УДК 519.713.8, 512.53, 514.146

АБСТРАКТНАЯ ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ПОЛУГРУПП ВХОДНЫХ СИГНАЛОВ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ПЛАНАРНЫХ АВТОМАТОВ

В. А. Молчанов

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, v.molchanov@inbox.ru

Универсальные планарные автоматы являются универсальными притягивающими объектами в категории автоматов, у которых множества состояний и выходных сигналов наделены структурами плоскостей. Получены необходимые и достаточные условия, при которых произвольный автомат изоморфен универсальному планарному автомату и произвольная полугруппа изоморфна полугруппе входных сигналов универсального планарного автомата.

Ключевые слова: автомат, полугруппа, плоскость.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей статье продолжаются исследования автоматов, у которых множества состояний и выходных сигналов наделены дополнительной алгебраической структурой плоскости. Согласно [1] под плоскостью здесь понимается алгебраическая система вида $\Pi = (X, L)$, где X — непустое множество точек и L – семейство его подмножеств, именуемых прямыми, удовлетворяющее следующим аксиомам: (A_1) через любые две точки проходит одна и только одна прямая; (A_2) каждая прямая содержит по крайней мере три точки; (A_3) в множестве X есть три точки, не лежащие на одной прямой.

Пусть X, Y — непустые множества. Обозначим: $T(X)$ — множество всех преобразований X, $F(X,Y)$ — множество всех отображений X в Y, $S(X,Y)$ — декартово произведение $T(X) \times F(X,Y)$ множеств $T(X), F(X,Y)$. Элементами множества $S(X,Y)$ являются упорядоченные пары (f_1, f_2) отображений $f_1 : X \to X$, $f_2 : X \to Y$, которые могут рассматриваться как вектор-функции $f : X \to X \times Y$, определяющиеся по формуле: $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ (где $x \in X$). Отображения f_1, f_2 называются соответственно первой и второй компонентами вектор-функции f. Таким образом, вектор-функции могут отождествляться с упорядоченными парами их компонент.

Произведение вектор-функций $f, g \in S(X,Y)$ определяется [2] по формуле: $f \cdot g = (f_1, f_2) \cdot (g_1, g_2) = (f_1 g_1, f_1 g_2)$, где $f_1 g_1$ и $f_1 g_2$ — композиции отображений f_1, g_1 и f_1, g_2, соответственно. Так как эта операция ассоциативна, то множество $S(X,Y)$ с операцией умножения вектор-функций образует полугруппу, которая называется симметрической полугруппой вектор-функций на X со значениями в $X \times Y$. Подполугруппы $S(X,Y)$ называются полугруппами вектор-функций на X с значениями в $X \times Y$. Пусть $\Pi_1 = (X_1, L_1)$, $\Pi_2 = (X_2, L_2)$ — некоторые плоскости. Напомним, что точки плоскости называются коллинеарными, если они лежат на некоторой прямой этой плоскости. Отображение $\varphi : X_1 \to X_2$ называется гомоморфизмом плоскости Π_1 в плоскость Π_2, если оно коллинеарные точки плоскости Π_1 отображает в коллинеарные точки плоскости Π_2. В частности, из аксиомы (A_1) следует, что для любой точки $x \in X_2$ постоянное отображение $c_x : X_1 \to \{x\}$ является гомоморфизмом плоскости Π_1 в плоскость Π_2. Множество всех гомоморфизмов обозначается $\mathrm{Hom}(\Pi_1, \Pi_2)$. Гомоморфизм плоскости Π_1 в себя называется эндоморфизмом этой плоскости. Множество всех эндоморфизмов плоскости Π_1 с операцией композиции образует полугруппу $\mathrm{End}(\Pi_1)$. Множество $S(\Pi_1, \Pi_2) = \mathrm{End}(\Pi_1) \times \mathrm{Hom}(\Pi_1, \Pi_2)$ с операцией умножения вектор-функций образует полугруппу вектор-функций на X с значениями в $X \times Y$.

Следуя [2], под автоматом будем понимать алгебраическую систему $\mathbf{A} = (X, Y, S, \delta, \lambda)$, состоящую из множества состояний X, множества выходных сигналов Y, полугруппы входных сигналов S, функции переходов $\delta : X \times S \to X$ и выходной функции $\lambda : X \times S \to Y$ таких, что для любых $x \in X$ и $a, b, c \in S$, выполняются равенства

$$(ab)c = a(bc), \qquad \delta(x, ab) = \delta(\delta(x,a), b), \qquad \lambda(x, ab) = \lambda(\delta(x,a), b). \tag{1}$$

Для каждого $s \in S$ определим отображения $\delta_s : X \to X$, $\lambda_s : X \to Y$ и вектор-функцию $f_s = (\delta_s, \lambda_s)$ по формулам: $\delta_s(x) = \delta(x, s)$, $\lambda_s(x) = \lambda(x, s)$, где $x \in X$. По определению автомата последовательное действие входных сигналов $s, t \in S$ удовлетворяет следующим условиям:

$$(f_s f_t)(x) = f_t\,(f_s(x)) = (\delta\,(\delta(x,s), t)\,, \lambda\,(\delta(x,s), t)) = (\delta(x, st), \lambda(x, st)) = f_{st}(x).$$

Это означает, что соответствие $s \mapsto f_s$ $(s \in S)$ является гомоморфизмом полугруппы S в симметрическую полугруппу вектор-функций $S(X,Y)$. В частности, это соответствие является мономорфизмом полугруппы S в симметрическую полугруппу $S(X,Y)$, если $\mathbf{A} = (X,Y,S,\delta,\lambda)$ является автоматом без равнодействующих входных сигналов, т. е. для любых $s,\ t \in S,\ s \neq t$, выполняется условие $f_s \neq f_t$. В этом случае действие входного сигнала $s \in S$ полностью определяется действием пары отображений δ_s, λ_s и можно отождествить входной сигнал s с вектор-функцией $f_s = (\delta_s, \lambda_s)$.

По определению [2] планарные автоматы являются структуризованными автоматами $\mathbf{A} = (X_1, X_2, S, \delta, \lambda)$ с множеством состояний X_1 и множеством выходных сигналов X_2, наделенными структурами плоскостей $\Pi_1 = (X_1, L_1)$ и $\Pi_2 = (X_2, L_2)$, полугруппой входных сигналов S, функцией переходов $\delta : X_1 \times S \to X_1$ и выходной функцией $\lambda : X_1 \times S \to X_2$, для которых при каждом фиксированном $s \in S$ отображение δ_s является эндоморфизмом плоскости Π_1, и отображение λ_s является гомоморфизмом плоскости Π_1 в плоскость Π_2. Такие автоматы обозначаются символом $\mathbf{A} = (\Pi_1, \Pi_2, S, \delta, \lambda)$.

Главное внимание в наших исследованиях уделяется так называемым универсальным планарным автоматам [2], подавтоматы которых охватывают все гомоморфные образы рассматриваемых планарных автоматов. Такой универсальный автомат определяется для произвольных плоскостей Π_1, Π_2 как автомат $\mathrm{Atm}(\Pi_1, \Pi_2) = (\Pi_1, \Pi_2, S, \delta, \lambda)$ с полугруппой входных сигналов $S = S(\Pi_1, \Pi_2)$, функцией переходов $\delta(x,s) = \varphi(x)$ и выходной функцией $\lambda(x,s) = \psi(x)$ (где $x \in X_1$, $s = (\varphi, \psi) \in S(\Pi_1, \Pi_2)$).

В таком контексте алгебраическая теория универсальных планарных автоматов имеет непосредственное отношение к одному из основных разделов современной алгебры – обобщенной теории Галуа, которая посвящается изучению математических объектов путем исследования некоторых производных алгебр отношений, специальным образом связанных с исходными объектами. В нашем случае изучаемым математическим объектом является универсальный планарный автомат $\mathrm{Atm}(\Pi_1, \Pi_2)$, а производной алгеброй отношений — его полугруппа входных сигналов $S(\Pi_1, \Pi_2)$.

Ввиду проблемы С. Улама [3] об определимости математических структур их эндоморфизмами и результатов Б. Йонсона [4] о конкретной и абстрактной характеризации алгебр отношений представляет интерес исследование таких проблем для универсальных планарных автоматов и их полугрупп входных сигналов. Основной результат работы [5] показывает, что универсальные планарные автоматы полностью определяются (с точностью до изоморфизма) своими полугруппами входных сигналов. Решение проблемы конкретной характеризации таких автоматов получено в работе [6]. В настоящей работе приводится решение проблемы абстрактной характеризации универсальных планарных автоматов и их полугрупп входных сигналов.

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Проблема абстрактной характеризации универсальных планарных автоматов формулируется следующим образом: при каких условиях произвольный автомат $\mathbf{A}$ будет изоморфен универсальному планарному автомату $\mathrm{Atm}(\Pi_1, \Pi_2)$ для некоторых плоскостей Π_1, Π_2.

Проблема абстрактной характеризации полугрупп входных сигналов универсальных планарных автоматов формулируется следующим образом: при каких условиях произвольная полугруппа S будет изоморфна полугруппе входных сигналов универсального планарного автомата $\mathrm{Atm}(\Pi_1, \Pi_2)$ для некоторых плоскостей Π_1, Π_2. Для исследования этих проблем напомним основные понятия и результаты из работы [6]. Пусть $\Pi = (X, L)$ — произвольная плоскость. Отношением коллинеарности плоскости Π называется тернарное отношение $C(\Pi)$ на множестве X, которое определяется по формуле

$$C(\Pi) = \{(x_1, x_2, x_3) \in X^3 \ : \ x_1, x_2, x_3 \ \text{— коллинеарные точки плоскости } \Pi\}.$$

В работе [6] доказано, что такое отношение $C = C(\Pi)$ удовлетворяет следующим условиям:

(T_1) $(x, x, y) \in C$ для любых $x,\ y \in X$;

(T_2) из $(x_1, x_2, x_3) \in C$ следует $(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}) \in C$ для любых $1 \leq i_1,\ i_2,\ i_3 \leq 3$;

(T_3) для любых различных элементов $x_1,\ x_2 \in X$ из $(x, x_1, x_2) \in C$, $(x_1, x_2, y) \in C$ следует $(x, x_1, y) \in C$;

(T_4) для любых $x_1, x_2 \in X$ найдется такой элемент $x \in X$, что $x \neq x_1$, $x \neq x_2$ и $(x_1, x_2, x) \in C$;

(T_5) $C \neq X^3$.

Тернарное отношение $C \subset X^3$, удовлетворяющее условиям (T_1)–(T_3), называется 3-эквивалентностью на множестве X [6]. При этом 3-эквивалентность называется квазиполной (соответственно нетривиальной), если она удовлетворяет условию (T_4) (соответственно условию (T_5)).

Пусть R — некоторое тернарное отношение на множестве X. Подмножество $Y \subset X$ называется R-ограниченным [6], если $Y^3 \subset R$. Легко видеть, что любое R-ограниченное множество содержится в максимальном (относительно теоретико-множественного включения) R-ограниченном множестве.

Лемма 1 (см. [6]). *Пусть X — непустое множество, R — нетривиальная квазиполная 3-эквивалентность на множестве X и L — множество всех максимальных R-ограниченных множеств. Тогда алгебраическая система $\Pi = (X, L)$ является плоскостью с отношением коллинеарности $C(\Pi) = R$.*

Для автомата $\mathbf{A} = (X_1, X_2, S, \delta, \lambda)$ канонические тернарные отношения R_1, R_2 на множествах X_1, X_2 определяются по следующему правилу [6]: упорядоченная тройка (a_1, a_2, a_3) элементов множества X_1 (соответственно X_2) в том и только том случае принадлежит отношению R_1 (соответственно R_2), если для любых различных элементов x_1, x_2, $x_3 \in X_1$ найдется такой элемент $s \in S$, что для каждого $i = \overline{1,3}$ выполняется равенство $\delta_s(x_i) = a_i$ (соответственно $\lambda_s(x_i) = a_i$).

Лемма 2 (см. [6]). *Для любых плоскостей $\Pi_1 = (X_1, L_1)$, $\Pi_2 = (X_2, L_2)$ канонические тернарные отношения R_1, R_2 универсального планарного автомата $\mathrm{Atm}(\Pi_1, \Pi_2)$ удовлетворяют следующим условиям:*

1) *$R_1 = C(\Pi_1)$, $R_2 = C(\Pi_2)$;*
2) *отображение $\varphi : X_1 \to X_1$ в том и только том случае будет эндоморфизмом плоскости Π_1, если выполняется $\varphi^3(R_1) \subset (R_1)$;*
3) *отображение $\psi : X_1 \to X_2$ в том и только том случае будет гомоморфизмом плоскости Π_1 в плоскость Π_2, если выполняется $\psi^3(R_1) \subset (R_2)$.*

Теорема 1 (см. [6]). *Пусть $\mathbf{A} = (X_1, X_2, S, \delta, \lambda)$ – автомат без равнодействующих входных сигналов. Тогда $\mathbf{A}$ в том и только том случае будет универсальным планарным автоматом $\mathrm{Atm}(\Pi_1, \Pi_2)$ для некоторых плоскостей $\Pi_1 = (X_1, L_1)$ и $\Pi_2 = (X_2, L_2)$, если канонические отношения R_1, R_2 этого автомата являются нетривиальными квазиполными 3-эквивалентностями соответственно на множествах X_1, X_2 и выполняется следующее условие:*

(T_6) *если для отображений $f_1 : X_1 \to X_1$, $f_2 : X_1 \to X_2$ при любых значениях $x_1, x_2, x_3 \in X_1$, удовлетворяющих условию $(x_1, x_2, x_3) \in R_1$, существуют такие $s, t \in S$, что $f_1(x_i) = \delta_s(x_i)$ и $f_2(x_i) = \lambda_t(x_i)$ для всех $i = \overline{1,3}$, то найдется такой элемент $a \in S$, что $f_1(x) = \delta_a(x)$ и $f_2(x) = \lambda_a(x)$ для всех $x \in X_1$.*

Как известно [7], автомат $\mathbf{A} = (X_1, X_2, S, \delta, \lambda)$ с алгебраической точки зрения представляет собой трехсортную алгебру с тремя базисными множествами X_1, X_2, S и с удовлетворяющими условиям (1) тремя бинарными операциями: полугрупповая операция умножения входных сигналов $\cdot : S \times S \to S$, функция переходов $\delta : X_1 \times S \to X_1$ и выходная функция $\lambda : X_1 \times S \to X_2$. Изоморфизмом таких алгебраических систем $\mathbf{A} = (X_1, X_2, S, \delta, \lambda)$, $\mathbf{A}' = (X_1', X_2', S', \delta', \lambda')$ является упорядоченная тройка $\gamma = (f, g, \pi)$ биекций $f : X_1 \to X_1'$, $g : X_2 \to X_2'$, и $\pi : S \to S'$, сохраняющих операции этих систем, т. е. для любых $x \in X_1$, a, $b \in S$ выполняются условия $f(\delta(x, a)) = \delta'(f(x), \pi(a))$, $g(\lambda(x, a)) = \lambda'(f(x), \pi(a))$, $\pi(ab) = \pi(a)\pi(b)$. Согласно [7] для описания свойств автомата $\mathbf{A} = (X_1, X_2, S, \delta, \lambda)$ используется язык узкого исчисления предикатов (УИП) $\mathbf{L}_\mathbf{A}$ сигнатуры теории автоматов $\Omega = \{\cdot, \delta, \lambda\}$, которая состоит из символа «$\cdot$» бинарной операции полугруппы S и символов δ, λ бинарных операций функции переходов и выходной функции автомата $\mathbf{A}$. Алфавит такого языка состоит:

1) из счетного множества индивидуальных переменных первого сорта $x^{(1)}, y^{(1)}, \ldots$ для обозначения состояний автомата;

2) счетного множества индивидуальных переменных второго сорта $x^{(2)}$, $y^{(2)}, \ldots$ для обозначения выходных сигналов автомата;

3) счетного множества индивидуальных переменных третьего сорта $x^{(3)}$, $y^{(3)}, \ldots$ для обозначения входных сигналов автомата;

4) двухместного функционального символа $\cdot$ для обозначения операции умножения полугруппы входных сигналов автомата;

5) двухместных функциональных символов δ и λ для обозначения функции переходов и выходной функции автомата;

6) конечного множества логических и технических символов, таких как $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\forall$, $\exists$, $=$, (,).

Для языка $\mathbf{L_A}$ термы трех сортов получаются обычным комбинированием символа «$\cdot$» с двумя термами третьего сорта и символов δ, λ с термами первого и третьего сорта, т. е. это выражения вида $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$, $t^{(3)} \cdot t_1^{(3)}$, $\delta(t^{(1)}, t^{(3)})$, $\lambda(t^{(1)}, t^{(3)})$, где $x^{(1)}$ и $t^{(1)}$ — переменная и терм первого сорта, $x^{(2)}$ — переменная второго сорта, $x^{(3)}$ и $t^{(3)}$, $t_1^{(3)}$ — переменная и термы третьего сорта. При этом получаются термы $\delta(t^{(1)}, t^{(3)})$, $\lambda(t^{(1)}, t^{(3)})$ и $t^{(3)} \cdot t_1^{(3)}$ первого, второго и третьего сортов соответственно.

Атомарными формулами языка $\mathbf{L_A}$ являются выражения вида $t = t'$, где t, t' — термы одного и того же сорта. Формулы языка $\mathbf{L_A}$ определяются по индукции обычным образом (см., например, [8]).

Рассмотрим следующие формулы языка $\mathbf{L_A}$:

$$\Phi_1(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}) = (\forall\ y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, y_3^{(1)}) \left(\bigwedge_{i,j=1, i\neq j}^{3} y_i^{(1)} \neq y_j^{(1)} \Rightarrow (\exists\ z^{(3)}) \left(\bigwedge_{i=1}^{3} \delta(y_i^{(1)}, z^{(3)}) = x_i^{(1)} \right) \right),$$

$$\Phi_2(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}) = (\forall\ y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, y_3^{(1)}) \left(\bigwedge_{i,j=1, i\neq j}^{3} y_i^{(1)} \neq y_j^{(1)} \Rightarrow (\exists\ z^{(3)}) \left(\bigwedge_{i=1}^{3} \lambda(y_i^{(1)}, z^{(3)}) = x_i^{(2)} \right) \right).$$

Лемма 3. *Пусть* $\mathbf{A} = \mathrm{Atm}(\Pi_1, \Pi_2)$ — *универсальный планарный автомат для некоторых плоскостей* $\Pi_1 = (X_1, L_1)$, $\Pi_2 = (X_2, L_2)$. *Тогда для любого* $i = 1, 2$ *формула* Φ_i *определяет на множестве* X_i *отношение коллинеарности* $C(\Pi_i)$ *соответствующей плоскости* Π_i, *т. е. точки* a, b, $c \in X_i$, *в том и только том случае коллинеарны в плоскости* Π_i, *если для автомата* $\mathbf{A}$ *выполняется условие* $\Phi_i(a, b, c)$.

Доказательство. Если точки a, b, $c \in X_1$ коллинеарны в плоскости Π_1, то любое отображение $\varphi : X_1 \to \{a, b, c\}$ является эндоморфизмом плоскости Π_1. Тогда для любых различных элементов y_1, y_2, $y_3 \in X_1$ эндоморфизмом плоскости Π_1 будет отображение $\varphi : X_1 \to X_1$, определенное по формуле: $\varphi(y_1) = a$, $\varphi(y_2) = b$ и $\varphi(x) = c$ для остальных значений $x \in X_1$. Следовательно, для любого $\psi \in \mathrm{Hom}(\Pi_1, \Pi_2)$ элемент $s = (\varphi, \psi)$ является входным сигналом автомата $\mathrm{Atm}(\Pi_1, \Pi_2)$, и по определению выполняются равенства: $\delta(y_1, s) = \varphi(y_1) = a$, $\delta(y_2, s) = \varphi(y_2) = b$, $\delta(y_3, s) = \varphi(y_3) = c$. Это означает, что выполняется условие $\Phi_1(a, b, c)$. С другой стороны, из условия $\Phi_1(a, b, c)$ следует, что для любых различных элементов y_1, y_2, $y_3 \in X_1$ найдется такой входной сигнал $s = (\varphi, \psi)$ автомата $\mathrm{Atm}(\Pi_1, \Pi_2)$, что $\delta(y_1, s) = \varphi(y_1) = a$, $\delta(y_2, s) = \varphi(y_2) = b$, $\delta(y_3, s) = \varphi(y_3) = c$. Так как по аксиоме (A_3) в плоскости Π_1 можно выбрать три коллинеарные точки y_1, y_2, $y_3 \in X_1$ и φ является эндоморфизмом этой плоскости, то точки a, b, c также коллинеарны в плоскости Π_1. Аналогично доказывается, что коллинеарность точек $a, b, c \in X_2$ в плоскости Π_2 равносильна выполнимости условия $\Phi_2(a, b, c)$. □

Таким образом, свойства (T_1)–(T_5) канонических отношений R_1, R_2 можно выразить следующими формулами языка $\mathbf{L_A}$:

(θ_1) $(\forall\ x^{(i)}, y^{(i)}) \Phi_i(x^{(i)}, x^{(i)}, y^{(i)})$ (здесь и далее $i = 1, 2$);

(θ_2) $(\forall\ x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)})(\Phi_i(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)}) \Rightarrow \bigwedge_{t\in T} \Phi_i(x_{t(1)}^{(i)}, x_{t(2)}^{(i)}, x_{t(3)}^{(i)}))$, где T — множество всех преобразований множества $\{1, 2, 3\}$;

(θ_3) $(\forall\ x^{(i)}, y^{(i)}, x_1^{(i)} \neq x_2^{(i)})(\Phi_i(x^{(i)}, x_1^{(i)}, x_2^{(i)}) \wedge \Phi_i(x_2^{(i)}, x_1^{(i)}, y^{(i)}) \Rightarrow \Phi_i(x^{(i)}, x_1^{(i)}, y^{(i)}))$;

(θ_4) $(\forall\ x_1^{(i)}, x_2^{(i)})(\exists\ x^{(i)})(x^{(i)} \neq x_1^{(i)} \wedge x^{(i)} \neq x_2^{(i)} \wedge \Phi_i(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x^{(i)}))$;

(θ_5) $(\exists\ x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)}) \neg\Phi_i(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)})$.

Свойство (T_6) канонических отношений R_1, R_2 также можно выразить с помощью формул языка $\mathbf{L_A}$ следующими образом:

(θ_6) для любых отображений $f_i : X_1 \to X_i$ выполняется

$$(\forall\ x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)})(\Phi_1(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}) \Rightarrow \bigwedge_{i=1}^{2} \Phi_i(f_i(x_1^{(1)}), f_i(x_2^{(1)}), f_i(x_3^{(1)}))) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\exists!\ z^{(3)})(\forall x^{(1)})(\delta(x^{(1)}, z^{(3)}) = f_1(x^{(1)}) \wedge \lambda(x^{(1)}, z^{(3)}) = f_2(x^{(1)})).$$

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1 дает возможность получить следующую абстрактную характеризацию универсальных планарных автоматов с помощью языка УИП сигнатуры теории автоматов.

Теорема 2. *Автомат* $\mathbf{A} = (X_1, X_2, S, \delta, \lambda)$ *в том и только том случае будет изоморфен универсальному планарному автомату* $\mathrm{Atm}(\Pi_1, \Pi_2)$ *для некоторых плоскостей* Π_1, Π_2, *если этот автомат* $\mathbf{A}$ *удовлетворяет условиям* (θ_1)–(θ_6).

Доказательство. Рассмотрим универсальный планарный автомат $\mathbf{A} = \mathrm{Atm}(\Pi_1, \Pi_2) = (\Pi_1, \Pi_2, S, \delta, \lambda)$ для некоторых плоскостей $\Pi_1 = (X_1, L_1)$, $\Pi_2 = (X_2, L_2)$. Из лемм 2, 3 следует, что канонические отношения R_1 и R_2 такого автомата $\mathbf{A}$ определяются формулами Φ_1 и Φ_2 соответственно. По теореме 1 эти отношения R_1, R_2 удовлетворяют условиям (T_1)–(T_5), которые на языке $\mathbf{L_A}$ выражаются формулами (θ_1)–(θ_5). Предположим, что для некоторых отображений $f_1 : X_1 \to X_1$, $f_2 : X_1 \to X_2$ выполняется посылка импликации (θ_6), т. е. формула

$$(\forall\, x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)})(\Phi_1(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}) \Rightarrow \bigwedge_{i=1}^{2} \Phi_i(f_i(x_1^{(1)}), f_i(x_2^{(1)}), f_i(x_3^{(1)}))).$$

В силу вышеизложенного это означает, что $f_1^3(R_1) \subset R_1$, $f_2^3(R_1) \subset R_2$, и по лемме 2 $f_1 \in \mathrm{End}(\Pi_1)$, $f_2 \in \mathrm{Hom}(\Pi_1, \Pi_2)$. Тогда элемент $s = (f_1, f_2)$ является входным сигналом автомата $\mathbf{A}$, для которого при любых $x \in X_1$ выполняются равенства $\delta(x, s) = f_1(x)$, $\lambda(x, s) = f_2(x)$. Это означает, что для автомата $\mathbf{A}$ выполняется формула (θ_6).

Обратно, пусть автомат $\mathbf{A} = (X_1, X_2, S, \delta, \lambda)$ удовлетворяет условиям (θ_1)–(θ_6). Из свойства (θ_6) следует что $\mathbf{A}$ является автоматом без равнодействующих входных сигналов и, значит, биекция $\pi : s \mapsto (\delta_s, \lambda_s)$ (где $s \in S$) определяет изоморфизм автомата $\mathbf{A}$ и автомата $\mathbf{A}' = (X_1, X_2, S', \delta', \lambda')$ с полугруппой входных сигналов вектор-функций $S' = \{(\delta_s, \lambda_s) : s \in S\}$, функцией переходов $\delta'(x, (\delta_s, \lambda_s)) = \delta_s(x)$ и выходной функцией $\lambda'(x, (\delta_s, \lambda_s)) = \lambda_s(x)$ (где $x \in X, s \in S$). Тогда автомат $\mathbf{A}'$ удовлетворяет условиям (θ_1)–(θ_6) и, значит, канонические отношения R_1, R_2 этого автомата $\mathbf{A}'$ удовлетворяют условиям (T_1)–(T_5). Следовательно, по теореме 1 автомат $\mathbf{A}'$ является универсальным планарным автоматом $\mathrm{Atm}(\Pi_1, \Pi_2)$ для некоторых плоскостей $\Pi_1 = (X_1, L_1)$ и $\Pi_2 = (X_2, L_2)$. Таким образом, автомат $\mathbf{A}$ изоморфен универсальному планарному автомату $\mathrm{Atm}(\Pi_1, \Pi_2)$. □

Напомним [9], что входной сигнал $a \in S$ автомата $\mathbf{A} = (X_1, Y_1, S, \delta, \lambda)$ называется автономным, если его действие не зависит от состояний этого автомата, т. е. найдутся такое состояние автомата, обозначаемое a_1, и такой выходной сигнал автомата, обозначаемый a_2, что $\delta(x, a) = a_1$, $\lambda(x, a) = a_2$ для всех состояний автомата $x \in X_1$. Основной результат работы [9] показывает, что любой универсальный планарный автомат $\mathbf{A} = \mathrm{Atm}(\Pi_1, \Pi_2)$ изоморфен многосортной алгебраической системе, канонически построенной из автономных входных сигналов исходного автомата с помощью следующих канонических отношений:

1) множество C всех автономных входных сигналов автомата $\mathbf{A}$;

2) бинарное отношение ε_1, которое состоит из таких упорядоченных пар (a, b) автономных входных сигналов, при действии которых автомат $\mathbf{A}$ переходит в одинаковые состояния, т. е. $\delta(x, a) = \delta(x, b)$ для всех $x \in X_1$;

3) бинарное отношение ε_2, которое состоит из таких упорядоченных пар (a, b) автономных входных сигналов, при действии которых автоматом $\mathbf{A}$ выдаются одинаковые выходные сигналы, т. е. $\lambda(x, a) = \lambda(x, b)$ для всех $x \in X_1$;

4) бинарное отношение η, которое состоит из таких упорядоченных пар (α, β) элементов $\alpha = (a, b)$ и $\beta = (c, d)$ с автономными входными сигналами a, b, c, $d \in C$, при действии которых любые состояния автомата $\mathbf{A}$ отображаются в коллинеарные точки a_i, b_i, c_i, d_i соответствующих плоскостей Π_i $(i = 1, 2)$.

Покажем, что такие канонические отношения универсального планарного автомата определяются формулами элементарной теории полугрупп. Рассмотрим произвольные плоскости $\Pi_1 = (X_1, L_1)$, $\Pi_2 = (X_2, L_2)$ и полугруппу $S = S(\Pi_1, \Pi_2)$. Обозначим через Z_S множество всех правых нулей полугруппы S, а через U_S — множество всех левых единиц этой полугруппы S. Эти множества в полугруппе S определяются соответственно формулами теории полугрупп $RZ(x) = (\forall\, y)(yx = x)$ и $LI(x) = (\forall\, y)(xy = y)$. В работе [5] получен следующий результат.

Лемма 4 (см. [5]). *Для любых плоскостей* Π_1, Π_2 *и полугруппы* $S = S(\Pi_1, \Pi_2)$ *справедливы следующие утверждения:*

1) *элемент* $a \in S$ *в том и только том случае будет правым нулем полугруппы* S, *если найдутся такие элементы* $a_1 \in X_1$, $a_2 \in X_2$, *что* $a = (c_{a_1}, c_{a_2})$ *для постоянных отображений* $c_{a_1} : X_1 \to \{a_1\}$, $c_{a_2} : X_1 \to \{a_2\}$;

2) *элемент* $s \in S$ *в том и только том случае будет левой единицей полугруппы* S, *если* $s = (\Delta_{X_1}, \psi)$ *для тождественного пробразования* Δ_{X_1} *множества* X_1 *и некоторого элемента* $\psi \in \mathrm{Hom}(\Pi_1, \Pi_2)$;
3) *элементы* a, $b \in S$ *в том и только том случае удовлетворяют условию*

$$E_1(a,b) = RZ(a) \wedge RZ(b) \wedge (\forall\ x)(LI(x) \Rightarrow ax = bx),$$

если найдутся такие элементы a_1, $b_1 \in X_1$, a_2, $b_2 \in X_2$, *что* $a = (c_{a_1}, c_{a_2})$, $b = (c_{b_1}, c_{b_2})$ *и* $a_1 = b_1$.

Рассмотрим следующие формулы элементарной теории полугрупп:

$$\Psi(x_1,x_2,x_3) = \bigwedge_{i=1}^{3} RZ(x_i) \wedge (\forall\ y_1,y_2,y_3) \left(\bigwedge_{i=1}^{3} RZ(y_i) \wedge \bigwedge_{i,j=1, i\neq j}^{3} \neg E_1(y_i,y_j) \Rightarrow (\exists\ z) \left(\bigwedge_{i=1}^{3} y_i z = x_i \right) \right),$$

$$E_2(x,y) = RZ(x) \wedge RZ(y) \wedge (\forall\ z)(LI(z) \Rightarrow \Psi(x,y,xz)),$$

$$\Psi_i(x_1,x_2,x_3) = \bigwedge_{j=1}^{3} RZ(x_j) \wedge (\forall\ y_1,y_2,y_3) \left(\bigwedge_{j=1}^{3} RZ(y_j) \wedge \bigwedge_{j,k=1, i\neq j}^{3} \neg E_1(y_j,y_k) \Rightarrow \right.$$

$$\left. \Rightarrow (\exists\ z) \left(\bigwedge_{j=1}^{3} E_i(y_j z, x_j) \right) \right), \qquad i = 1,2.$$

Лемма 5. *Для любых плоскостей* $\Pi_1 = (X_1, L_1)$, $\Pi_2 = (X_2, L_2)$ *и полугруппы* $S = S(\Pi_1, \Pi_2)$ *справедливы следующие утверждения:*

1) *элементы* a, b, $d \in S$ *в том и только том случае удовлетворяют условию* $\Psi(a,b,d)$, *если найдутся такие коллинеарные точки* a_1, b_1, $d_1 \in X_1$ *плоскости* Π_1 *и коллинеарные точки* a_2, b_2, $d_2 \in X_2$ *плоскости* Π_2, *что* $a = (c_{a_1}, c_{a_2})$, $b = (c_{b_1}, c_{b_2})$ *и* $d = (c_{d_1}, c_{d_2})$;
2) *элементы* $a, b \in S$ *в том и только том случае удовлетворяют условию* $E_2(a,b)$, *если найдутся такие элементы* a_1, $b_1 \in X_1$ *и* a_2, $b_2 \in X_2$, *что* $a = (c_{a_1}, c_{a_2})$, $b = (c_{b_1}, c_{b_2})$ *и* $a_2 = b_2$.
3) *элементы* $a, b, d \in S$ *в том и только том случае удовлетворяют условию* $\Psi_1(a,b,d)$ *(соответственно* $\Psi_2(a,b,d)$*), если найдутся такие коллинеарные точки* a_1, b_1, $d_1 \in X_1$ *плоскости* Π_1 *и некоторые точки* a_2, b_2, $d_2 \in X_2$ *плоскости* Π_2 *(соответственно коллинеарные точки* a_2, b_2, $d_2 \in X_2$ *плоскости* Π_2 *и некоторые точки* a_1, b_1, $d_1 \in X_1$ *плоскости* Π_1*), что* $a = (c_{a_1}, c_{a_2})$, $b = (c_{b_1}, c_{b_2})$ *и* $d = (c_{d_1}, c_{d_2})$.

Доказательство. Пусть элементы a, b, d полугруппы S удовлетворяют условию $\Psi(a,b,d)$. Тогда $RZ(a)$, $RZ(b)$, $RZ(d)$, т. е. a, b, $d \in Z_S$, и в силу леммы 4 $a = (c_{a_1}, c_{a_2})$, $b = (c_{b_1}, c_{b_2})$, $d = (c_{d_1}, c_{d_2})$ для некоторых элементов a_1, b_1, $d_1 \in X_1$ и a_2, b_2, $d_2 \in X_2$. Кроме того, для любых элементов x, y, z полугруппы S, удовлетворяющих условиям $RZ(x)$, $RZ(y)$, $RZ(z)$, $\neg E_1(x,y)$, $\neg E_1(x,z)$ и $\neg E_1(y,z)$, найдется такой элемент $s \in S$, что $xs = a$, $ys = b$ и $zs = d$. Тогда в силу леммы 4 $x = (c_{x_1}, c_{x_2})$, $y = (c_{y_1}, c_{y_2})$, $z = (c_{z_1}, c_{z_2})$ для некоторых различных элементов $x_1, y_1, z_1 \in X_1$ и некоторых элементов $x_2, y_2, z_2 \in X_2$. Кроме того, по определению $s = (\varphi_1, \varphi_2)$ для некоторых $\varphi_1 \in \mathrm{End}(\Pi_1)$, $\varphi_2 \in \mathrm{Hom}(\Pi_1, \Pi_2)$. Тогда $xs = (c_{x_1}, c_{x_2}) \cdot (\varphi_1, \varphi_2) = (c_{x_1}\varphi_1, c_{x_1}\varphi_2) = (c_{\varphi_1(x_1)}, c_{\varphi_2(x_1)})$ и равенство $xs = a$ равносильно условию $(c_{\varphi_1(x_1)}, c_{\varphi_2(x_1)}) = (c_{a_1}, c_{a_2})$, или $\varphi_1(x_1) = a_1$, $\varphi_2(x_1) = a_2$. Аналогично, равенства $ys = b$ и $zs = d$ равносильны условиям $\varphi_1(y_1) = b_1$, $\varphi_2(y_1) = b_2$ и $\varphi_1(z_1) = d_1$, $\varphi_2(z_1) = d_2$. В силу произвольности элементов x, y, $z \in S$ их можно выбрать так, что x_1, y_1, z_1 — три коллинеарные точки плоскости Π_1, которые существуют по аксиоме (A_1), и x_2, y_2, z_2 — произвольные точки плоскости Π_2. Такие элементы x, y, z удовлетворяют условиям $RZ(x)$, $RZ(y)$, $RZ(z)$, $\neg E_1(x,y)$, $\neg E_1(x,z)$, $\neg E_1(y,z)$, и, значит, найдется такой элемент $s = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathrm{End}(\Pi_1) \times \mathrm{Hom}(\Pi_1, \Pi_2)$, что $\varphi_i(x_1) = a_i, \varphi_i(y_1) = b_i, \varphi_i(z_1) = d_i$. Следовательно, по определению гомоморфизма плоскостей точки a_i, b_i, d_i коллинеарны в плоскости Π_i (здесь $i = 1,2$).

В то же время, если для элементов a, b, $d \in Z_S$ точки a_i, b_i, d_i коллинеарны в плоскости Π_i, то любые отображения $\varphi_i : X_1 \to \{a_i, b_i, d_i\}$ являются гомоморфизмами плоскости Π_1 в плоскость Π_i (здесь $i = 1,2$). Тогда для любых элементов x, y, z полугруппы S, удовлетворяющих условиям $RZ(x)$, $RZ(y)$, $RZ(z)$, $\neg E_1(x,y)$, $\neg E_1(x,z)$ и $\neg E_1(y,z)$ определим отображения $\varphi_i : X_1 \to X_i$ по формуле: $\varphi_i(x_1) = a_i$, $\varphi_i(y_1) = b_i$ и $\varphi_i(u) = d_i$ для остальных значений $u \in X_1$. Так как для каждого $i = 1, 2$ отображение φ_i является гомоморфизмом плоскости Π_1 в плоскость Π_i, то элемент $s = (\varphi_1, \varphi_2)$ принадлежит полугруппе S и выполняются условия: $xs = (c_{\varphi_1(x_1)}, c_{\varphi_2(x_1)}) = (c_{a_1}, c_{a_2}) = a$, $ys = (c_{\varphi_1(y_1)}, c_{\varphi_2(y_1)}) = (c_{b_1}, c_{b_2}) = b$, $zs = (c_{\varphi_1(z_1)}, c_{\varphi_2(z_1)}) = (c_{d_1}, c_{d_2}) = d$. Это означает, что выполняется условие $\Psi(a, b, d)$ и справедливо утверждение 1) леммы.

Пусть элементы a, b полугруппы S удовлетворяют условию $E_2(a, b)$. Тогда $RZ(a)$, $RZ(b)$, т. е. $a, b \in Z_S$ и в силу леммы 4 $a = (c_{a_1}, c_{a_2})$, $b = (c_{b_1}, c_{b_2})$ для некоторых элементов a_1, $b_1 \in X_1$ и a_2, $b_2 \in X_2$. Кроме того, для любого элемента $z \in S$, удовлетворяющего $LI(z)$, выполняется условие $\Psi(a, b, az)$. Тогда по лемме 4 $z = (\Delta_{X_1}, \psi)$ для некоторого $\psi \in \mathrm{Hom}(\Pi_1, \Pi_2)$ и по определению произведения вектор-функций $az = (c_{a_1}, c_{a_2})\cdot(\Delta_{X_1}, \psi) = (c_{a_1}, c_{a_1}\psi) = (c_{a_1}, c_{\psi(a_1)})$. Так как для любого $d \in X_2$ по аксиоме (A_1) отображение $c_d \in \mathrm{Hom}(\Pi_1, \Pi_2)$, то при выборе $\psi = c_d$ получаем равенство $az = (c_{a_1}, c_d)$ и из условия $R(a, b, az)$ в силу уже доказанного свойства 1) следует, что точки a_2, b_2, d коллинеарны в плоскости Π_2. В силу произвольности выбора элемента $d \in X_2$ из аксиомы (A_3) следует, что точки a_2, b_2 не могут быть различными, т. е. выполняется равенство $a_2 = b_2$. В то же время, если элементы a, $b \in Z_S$ удовлетворяют условию $a_2 = b_2$, то для любого $d \in X_2$ по аксиоме (A_1) точки a_2, b_2, d коллинеарны в плоскости Π_2 и любое отображение ψ множества X_1 в множество $\{a_2, b_2, d\}$ является гомоморфизмом плоскости Π_1 в плоскость Π_2. Тогда для любого элемента $z = (\Delta_{X_1}, \psi)$ с компонентой $\psi \in \mathrm{Hom}(\Pi_1, \Pi_2)$ выполняется условие $\Psi(a, b, az)$, так как $az = (c_{a_1}, c_{\psi(a_1)})$, точки a_1, b_1 коллинеарны в плоскости Π_1 и точки $a_2, b_2, \psi(a_1)$ коллинеарны в плоскости Π_2. Это означает, что выполняется условие $E_2(a, b)$ и справедливо утверждение 2) леммы.

Если элементы a, b, d полугруппы S удовлетворяют условию $\Psi_1(a, b, d)$, то $RZ(a)$, $RZ(b)$, $RZ(d)$ и в силу леммы 4 $a = (c_{a_1}, c_{a_2})$, $b = (c_{b_1}, c_{b_2})$, $d = (c_{d_1}, c_{d_2})$ для некоторых элементов $a_1, b_1, d_1 \in X_1$ и a_2, b_2, $d_2 \in X_2$. Кроме того, для любых элементов x, y, z полугруппы S, удовлетворяющих условиям $RZ(x)$, $RZ(y)$, $RZ(z)$, $\neg E_1(x, y)$, $\neg E_1(x, z)$ и $\neg E_1(y, z)$, найдется такой элемент $s \in S$, что $E_1(xs, a), E_1(ys, b)$ и $E_1(zs, d)$. Тогда в силу леммы 4 $x = (c_{x_1}, c_{x_2})$, $y = (c_{y_1}, c_{y_2})$, $z = (c_{z_1}, c_{z_2})$ для некоторых различных элементов x_1, y_1, $z_1 \in X_1$ и некоторых элементов x_2, y_2, $z_2 \in X_2$. Кроме того, по определению $s = (\varphi_1, \varphi_2)$ для некоторых $(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathrm{End}(\Pi_1) \times \mathrm{Hom}(\Pi_1, \Pi_2)$. Значит $xs = (c_{x_1}, c_{x_2}) \cdot (\varphi_1, \varphi_2) = (c_{x_1}\varphi_1, c_{x_1}\varphi_2) = (c_{\varphi_1(x_1)}, c_{\varphi_2(x_1)})$ и условие $E_1(xs, a)$ по лемме 4 равносильно тому, что для элементов $xs = (c_{\varphi_1(x_1)}, c_{\varphi_2(x_1)})$ и $a = (c_{a_1}, c_{a_2})$ выполняется равенство $\varphi_1(x_1) = a_1$. Аналогично, условия $E_1(ys, b)$ и $E_1(zs, d)$ равносильны тому, что выполняются равенства $\varphi_1(y_1) = b_1$ и $\varphi_1(z_1) = d_1$. В силу произвольности элементов x, y, $z \in S$ их можно выбрать так, что x_1, y_1, z_1 — три коллинеарные точки плоскости Π_1, которые существуют по аксиоме (A_2), и x_2, y_2, z_2 — произвольные точки плоскости Π_2. Такие элементы x, y, z удовлетворяют условиям $RZ(x)$, $RZ(y)$, $RZ(z)$, $\neg E_1(x, y)$, $\neg E_1(x, z)$, $\neg E_1(y, z)$, и, значит, найдется такой элемент $s = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathrm{End}(\Pi_1) \times \mathrm{Hom}(\Pi_1, \Pi_2)$, что $\varphi_1(x_1) = a_1, \varphi_1(y_1) = b_1, \varphi_1(z_1) = d_1$. Следовательно, по определению гомоморфизма плоскостей точки a_1, b_1, d_1 коллинеарны в плоскости Π_1. С другой стороны, если для элементов $a, b, d \in Z_S$ точки a_1, b_1, d_1 коллинеарны в плоскости Π_1, то все отображения $\varphi_1 : X_1 \to \{a_1, b_1, d_1\}$ являются эндоморфизмами плоскости Π_1. Тогда для любых элементов x, y, z полугруппы S, удовлетворяющих условиям $RZ(x)$, $RZ(y)$, $RZ(z)$, $\neg E_1(x, y)$, $\neg E_1(x, z)$ и $\neg E_1(y, z)$ определим отображение $\varphi_1 : X_1 \to X_1$ по формуле: $\varphi_1(x_1) = a_1$, $\varphi_1(y_1) = b_1$ и $\varphi_1(u) = d_1$ для остальных значений $u \in X_1$. Кроме того, для любого $v \in X_2$ отображение $\varphi_2 : X_1 \to \{v\}$ является гомоморфизмом плоскости Π_1 в плоскость Π_2. Значит, элемент $s = (\varphi_1, \varphi_2)$ принадлежит полугруппе S и выполняются равенства: $xs = (c_{\varphi_1(x_1)}, c_{\varphi_2(x_1)}) = (c_{a_1}, c_v)$, $ys = (c_{\varphi_1(y_1)}, c_{\varphi_2(y_1)}) = (c_{b_1}, c_v)$, $zs = (c_{\varphi_1(z_1)}, c_{\varphi_2(z_1)}) = (c_{d_1}, c_v)$. Отсюда в силу леммы 4 следует, что $E_1(xs, a)$, $E_1(ys, b)$, $E_1(zs, d)$, т. е. выполняется условие $\Psi_1(a, b, d)$ и справедлива первая часть утверждения 3) леммы. Аналогично доказывается вторая часть этого утверждения. □

Теорема 3. *Полугруппа S в том и только том случае будет изоморфена полугруппе входных сигналов некоторого универсального планарного автомата, если она удовлетворяет следующим условиям:*

$$(\tilde{\theta}_0)\quad (\forall\ x, y, z)\Bigg((RZ(x) \Rightarrow E_2(x, x)) \wedge (E_2(x, y) \wedge E_2(y, z) \Rightarrow E_2(y, x) \wedge E_2(x, z)) \wedge$$
$$\wedge \left(E_1(x, y) \Rightarrow (\forall\ s)\left(\bigwedge_{i=1}^{2} E_i(xs, ys)\right)\right)\Bigg);$$

$(\tilde{\theta}_1)$ $(\forall x, y, z)(E_i(x, y) \wedge RZ(z) \Rightarrow \Psi_i(x, y, z))$ *(здесь и далее $i = 1, 2$);*

$(\tilde{\theta}_2)$ $(\forall\ x_1, x_2, x_3)\left(\Psi_i(x_1, x_2, x_3) \Rightarrow \bigwedge_{t \in T} \Psi_i(x_{t(1)}, x_{t(2)}, x_{t(3)})\right)$*, где T — множество всех преобразований множества $\{1, 2, 3\}$;*

$(\tilde{\theta}_3)$ $(\forall\, x_1, x_2, x, y)(\neg E_i(x_1, x_2) \wedge \Psi_i(x, x_1, x_2) \wedge \Psi_i(x_2, x_1, y) \Rightarrow \Psi_i(x, x_1, y))$;

$(\tilde{\theta}_4)$ $(\forall\, x_1, x_2)\left(\bigwedge\limits_{j=1}^{2} RZ(x_j) \Rightarrow (\exists\, x)\left(\bigwedge\limits_{j=1}^{2} \neg E_i(x, x_j) \wedge \Psi_i(x_1, x_2, x)\right)\right)$;

$(\tilde{\theta}_5)$ $(\exists\, x_1, x_2, x_3)\left(\bigwedge\limits_{j=1}^{3} RZ(x_j) \wedge \neg\Psi_i(x_1, x_2, x_3)\right)$;

$(\tilde{\theta}_6)$ *для любых отображений f_1, f_2: $S \to S$ выполняется*

$$(\forall x, x_1, x_2, x_3)(E_1(x, x_1) \wedge \Psi_1(x_1, x_2, x_3) \Rightarrow \bigwedge_{j=1}^{2}(E_j(f_j(x), f_j(x_1))\wedge$$

$$\wedge\Psi_j(f_j(x_1), f_j(x_2), f_j(x_3)))) \Rightarrow (\exists!\ z)(\forall x)\left(RZ(x) \Rightarrow \bigwedge_{j=1}^{2} E_j(xz, f_j(x))\right).$$

Доказательство. Покажем, что для любых плоскостей Π_1 и Π_2 полугруппа входных сигналов S универсального планарного автомата $\mathbf{A} = \mathrm{Atm}(\Pi_1, \Pi_2)$ удовлетворяет условиям $(\tilde{\theta}_0)-(\tilde{\theta}_6)$. Из лемм 4, 5 следует, что полугруппа S удовлетворяет условию $(\tilde{\theta}_0)$. В силу леммы 5 элементы $a, b, d \in S$ в том и только том случае удовлетворяют условию $\Psi_1(a, b, d)$ (соответственно условию $\Psi_2(a, b, d)$), если найдутся такие точки $a_i, b_i, d_i \in X_i$, что $a = (c_{a_1}, c_{a_2})$, $b = (c_{b_1}, c_{b_2})$, $d = (c_{d_1}, c_{d_2})$ и $(a_1, b_1, d_1) \in C(\Pi_1)$ (соответственно $(a_2, b_2, d_2) \in C(\Pi_2)$). Тогда из лемм 4, 5 и свойств (T_1)–(T_5) отношений коллинеарности плоскостей следует, что полугруппа S удовлетворяет условиям $(\tilde{\theta}_1)$–$(\tilde{\theta}_5)$. Для доказательства $(\tilde{\theta}_6)$ рассмотрим отображения f_1, f_2: $S \to S$, для которых при любых значениях $x, x_1, x_2, x_3 \in S$ выполняется условие

$$\left(E_1(x, x_1) \wedge \Psi_1(x_1, x_2, x_3) \Rightarrow \bigwedge_{j=1}^{2}\left(E_j(f_j(x), f_j(x_1)) \wedge \Psi_j\left(f_j(x_1), f_j(x_2), f_j(x_3)\right)\right)\right).$$

В силу свойства $(\tilde{\theta}_1)$ отсюда следует, что для любого $s \in S$, удовлетворяющего условию $RZ(s)$, при каждом $i = 1, 2$ выполняется $RZ(f_i(s))$ и можно корректно определить отображения $\varphi_i : X_1 \to X_i$ по правилу: для элемента $x \in X_1$ значение $\varphi_i(x) = x_i$, если для некоторого $z \in X_2$ выполняется равенство $f_i(c_x, c_z) = (c_{x_1}, c_{x_2})$. Кроме того, из леммы 5 следует, что эти отображения φ_1, φ_2 коллинеарные тройки точек плоскости Π_1 отображают в коллинеарные тройки точек соответственно плоскостей Π_1, Π_2. Значит, по лемме 2 $\varphi_1 \in \mathrm{End}(\Pi_1)$, $\varphi_2 \in \mathrm{Hom}(\Pi_1, \Pi_2)$ и $s = (\varphi_1, \varphi_2)$ – входной сигнал универсального планарного автомата $\mathbf{A} = \mathrm{Atm}(\Pi_1, \Pi_2)$, который при любом $a = (c_{a_1}, c_{a_2}) \in Z_S$ удовлетворяет условию:

$$as = (c_{a_1}, c_{a_2}) \cdot (\varphi_1, \varphi_2) = (c_{\varphi_1(a_1)}, c_{\varphi_2(a_1)}).$$

Так как по построению для любого $i = 1, 2$ выполняется $\varphi_i(a_1) = (f_i(a))_i$, то в силу леммы 5 $E_i(as, f_i(a))$. Следовательно, полугруппа входных сигналов S универсального планарного автомата $\mathbf{A} = \mathrm{Atm}(\Pi_1, \Pi_2)$ удовлетворяет условию $(\tilde{\theta}_6)$. Обратно, пусть полугруппа S удовлетворяет условиям $(\tilde{\theta}_0)$–$(\tilde{\theta}_6)$. Тогда из условия $(\tilde{\theta}_5)$ следует, что эта полугруппа имеет непустое множество правых нулей Z_S. Для каждого $i = 1, 2$ формула E_i определяет на множестве Z_S бинарное отношение ε_i по правилу: $\varepsilon_i = \{(x, y) \in Z_S^2 | E_i(x, y)\}$. Легко видеть, что отношение ε_1 является эквивалентностью на множестве Z_S. Из условия $(\tilde{\theta}_0)$ следует, что отношение ε_2 рефлексивно, симметрично и транзитивно, т. е. также является эквивалентностью на множестве Z_S. Более того, из условия $(\tilde{\theta}_0)$ следует, что эти отношения удовлетворяют условию

$$(x, y) \in \varepsilon_1 \Rightarrow (\forall s \in S)\left(\bigwedge_{i=1}^{2}(xs, ys) \in \varepsilon_i\right). \tag{2}$$

Для каждого $i = 1, 2$ обозначим фактор-множество $X_i = Z_S/\varepsilon_i$ и рассмотрим автомат $\mathbf{A} = (X_1, X_2, S, \delta, \lambda)$ с множеством состояний X_1, множеством выходных сигналов X_2, полугруппой входных сигналов S, функцией переходов $\delta : X_1 \times S \to X_1$ и выходной функцией $\lambda : X_1 \times S \to X_2$, которые для значений $x \in Z_S, s \in S$ определяются по формулам

$$\delta(\varepsilon_1(x), s) = \varepsilon_1(xs), \qquad \lambda(\varepsilon_1(x), s) = \varepsilon_2(xs).$$

Заметим, что корректность такого определения следует из свойства (2) и равенств

$$\delta(\varepsilon_1(x), st) = \varepsilon_1(x(st)) = \varepsilon_1((xs)t) = \delta(\varepsilon_1(xs), t) = \delta(\delta(\varepsilon_1(x), s), t),$$
$$\lambda(\varepsilon_1(x), st) = \varepsilon_2(x(st)) = \varepsilon_2((xs)t) = \lambda(\varepsilon_1(xs), t) = \lambda(\delta(\varepsilon_1(x), s), t),$$

которые выполняются для любых $x \in Z_S$ и $s,\ t \in S$. Из свойств $(\tilde{\theta}_1)$–$(\tilde{\theta}_6)$ следует, что автомат $\mathbf{A}$ удовлетворяет условиям (θ_1)–(θ_6) и по теореме 2 этот автомат изоморфен универсальному планарному автомату $\mathrm{Atm}(\Pi_1, \Pi_2)$ для некоторых плоскостей Π_1, Π_2. Значит, полугруппа S входных сигналов автомата $\mathbf{A}$ будет изоморфна полугруппе $S(\Pi_1, \Pi_2)$ входных сигналов универсального планарного автомата $\mathrm{Atm}(\Pi_1, \Pi_2)$. □

Библиографический список

1. *Картеси Ф.* Введение в конечные геометрии. М. : Наука, 1980. 320 с.
2. *Плоткин Б. И., Гринглаз Л. Я., Гварамия А. А.* Элементы алгебраической теории автоматов. М. : Высш. шк., 1994. 192 с.
3. *Улам С.* Нерешенные математические задачи. М. : Наука, 1964. 168 с.
4. *Jonson B.* Topics in Universal Algebras. Lecture Notes in Mathematics. Vol. 250. Berlin ; N. Y. : Springer-Verlag, 1972. 220 p.
5. *Molchanov V. A.* A universal planar automaton is determined by its semigroup of input symbols // Semigroup Forum. 2011. Vol. 82. P. 1–9.
6. *Молчанов В. А.* Конкретная характеризация универсальных планарных автоматов // Фундамент. и прикл. матем. 2013. Т. 18, вып. 3. С. 139–148.
7. *Birkhoff G., Lipson J. D.* Heterogeneous Algebras // J. Combinatorial Theory. 1970. Vol. 8. P. 115–133.
8. *Ершов Ю. Л., Палютин Е. А.* Математическая логика. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2011. 356 с.
9. *Молчанов В. А.* Представление универсальных планарных автоматов входными сигналами // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 2, ч. 2. С. 31–37.

Abstract Characterization of Semigroups of Input Signals of Universal Planar Automata

V. A. Molchanov

Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., 410012, Saratov, Russia, v.molchanov@inbox.ru

Universal planar automata are universally attracted objects in the category of automata, for which sets of states and output signals are endowed with structures of planes. The main results of the paper give us necessary and sufficient conditions under which an arbitrary automaton is isomorphic to a universal planar automaton and an arbitrary semigroup is isomorphic to the semigroup of input signals of a universal planar automata.

Key words: automaton, semigroup, plane.

References

1. Karteszi F. *Introduction to finite geometries*. Amsterdam, North-Holland, 1976. 266 p. (Rus. ed. : Karteszi F. Vvedenie v konechnye geometrii. Moscow, Nauka, 1980, 320 p.)
2. Plotkin B. I., Greenglaz L. Ja., Gvaramija A. A. *Algebraic structures in automata and databases theory*. Singapore ; River Edge ; NJ, World Scientific, 1992. (Rus. ed. : Plotkin B. I., Greenglaz L. Ja., Gvaramija A. A. Elementy algebraicheskoi teorii avtomatov. Moscow, Vysshaya Shkola, 1994, 192 p.)
3.Ulam S. M. *A Collection of Mathematical Problems*. New York, Interscience Publishers, 1960. 150 p. (Rus. ed. : Ulam S. Nereshennye matematicheskie zadachi. Moscow, Nauka, 1964, 168 p.)
4. Jonson B. *Topics in Universal Algebras*. Lecture Notes in Mathematics, vol. 250, Berlin, New York, Springer–Verlag, 1972, 220 p.
5. Molchanov V. A. A universal planar automaton is determined by its semigroup of input symbols. *Semigroup Forum*, 2011, vol. 82, pp. 1–9.
6. Molchanov V. A. Concrete characterization of universal planar automata. *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika*, 2013, vol. 18, iss. 3, pp. 139–148 (in Russian).
7. Birkhoff G., Lipson J. D. Heterogeneous Algebras. *J. Combinatorial Theory*, 1970, vol. 8, pp. 115–133.
8. Ershov Yu. L., Palyutin E. A. *Mathematical Logic*. Moscow, Mir Publishers, 1984, 303 p. (Rus. ed. : Ershov Yu. L., Palyutin E. A. Matematicheskaya logika. Moscow, FIZMATLIT, 2011, 356 p.)
9. Molchanov V. A. Representation of Universal Planar Automata by Autonomous Input Signals. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2013, vol. 13, iss. 2, pt. 2, pp. 31–37 (in Russian).