3. Злочевский С. И., Кубышкин Е. П. О стабилизации спутника с гибкими стержнями. II // Космические исследования. 1991. Т. 29, вып. 6. С. 828–839.

4. Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П. К теории стабилизации спутников с упругими стержнями // Изв. РАН. ТиСУ. 2004. № 6. С. 150–163.

5. Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П. К теории

комбинированных динамических систем // Изв. РАН. ТиСУ. 2000. № 3. С. 54–69.

6. Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П. Динамический анализ и выбор параметров модели гироскопического интегратора линейных ускорений с плавающей платформой // Изв. РАН. ТиСУ. 2008. № 4. С. 76–89.

7. Андрейченко Д. К. Эффективный алгоритм численного обращения интегрального преобразования Лапласа // Журн. вычисл. мат. и мат. физ. 2000. Т. 40, № 7. С. 1030–1044.

УДК 531.36; 534.1

## ХАОТИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ВОЛЧКА СО СМЕЩЁННЫМ ЦЕНТРОМ МАСС

Д. А. Лосякова

Самарский государственный аэрокосмический университет  
E-mail: Losjakova@termech.ru

Изучено движение твёрдого тела с малым смещением центра масс с оси динамической симметрии. Получены аналитические условия для существования гиперболической особой точки на фазовом портрете системы и аналитическое решение для сепаратрис. Под действием малого возмущения, вызванного асимметрией, тело совершает хаотическое движение вблизи сепаратрис. С помощью численного моделирования, основанного на методе Мельникова в интерпретации Холмса–Масдена, получено условие существования хаотического движения, которое проиллюстрировано серией сечений Пуанкаре.

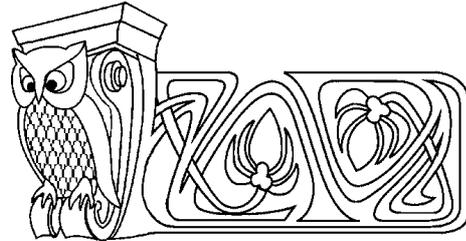
**Ключевые слова:** нелинейная система, периодические возмущения, хаос, гомоклинические орбиты, метод Мельникова, сечения Пуанкаре.

### ВВЕДЕНИЕ

Изучается пространственное движение твёрдого тела с неподвижной точкой в случае Лагранжа под действием момента, действующего в нутационной плоскости. Задача усложняется, если рассматривать малую динамическую асимметрию, связанную со смещением центра масс с оси динамической симметрии. В этом случае появляется ещё одна позиционная координата — угол собственного вращения, что, при определённых условиях, может приводить к возможности возникновения хаоса.

Целью работы является изучение возможности возникновения хаотических движений тяжёлого твёрдого тела с малым смещением центра масс с оси динамической симметрии. Поставленная цель достигается путём выявления условий, при которых существует гиперболическая точка на фазовом портрете невозмущённой системы при отсутствии асимметрии; приведения уравнений движения к виду, допускающему использование метода Мельникова непосредственно или в интерпретации Холмса–Масдена; построения гомоклинической траектории невозмущённой системы; получения функции Мельникова и построения сечений Пуанкаре, подтверждающих существование хаоса. Подобные задачи были рассмотрены в [1], но при асимметрии, связанной с неравенством экваториальных моментов инерции  $A \neq B$ ; в [2, 3] рассмотрен случай действия бигармонического момента  $a \cos \theta + b \sin 2\theta$ .

Результаты работы имеют практическое применение, например, движение космического аппарата относительно собственного центра масс при спуске в атмосфере описывается уравнениями, близкими к уравнениям Лагранжа. При разработке таких космических аппаратов, как правило, стремятся



### Chaotic Motion of Top with Displaced Mass Center

D. A. Losyakova

The motion of solid body with a small displacement mass center from the axis of dynamic symmetry has been studied. Analytical conditions for the existence of a hyperbolic singular point in the phase portrait of the system and the analytical solution for the separatrices have been obtained. Body makes a chaotic motion near separatrices under the influence of small perturbations caused by the asymmetry of the body. Using the numerical simulation based on the Melnikov method in interpretation of Holmes–Marsden confirmation of the chaotic motion system has been received. This has been illustrated by a series of Poincare sections.

**Key words:** non-linear system, periodic perturbations, chaos, homoclinic orbits, Melnikov method, Poincare section.



обеспечить динамическую симметрию и придать им осесимметричную форму, но обычно возникает малая асимметрия, в том числе связанная со смещением центра масс [4].

### 1. ГАМИЛЬТОНИАН ВОЗМУЩЁННОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим твёрдое тело с одной неподвижной точкой. В качестве обобщённых координат выберем углы Эйлера  $(\theta, \varphi, \psi)$  и соответствующие им обобщённые импульсы  $(p_\theta, p_\varphi, p_\psi)$  (рис. 1). Кинетическая и потенциальная энергия тела задается формулами [5]:

$$T = \frac{1}{2}[A(\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi)^2 + B(\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi)^2 + C(\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi})^2], \quad (1)$$

$$\Pi = mg(a \sin \theta \sin \varphi + b \sin \theta \cos \varphi + c \cos \theta), \quad (2)$$

где  $A, B, C$  — главные моменты инерции тела,  $a, b = O_1D, c = OD$  (рис. 1) — координаты центра масс тела  $D$  в системе отсчёта, связанной с телом  $(Oxyz)$ ,  $mg$  — сила тяжести.

Будем рассматривать случай, когда поперечные моменты инерции тела равны между собой  $A = B$ , а значит, оси системы координат, связанной с телом, можно повернуть вокруг оси  $Oz$  таким образом, что одна из координат ( $a$  или  $b$ ) может быть равна нулю. Не умоляя общности, будем считать, что  $a = 0$ . Тогда гамильтониан примет вид

$$H = \frac{p_\theta^2}{2A} + \frac{p_\varphi^2}{2C} + \frac{(p_\psi - p_\varphi \cos \theta)^2}{2A \sin^2 \theta} + mgc \left( \frac{b}{c} \sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \right). \quad (3)$$

Будем считать смещение центра масс по оси  $Ox$  таким, что  $\mu = b/c \ll 1$  будет малым параметром. Тогда гамильтониан (3) запишем в виде [6, 7]:

$$H = H_0 + \mu H_1, \quad (4)$$

$$H_0 = \frac{p_\theta^2}{2A} + \frac{p_\varphi^2}{2C} + \frac{(p_\psi - p_\varphi \cos \theta)^2}{2A \sin^2 \theta} + mgc \cos \theta, \quad (5)$$

$$H_1 = mgc \sin \theta \cos \varphi. \quad (6)$$

### 2. ОСОБЫЕ ТОЧКИ. ФАЗОВЫЙ ПОРТРЕТ

Рассмотрим особенности фазового портрета в невозмущённом случае. Уравнения движения имеют интеграл энергии в виде

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} + W(\theta) = h, \quad (7)$$

где

$$W(\theta) = \frac{G^2 + R^2 - 2GR \cos \theta}{2 \sin^2 \theta} + \beta \cos \theta, \quad (8)$$

$$GA = p_\psi, \quad RA = p_\varphi, \quad \beta = mgc/A.$$

Характер фазового портрета системы определяется формой зависимости  $W(\theta)$ . В частности, от количества и расположения экстремумов этой функции зависит число и тип особых точек. Можно показать, что функция (8) имеет единственный экстремум и этот экстремум — минимум. Это означает, что на фазовом портрете существует единственное устойчивое положение равновесия, а седловая точка отсутствует.

Более интересен случай, при котором возможно наличие максимума функции  $W(\theta)$  и седловой точки на фазовом портрете системы. Это условие было предложено Р. J. Holmes и J. E. Marsden в [1]:

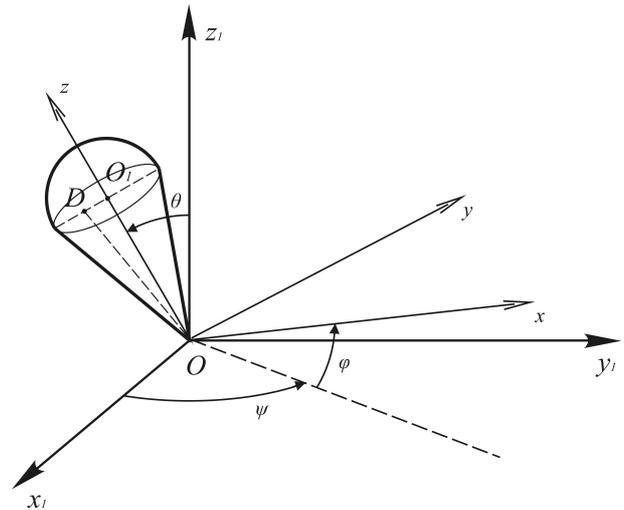


Рис. 1. Углы Эйлера

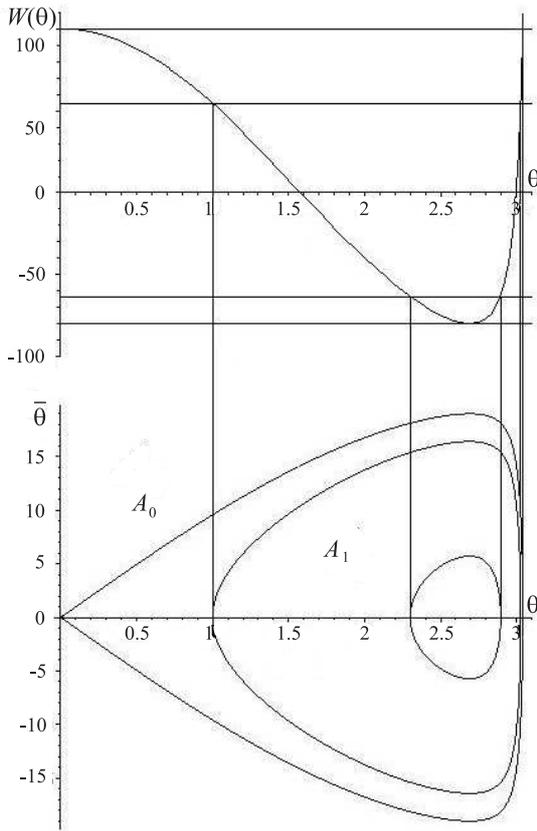


Рис. 2. Фазовый портрет

если  $p_\varphi = p_\psi = Ap = \text{const}$  и  $0 < p < 2\sqrt{\beta}$ , то на фазовом портрете в пространстве  $(\theta, p_\theta)$  есть гиперболическая точка при  $\theta = p_\theta = 0$  и гомоклиническая орбита.

Рассмотрим (8) при выполнении первого условия теоремы:  $p_\varphi = p_\psi = Ap = \text{const}$ . Тогда (8) примет вид

$$W(\theta) = \frac{p^2}{1 + \cos \theta} + \beta \cos \theta. \quad (9)$$

Исследуя функцию (9) на наличие экстремумов, несложно доказать, что при  $0 < p < 2\sqrt{\beta}$  она имеет два экстремума на интервале  $\theta \in [0, \pi)$ : минимум при  $\cos \theta = p/\sqrt{\beta} - 1$  и максимум при  $\theta = 0$ .

При выполнении условий теоремы фазовая плоскость разбивается сепаратрисой на две области: внешнюю  $A_0$  и внутреннюю  $A_1$  (см. рис. 2).

Таким образом, при выполнении условий теоремы, описанной в [1], появляются качественно новые свойства, не характерные для случая Лагранжа, обусловленные возможностью появления на фазовом портрете системы особой точки типа седло, соответствующей неустойчивому положению равновесия. Очевидно, что при наличии возмущений возможно хаотическое поведение системы и переходы из одной характерной области в другую.

### 3. ГОМОКЛИНИЧЕСКИЕ ТРАЕКТОРИИ

Согласно методу В. К. Мельникова [8], для получения критерия возникновения хаоса в окрестности сепаратрис при возмущённом движении необходимо найти аналитические решения уравнения невозмущённого движения на гомоклинических траекториях — сепаратрисах, принадлежащих области  $A_1$ , которые соединяются в седле  $\theta = 0$ . Равенство  $h = W_0$  соответствует движению по сепаратрисе. Найдем гомоклинические траектории невозмущённой системы, для этого запишем интеграл энергии (7) с учётом (9):

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} + \beta \cos \theta + \frac{p^2}{1 + \cos \theta} = h_s, \quad (10)$$

где  $h_s = \beta + p^2/2$  — значение  $h$  на сепаратрисе.

Дифференциальному уравнению (10) удовлетворяет решение

$$\cos \theta = 1 - \alpha \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\sqrt{2\beta\alpha}}{2} t \right), \quad \alpha = 2 - p^2/2\beta, \quad (11)$$

представленное в [1]. Данное решение можно получить двумя способами, как непосредственным интегрированием (10) с начальным условием  $\cos \theta_0 = p^2/2\beta - 1$ , так и из общего решения уравнения движения твёрдого тела в случае Лагранжа при  $p_\psi = p_\varphi$ , учитывая что  $\operatorname{sn}(u, 1) = \operatorname{th}(u)$ .

Можно отметить, что полученное решение по своей структуре близко к известному решению волнового уравнения Кортевега–де Фриза [9]:

$$u(x, \tau) = \frac{2\kappa^2}{\cosh^2[\kappa(x - 4\kappa^2\tau - x_0)]},$$

а при

$$\tau = -t, \quad x_0 = 0, \quad x = 0, \quad \kappa = \sqrt{\alpha/2}, \quad \frac{\beta}{4} = \left( 2 - \frac{p^2}{2\beta} \right)^2$$

совпадает с ним.



#### 4. ВОЗМУЩЁННОЕ ДВИЖЕНИЕ. МЕТОД МЕЛЬНИКОВА

Для численного анализа возмущённой системы воспользуемся методом отображений Пуанкаре [7, 10, 11], который основан на рассмотрении многообразия с плоскими сечениями, перпендикулярными фазовой оси  $\varphi$  в четырёхмерном пространстве  $(\theta, p_\theta, \varphi, p_\varphi)$ , разделёнными интервалами, равными  $2\pi$ . Это позволяет вместо исследования непрерывного процесса изучить динамику возмущённой системы с дискретной фазой  $\varphi$ .

При  $\mu = 0$  наблюдается регулярная структура фазового пространства, траектории не имеют пересечений (рис. 3), и сечение Пуанкаре совпадает с невозмущённым фазовым портретом, представленным на рис. 2.

Следуя [1], запишем функцию Мельникова в виде

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ H_0, \frac{H_1}{\Omega} \right\}_{\theta, p_\theta} dt, \quad (12)$$

где подынтегральное выражение является скобкой Пуассона:

$$\left\{ H_0, \frac{H_1}{\Omega} \right\}_{\theta, p_\theta} = \frac{1}{\Omega} \frac{\partial H_0}{\partial \theta} \frac{\partial H_1}{\partial p_\theta} - \frac{1}{\Omega} \frac{\partial H_0}{\partial p_\theta} \frac{\partial H_1}{\partial \theta} + \frac{H_1}{\Omega^2} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} \frac{\partial H_0}{\partial p_\theta}, \quad (13)$$

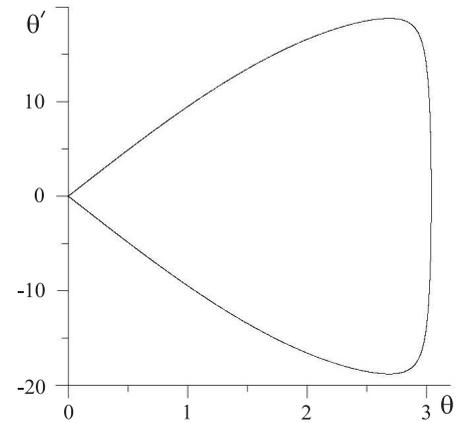


Рис. 3. Сечение Пуанкаре при  $\mu = 0$

Проверив выполнение условия  $\Omega(\theta) > 0$  (рис. 4), подставим гамильтониан (4) в (12), считая, что  $p_\varphi = p_\psi = Ap = \text{const}$ , (11) — решение для угла нутации на сепаратрисе, а решение для углов прецессии и собственного вращения могут быть найдены в квадратурах [1]:

$$\dot{\varphi}(t) = \Omega(\theta) = p \left( \frac{A}{C} - \frac{\cos \theta}{1 + \cos \theta} \right), \quad \dot{\psi}(t) = \frac{p}{1 + \cos \theta}.$$

Функция Мельникова (12) неоднократно меняет знак (рис. 5), что означает наличие пересечения устойчивого и неустойчивого многообразий и возникновение хаотических режимов, включающих «перетекание» траекторий из одной области в другую.

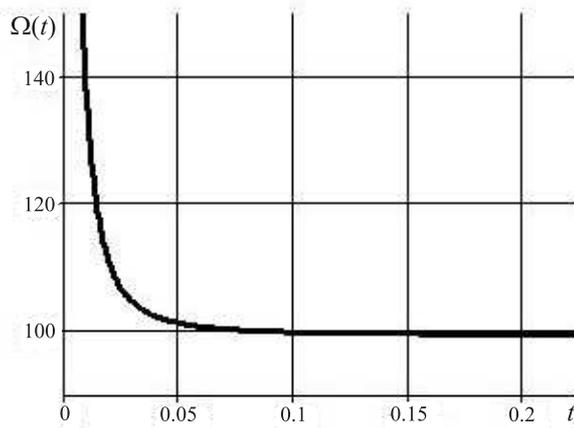


Рис. 4. Частота возмущения  $\Omega(t)$

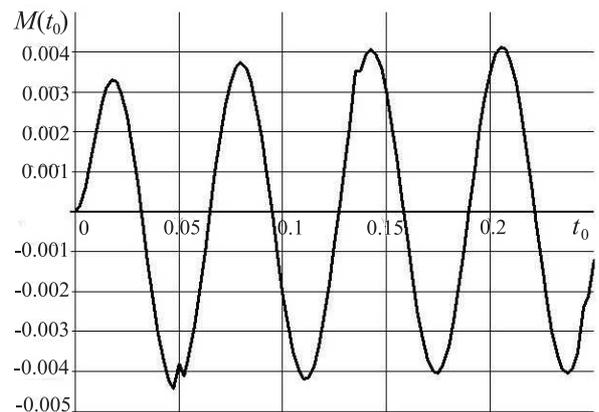


Рис. 5. Функция Мельникова  $M(t_0)$

Также наличие хаотического движения может быть проиллюстрировано серией сечений Пуанкаре при различной величине возмущающего параметра  $\mu$  (рис. 6).

Возмущения ( $\mu \neq 0$ ) приводят к усложнению фазового пространства и возникновению хаотического слоя рядом с невозмущёнными сепаратрисами (см. рис. 6). С ростом величины возмущения происходит увеличение ширины хаотического слоя, и наблюдаются новые колебательные режимы, определяемые замкнутыми кривыми, нехарактерными для невозмущённого случая.

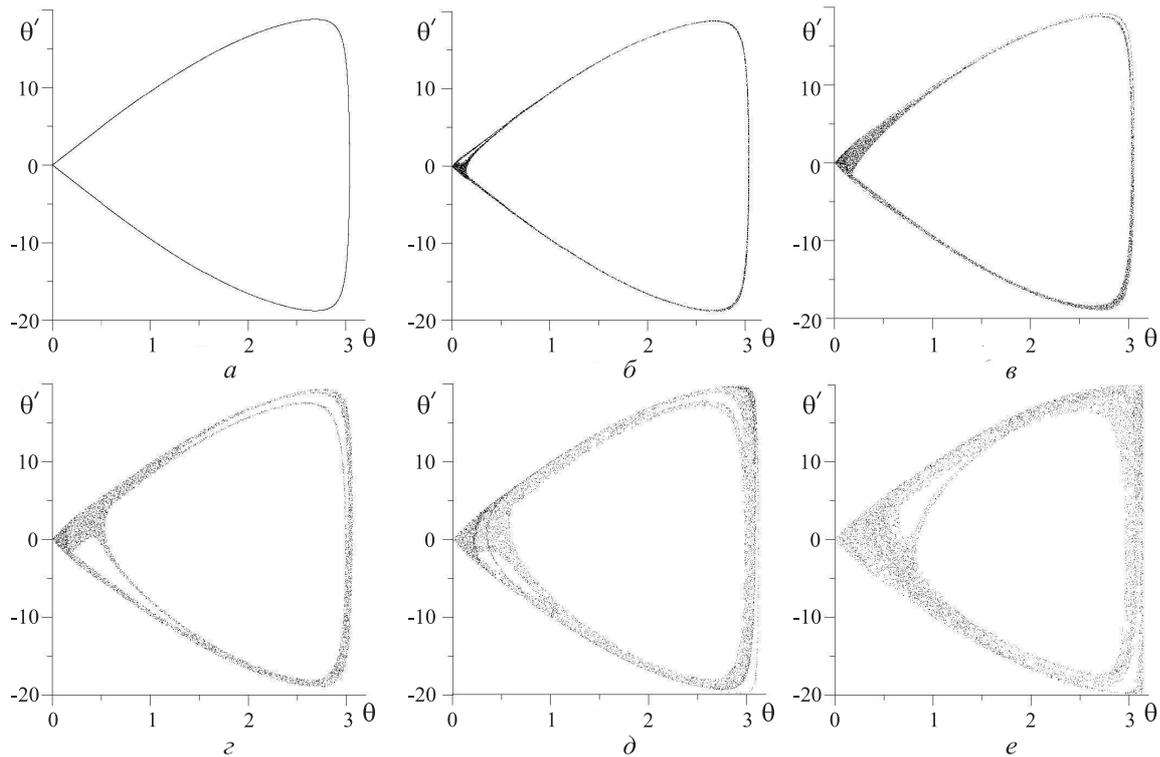


Рис. 6. Сечения Пуанкаре при  $\mu = 0$  (а),  $\mu = 0.1$  (б),  $\mu = 0.5$  (в),  $\mu = 1$  (г),  $\mu = 2$  (д),  $\mu = 5$  (е)

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, асимметричное тело с неподвижной точкой при определённых начальных условиях  $p_\varphi = p_\psi = Ap = \text{const}$  может иметь два положения равновесия в невозмущённом случае. Это обстоятельство определяет возможность появления хаоса при возмущённом движении. Отметим, что для задач, связанных со спуском космических аппаратов в атмосфере [12], является недопустимым попадание в область больших углов атаки (углов нутации), поэтому проведённые исследования имеют также важное прикладное значение.

Автор выражает благодарность профессору В. С. Асланову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 09-01-00384).*

## Библиографический список

1. Holmes P. J., Marsden J. E. Horseshoes and Arnold diffusion for Hamiltonian systems on Lie groups // Indiana University Math. J. 1983. Vol. 32, № 5. С. 273–309.
2. Асланов В. С. Движение несимметричного твёрдого тела под действием бигармонического момента // Проблемы аналитической механики и теории устойчивости : сб. науч. ст., посвящ. памяти акад. В. В. Румянцева / Ин-т пробл. управления РАН. М.: Физматлит, 2009. 420 с.
3. Асланов В. С., Иванов Б. В. Хаотическое движение нелинейной системы // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. 2008. Т. 8 Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 4. С. 38–43.
4. Асланов В. С. Пространственное движение тела при спуске в атмосфере. М. : Физматлит, 2004. 160 с.
5. Маркеев А. П. Теоретическая механика : учебник для университетов. М. : ЧеРо, 1999. 572 с.
6. Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М. : ВИНТИ, 1985. Т. 3. 304 с.
7. Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические колебания системы и бифуркации векторных полей. М.; Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2002. 560 с.
8. Мельников В. К. Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях // Тр. Московского мат. общества. 1963. № 12. С. 1–56.



9. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988. 694 с.
10. Морозов А. Д., Драгун Т. Н. Визуализация и анализ инвариантных множеств динамических систем. М.; Ижевск: ИКИ, 2003. 304 с.
11. Goirgilli A., Lazutkin V. F., Simo C. Visualization of

a hyperbolic structure in area preserving maps // Reg. & Chaot. Dyn. 1997. Vol. 2, № 3/4. P. 47–61.

12. Асланов В. С., Ледков А. С. Особенности вращательного движения космического аппарата при спуске в атмосфере Марса // Космические исследования. 2007. Т. 45, № 4. С. 351–357.

УДК 539.375

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕЩИНООБРАЗОВАНИЯ В ПОЛОСЕ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

М. В. Мирсалимов

Азербайджанский технический университет, Баку  
E-mail: a-mirsalimov@mail.ru

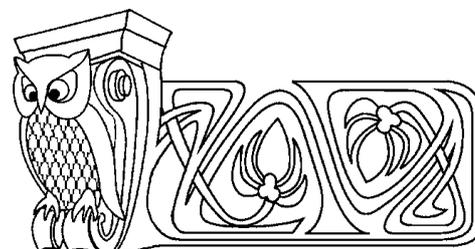
Проведено математическое описание модели зарождения трещины в полосе переменной толщины. Определение неизвестных параметров, характеризующих зародышевую трещину, сводится к решению системы сингулярных интегральных уравнений. Получено условие, определяющее критическое значение внешней нагрузки, при которой происходит трещинообразование.

**Ключевые слова:** полоса переменной толщины, зона предразрушения, зарождение трещины.

Полосы переменной толщины используются в различных отраслях техники. Это вызвано, в частности тем, что, часто изменяя толщину изделия, ему можно придать требуемые свойства.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается однородная изотропная полоса переменной толщины. Обозначим через  $2L$  и  $2h$  ширину и толщину полосы соответственно (рис. 1). Срединная плоскость  $(x, y)$  является плоскостью симметрии. Полоса переменной толщины находится в обобщенном плоском напряженном состоянии. Пусть полоса подвергается силовому нагружению. Считается, что заданы напряжения на границе  $y = \pm L$  полосы (условие первой основной задачи). Принято, что в материале полосы после многократного нагружения появляется концентратор напряжений (область ослабленных межчастичных связей материала). При нагружении в прослойке перенапряженного материала образуется зона пластического течения. Пусть для определенности силовая нагрузка изменяется так, что в области ослабленных межчастичных связей материала осуществляется пластическое деформирование. Через некоторое число нагружений возможность пластического деформирования в области ослабленных межчастичных связей материала исчерпывается, и раскрытие берегов зоны пластического течения резко увеличивается. Если раскрытие берегов зоны предразрушения в точке максимальной концентрации достигает предельного значения  $\delta_c$  для данного материала полосы, то в этой точке зарождается трещина. Важно отметить, что в предлагаемой расчетной модели удлинение зародышевой трещины происходит непрерывно от нулевой длины.



### Modelling of Cracking in the Strip of Variable Thickness

M. V. Mirsalimov

The mathematical description of the model crack nucleation in a strip of variable thickness was conducted. Definition of the unknown parameters that characterize the nucleus crack is reduced to solving a system of singular integral equations. The condition that determines the critical value of external load at which cracking occurs was obtained.

**Key words:** strip of variable thickness, prefracture zone, nucleation of cracks.

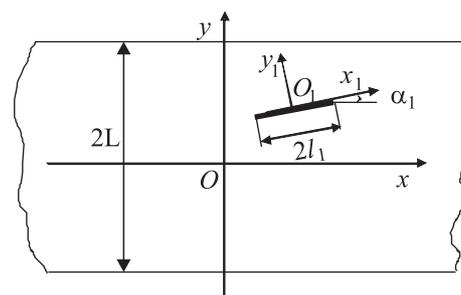


Рис. 1. Расчетная схема задачи о зарождении трещины в полосе переменной толщины