И, наконец, имеет место следующая

Теорема (ср. теорему 14.13). Для каждого $n \geq 20$, кратного 4, существует однородное n-вершинное ТР-1Р, не являющееся ТВ-1Р.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 05-08-18082.

Библиографический список

1. *Абросимов М.Б.* О неизоморфных оптимальных 1-отказоустойчивых реализациях некоторых графов // Теоретические проблемы информатики и ее приложений. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2000. Вып.3. С. 3–10.

2. *Абросимов М.Б.* Минимальные расширения объединений некоторых графов // Теоретические проблемы информатики и ее приложений. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып.4. С. 3–11.

3. *Абросимов М.Б.* Минимальные расширения дополнений графов // Теоретические проблемы информатики и ее приложений. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып. 4. С. 11–19.

4. *Абросимов М.Б.* О минимальных расширениях графов, содержащих изолированные вершины // Вестник ТГУ. Приложение. Томск, 2002. №1(II). С.24–29.

5. *Абросимов М.Б.* Минимальные k-расширения предполных графов // Известия вузов: Математика. 2003. № 6(493). С. 3–11.

6. *Абросимов М.Б.* О неизоморфных минимальных реберных 1-расширениях некоторых графов // Теоретические задачи информатики и ее приложений. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2004 (в печати).

7. *Богомолов А.М., Салий В.Н.* Алгебраические основы теории дискретных систем. М.: Наука, 1997.

8. *Харари Ф.* Теория графов. М.: Едиториал УРСС, 2003.

9. *Hayes J.P.* A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Trans. Comput. 1976. Vol. C. 25, №9. P.875–884.

10. *Harary F., Hayes J.P.* Edge fault tolerance in graphs // Networks. 1993. Vol. 23. P. 135–142.

11. *Skiena S.* Implementing Discrete Mathematics: Combinatorics and Graph Theory with Mathematica. Reading, MA: Addison-Wesley, 1990.

УДК 512.5

О МИНИМАЛЬНЫХ СИЛЬНО СВЯЗНЫХ КОНГРУЭНЦИЯХ ОРИЕНТИРОВАННЫХ ЦЕПЕЙ

М.Р. Мирзаянов

Саратовский государственный университет,
кафедра теоретических основ компьютерной безопасности и криптографиии
E-mail: mirzayanovmr@gmail.com

Пусть G = (V, α) – ориентированный граф. Эквивалентность θ ⊆ V × V называется его сильно связной конгруэнцией, если факторграф G/θ – сильно связный. Описываются минимальные по включению сильно связные конгруэнции ориентированной цепи и подсчитывается их количество: 2^{n-3}, если цепь имеет n вершин.

On Minimal Strongly Connected Congruences of a Directed Path

M.R. Mirzayanov

Let G = (V, α) be a directed graph. An equivalence relation θ ⊆ V × V is called a strongly connected congruence of G if the quotient graph G/θ is strongly connected. Minimal (under inclusion) strongly connected congruences of a directed path are described and the total amount of them is found (2^{n-3} if the path has n vertices).

Пусть K – некоторый класс орграфов. Если G является K-графом, а отношение эквивалентности θ на множестве его вершин таково, что факторграф G/θ также принадлежит классу K, то θ называется конгруэнцией K-графа G.

Если K – некоторый класс орграфов и G – произвольный орграф, то K-конгруэнцией орграфа G называется отношение эквивалентности θ на множестве его вершин такое, что факторграф G/θ принадлежит классу K.

В [1, 2] ставятся задачи изучения K-конгруэнций орграфов, а также конгруэнций K-графов.

Конгруэнции корневых деревьев и турниров рассмотрела А.В. Киреева в [3, 4]. В работе М.А. Кабанова [5] изучаются функциональные конгруэнции орграфов. Сообщение об алгоритме построения минимальной в смысле количества вершин в факторграфе сильно связной конгруэнции произвольного орграфа содержится в работе М.Р. Мирзаянова [6].

В данной работе под минимальностью K-конгруэнции орграфа понимается ее минимальность в смысле теоретико-множественного включения. Формально K-конгруэнция π орграфа G минимальна, если не существует такой его K-конгруэнции θ, что $\theta \subset \pi$.

Ниже решаются задачи описания и перечисления минимальных сильно связных конгруэнций ориентированных цепей, то есть минимальных по включению эквивалентностей, факторизация по которым превращает ориентированную цепь в сильно связный орграф.

Под ориентированным графом (далее – орграф) понимается пара $G = (V, \alpha)$, где V – конечное непустое множество (вершины орграфа), а $\alpha \subseteq V \times V$ – отношение на множестве V (пара $(u, w) \in \alpha$ называется дугой орграфа с началом u и концом w).

Вершина u достижима из вершины v в орграфе $G = (V, \alpha)$, если

.

Достижимость вершины u из вершины v будем обозначать символом $v \to u$. В частности, любая вершина достижима из себя.

Орграф $G = (V, \alpha)$ называется сильно связным, если $Af = Mf + g(x)\int_0^\pi f(t)v(t)\,dt,\ Mf = \int_0^x M(x,t)f(t)\,dt,\ 0 \le x \le \pi$.

Факторграфом орграфа $G = (V, \alpha)$ по эквивалентности $\pi \subseteq V \times V$ называется орграф $G/\pi = (V/\pi, \alpha/\pi)$, где V/π – множество классов эквивалентности π, а

$$\alpha/\pi = \{(\pi(u), \pi(v)) \mid (\exists u' \in \pi(u), v' \in \pi(v))((u', v') \in \alpha)\}.$$

Орграф $G = (V, \alpha)$ называется ориентированной цепью, если $\alpha = \{(v_i, v_{i+1}) \mid i = \overline{1, n-1}\}$, где $n = |V|$. Так как в работе речь идет только об ориентированных графах, ориентированную цепь будем иногда называть просто цепью. Цепь, содержащую n вершин, обозначим символом P_n.

Для упрощения записей будем считать, что на множестве V введено отношение порядка $v_i < v_j \Leftrightarrow v_i \to v_j$. Очевидно, что для любого отношения эквивалентности $\pi \subseteq V \times V$ и орграфа P_n/π верна импликация $(u < w) \Rightarrow (\pi(u) \to \pi(w))$.

Лемма 1 (о разбиении). Пусть π сильно связная конгруэнция орграфа G, а отношение эквивалентности π^* таково, что $\pi^* \subset \pi$. Если $(\forall u, w \in V)[((u, w) \in \pi) \Rightarrow (\pi^*(u) \to \pi^*(w))]$, то π^* – сильно связная конгруэнция.

Доказательство. Рассмотрим произвольную пару блоков $\pi^*(u), \pi^*(w)$. В факторграфе G/π существует путь $\pi(u) = \pi(u_1), \pi(u_2), \ldots, \pi(u_k) = \pi(w)$. Его наличие означает, что

$$(\exists s_1, t_2 \in V)(s_1 \in \pi(u_1)\ \&\ t_2 \in \pi(u_2)\ \&\ (s_1, t_2) \in \alpha),$$

$$(\exists s_2, t_3 \in V)(s_2 \in \pi(u_2)\ \&\ t_3 \in \pi(u_3)\ \&\ (s_2, t_3) \in \alpha), \ldots,$$

$$(\exists s_{k-1}, t_k \in V)(s_{k-1} \in \pi(u_{k-1})\ \&\ t_k \in \pi(u_k)\ \&\ (s_{k-1}, t_k) \in \alpha).$$

Так как $(u, s_1) \in \pi$, то $\pi^*(u) \to \pi^*(s_1)$, а из $(t_k, w) \in \pi$ следует $\pi^*(t_k) \to \pi^*(w)$. Аналогично $\pi^*(t_i) \to \pi^*(s_i)$ для всех $i = \overline{2, k-1}$. Таким образом, $\pi^*(u) \to \pi^*(s_1) \to \pi^*(t_2) \to \pi^*(s_2) \to \ldots \to \pi^*(t_k) \to \pi^*(w)$. В силу транзитивности отношения достижимости $\pi^*(u) \to \pi^*(w)$.

Так как для произвольной пары вершин $\pi^*(u), \pi^*(w)$ в орграфе G/π^* верно $\pi^*(u) \to \pi^*(w)$, факторграф G/π^* является сильно связным. □

Заметим, что для практического применения леммы о разбиении достаточно доказывать импликации $((u, v) \in \pi) \Rightarrow (\pi^*(u) \to \pi^*(v))$ для пар вершин u, w, лежащих только в тех блоках отношения эквивалентности π, которые подверглись разбиению.

Теорема 1. Пусть π – некоторая минимальная сильно связная конгруэнция цепи P_n, тогда любой π-блок состоит не более чем из двух элементов.

Доказательство. Предположим противное. Пусть для некоторой минимальной сильно связной конгруэнции π утверждение теоремы не верно. Рассмотрим вершины u_1, u_2, u_3, принадлежащие одному блоку отношения эквивалентности π. Будем считать, что $u_1 \to u_2$ и $u_2 \to u_3$. Покажем, что отношение эквивалентности π^*, получающееся из π выделением вершины u_2 в отдельный блок, тоже является сильно связной конгруэнцией. Очевидно, вершины $\pi^*(u_2)$ и $\pi^*(u_1)$ принадлежат одной компоненте сильной связности, а отношение эквивалентности π^*содержится в π. Следовательно, по лемме о разбиении, π^* – сильно связная конгруэнция. Так как верно включение $\pi^* \subset \pi$, получаем противоречие. □

Всюду ниже при использовании обозначений двухэлементных блоков $\{u, w\}$ будем полагать, что $u < w$.

Теорема 2. Пусть π – произвольная минимальная сильно связная конгруэнция цепи P_n. Тогда для любой пары ее двухэлементных блоков $\{u_1, w_1\}$, $\{u_2, w_2\}$ верно одно из следующих утверждений:

1. $(u_1 < u_2)\,\&\,(w_1 < w_2)$;
2. $(u_2 < u_1)\,\&\,(w_2 < w_1)$.

Доказательство. Положим, $u_1 < u_2$. Надо показать, что $w_1 < w_2$. По теореме 1 равенство $w_1 = w_2$ невозможно. Предположим, что $w_1 > w_2$. Рассмотрим отношение эквивалентности $\pi^* = \pi \setminus \{(u_2, w_2), (w_2, u_2)\}$. Верна достижимость $\pi^*(u_2) \to \pi^*(w_2)$ в факторграфе P_n/π^*, так как $u_2 < w_2$. Обратная достижимость $\pi^*(w_2) \to \pi^*(u_2)$ верна, так как $(\pi^*(w_2) \to \pi^*(w_1))\,\&\,(\pi^*(u_1) \to \pi^*(u_2))\,\&\,(\pi^*(u_1) = \pi^*(w_1))$. Отношение эквивалентности π^* таково, что $\pi^* \subset \pi$. По лемме о разбиении отношение эквивалентности π^* – сильно связная конгруэнция. Так как $\pi^* \subset \pi$, получаем противоречие с минимальностью сильно связной конгруэнции π.

Итак, $w_1 < w_2$. Случай $u_2 < u_1$ разбирается аналогично. □

Теорема 3. Пусть π произвольная сильно связная конгруэнция цепи P_n. Не существует такой вершины цепи $v_1 < v_n$, что для любого блока $\pi(u)$ верно одно из двух утверждений:

1. $\max(\pi(u)) \le v_i$;
2. $v_i < \min(\pi(u))$.

Доказательство. Допустим, что такая вершина v_i существует. Покажем, что вершина $\pi(v_i)$ не достижима из вершины $\pi(v_n)$.

Разобьем все вершины факторграфа P_n/π на две группы. К первой группе отнесем такие блоки $\pi(v)$, что $\max(\pi(v) \le v_i$. Вторая группа будет содержать блоки $\pi(v)$ такие, что $v_i < \min(\pi(v))$. Заметим, что в орграфе P_n/π не найдется дуги, ведущей из второй группы в первую группу. Таким образом, любая вершина первой группы недостижима из вершины второй группы. В частности, вершина $\pi(v_i)$ недостижима из вершины $\pi(v_n)$.

Следовательно, отношение эквивалентности π не является сильно связной конгруэнцией. Получаем противоречие, значит допущение не верно. □

Заметим, что теорема 3 не требует минимальности сильно связной конгруэнции π для своего применения.

Пара двухэлементных блоков $\{u_1, w_1\}$, $\{u_2, w_2\}$ отношения эквивалентности на вершинах цепи называется конфликтующей, если $(u_1 < u_2 < w_1) OR (u_2 < u_1 < w_2)$.

Теорема 4. Произвольная минимальная сильно связная конгруэнция π цепи P_n не содержит тройки попарно конфликтующих двухэлементных блоков.

Доказательство. Допустим, такая тройка попарно конфликтующих двухэлементных блоков $\{u_1, w_1\}$, $\{u_2, w_2\}$, $\{u_3, w_3\}$ существует. Пусть $u_1 = \min(u_1, u_2, u_3)$, $v_3 = \max(v_1, v_2, v_3)$. Рассмотрим отношение эквивалентности $\pi^* = \pi \setminus \{(u_2, w_2) \cup (w_2, u_2)\}$. Так как $u_2 < w_2$, то $\pi^*(u_2) \to \pi^*(w_2)$. В силу конфликта $\{u_1, w_1\}$ и $\{u_3, w_3\}$ верно $u_3 < w_1$. Заметим, что $\pi^*(w_2) \to \pi^*(w_3)$, $\pi^*(w_3) = \pi^*(u_3)$, $\pi^*(u_3) \to \pi^*(w_1)$, $\pi^*(w_1) = \pi^*(u_1)$, $\pi^*(u_1) \to \pi^*(u_2)$. Следовательно, $\pi^*(w_2) \to \pi^*(u_2)$. По лемме о разбиении, π^* – сильно связная конгруэнция цепи. Получаем противоречие с минимальностью сильно связной конгруэнции π. □

Теорема 5 (характеризация минимальных сильно связных конгруэнций цепи). Для того чтобы отношение эквивалентности $\pi \subseteq V^2$ являлось минимальной сильно связной конгруэнцией цепи, необходимо и достаточно одновременное выполнение следующих условий:

1) $\max\limits_{v \in V}(|\pi(v)|) \le 2$;

2) для любой пары двухэлементных блоков $\{u_1, w_1\}$, $\{u_2, w_2\}$ справедливо утверждение $((u_1 < u_2)\,\&\,(w_1 < w_2)) OR ((u_2 < u_1)\,\&\,(w_2 < w_1))$;

3) не существует такой вершины $v_i < v_n$ цепи, что для любого двухэлементного блока $\{u, w\}$ верно одно из двух утверждений: $w \le v_i$ или $v_i < u$;

4) не существует тройки попарно конфликтующих двухэлементных блоков.

Доказательство. Теоремы 1–4 устанавливают необходимость выполнения условий 1)–4). Покажем достаточность.

Пусть условия 1)–4) выполняются для отношения эквивалентности π. Занумеруем все двухэлементные блоки $\{u_1, w_1\}$, $\{u_2, w_2\}$... $\{u_k, w_k\}$ таким образом, что $u_1 < u_2 < ... < u_k$. Блоков большей мощности не существует по условию 1). По условию 2) справедливы неравенства $w_1 < w_2 < ... < w_k$. В силу условия 3) $u_1 = v_1$, $w_k = v_n$. Если $k = 1$, то, очевидно, условия 1)–4) являются достаточными.

Пусть $k > 1$. По условию 3) верно неравенство $u_j < w_{j-1}$ для $j = \overline{2,k}$. Из этого следует, что $\pi(v_n) \to \pi(v_0)$, так как $\pi(u_j) \to \pi(w_{j-1})$ для $j = \overline{2,k}$ и $\pi(u_j) = \pi(w_j)$ для $j = \overline{1,k}$. Следовательно, для любой пары $u > w$ верно $\pi(u) \to \pi(w)$, так как $\pi(u) \to \pi(v_n) \to \pi(v_0) \to \pi(w)$. Итак, π является сильно связной конгруэнцией.

Покажем ее минимальность. Любое отношение эквивалентности $\pi^* \subset \pi$ отличается от π тем, что некоторая часть двухэлементных блоков из π не представлена в π^*. Очевидно, $\pi \setminus \{(u_1, w_1), (w_1, u_1)\}$ и $\pi \setminus \{(u_k, w_k), (w_k, u_k)\}$ не являются сильно связными конгруэнциями. Докажем, что $\pi \setminus \{(u_j, w_j), (w_j, u_j)\}$ для $j = \overline{2, k-1}$ тоже не являются сильно связными конгруэнциями. Так как пары $\{u_{j-1}, w_{j-1}\}, \{u_j, w_j\}$ и $\{u_j, w_j\}, \{u_{j+1}, w_{j+1}\}$ конфликтуют, то в силу 4) пара блоков $\{u_{j-1}, w_{j-1}\}, \{u_{j+1}, w_{j+1}\}$ конфликтующей не является. Следовательно, верно $w_{j-1} < u_{j+1}$. Так как $u_1 < u_2 < ... < u_k$ и $w_1 < w_2 < ... < w_k$, то для любого блока $\pi^*(u)$ верны неравенства $\max(\pi^*(u)) \le w_{j-1}$, $w_{j-1} < \min(\pi^*(u))$, то есть отношение эквивалентности $\pi^* = \pi \setminus \{(u_j, w_j), (w_j, u_j)\}$ не удовлетворяет условиям теоремы 3.

Таким образом, отношения эквивалентности $\pi \setminus \{(u_j, w_j), (w_j, u_j)\}$ не являются сильно связными конгруэнциями для любых $j = \overline{1,k}$. Следовательно, π – минимальная сильно связная конгруэнция. □

Пусть $v \in V \setminus \{v_n\}$, тогда символом $next(v)$ будем обозначать вершину, непосредственно следующую за вершиной v в цепи P_n.

Аналогично, если $v \in V \setminus \{v_1\}$, символом $prev(v)$ обозначим вершину, непосредственно предшествующую вершине v в цепи P_n.

В силу теоремы 5 любая минимальная сильно связная конгруэнция цепи и только такая конгруэнция может быть построена по следующим правилам.

1. Положим $\pi = \{(v, v) \mid v \in V\}$.
2. Пусть $u_{up} = u_l = u_r = v_n$.
3. Пока $v_1 < u_{up}$, будем выполнять шаги 4–6.
4. Выберем некоторые вершины u и w, где $u < u_{up}$ и $u_l \le w \le u_r$. Если $u \ne v_1$, то должно выполняться неравенство $u < prev(u_{up})$.
5. $\pi := \pi \cup \{(u, w), (w, u)\}$.
6. Положим $u_l = next(u)$, $u_r = prev(u_{up})$, $u_{up} = u$.

Следующая таблица представляет все минимальные сильно связные конгруэнции цепи P.

№	Нетривиальные блоки
1	$\{v_1, v_6\}$
2	$\{v_1, v_5\}, \{v_2, v_6\}$
3	$\{v_1, v_5\}, \{v_3, v_6\}$
4	$\{v_1, v_5\}, \{v_4, v_6\}$
5	$\{v_1, v_4\}, \{v_2, v_6\}$
6	$\{v_1, v_4\}, \{v_3, v_6\}$
7	$\{v_1, v_3\}, \{v_2, v_6\}$
8	$\{v_1, v_3\}, \{v_2, v_5\}, \{v_4, v_6\}$

Теорема 6. Пусть $R(n)$ – количество минимальных сильно связных конгруэнций цепи P_n. Для $n > 2$ верна формула

$$R(n) = 2^{n-3}.$$

Доказательство. Покажем для $n > 2$ справедливость рекуррентной формулы:

$$R(n) = 1 + \sum_{i=2}^{n-2} (n-i-1) \cdot R(i).$$

Существует одна минимальная сильно связная конгруэнция, которая содержит только один двухэлементный блок $\{v_1, v_n\}$, и некоторое количество других минимальных сильно связных конгруэнций. Определим их количество. Рассмотрим вершину v_n. Она может находиться в одном блоке с одной из вершин $v_2, v_3, ..., v_{n-2}$.

Найдем количество таких минимальных сильно связных конгруэнций, в которых вершина v_n попадает в один блок с вершиной v_i, где $2 \le i \le n-2$. Рассмотрим произвольную конгруэнцию описанного выше вида. Занумеруем все ее двухэлементные блоки $\{u_1, w_1\}, \{u_2, w_2\}, ..., \{u_k, w_k\}$ таким образом, что $u_1 < u_2 < \ldots < u_k$. Тогда верны утверждения: $u_k = v_i$, $w_k = v_n$ и $v_i < w_{k-1} < v_n$. Пусть π^* такое отношение эквивалентности на $\{v_1, v_2, ..., v_i\}$, что его двухэлементные блоки имеют вид $\{u_1, w_1\}, \{u_2, w_2\}, ..., \{u_{k-2}, w_{k-2}\}, \{u_{k-1}, v_i\}$. По теореме 5 отношение эквивалентности π^* – минимальная сильно связная конгруэнция цепи P_i. Обратно, из любой минимальной сильно связной конгруэнции цепи P_i, где $2 \le i \le n-2$, можно построить некоторое количество минимальных сильно связных конгруэнций цепи P_n таких, что вершина v_n попадает в один блок с вершиной v_i, обратив описанный выше процесс получения минимальной сильно связной конгруэнции цепи P_i из минимальной сильно связной конгруэнции цепи P_n. Каждая такая конгруэнция отличается от других значением w_{k-1}, которое удовлетворяет неравенству $v_i < w_{k-1} < v_n$. Таким образом, количество минимальных сильно связных конгруэнций, в которых вершина v_n попадает в один блок с вершиной v_i, равно $(n-i-1) \cdot R(i)$.

Просуммировав по всем вариантам, получаем $R(n) = 1 + \sum_{i=2}^{n-2} (n-i-1) \cdot R(i)$.

Докажем теперь по индукции равенство $R(n) = 2^{n-3}$ для $n > 2$. Заметим, что $R(1)=R(2)=R(3)=1$. Предположим, что для всех $i \le n_0$ справедливо соотношение $R(i) = 2^{i-3}$. Докажем, что $R(n_0+1) = 2^{n_0-2}$. Имеем

$$R(n_0+1) - R(n_0) = 1 + \sum_{i=2}^{n_0-1} (n_0 - i) \cdot R(i) - 1 - \sum_{i=2}^{n_0-2} (n_0 - i - 1) \cdot R(i) =$$

$$= R(n_0-1) + \sum_{i=2}^{n_0-2} (n_0 - i - n_0 + i + 1) \cdot R(i) = \sum_{i=2}^{n_0-1} R(i) = 1 + \sum_{i=3}^{n_0-1} R(i) =$$

$$= 1 + \sum_{i=3}^{n_0-1} 2^{i-3} = 1 + (2^{n_0-3} - 1) = 2^{n_0-3}.$$

Таким образом, $R(n_0+1) = 2^{n_0-3} + R(n_0) = 2^{n_0-3} + 2^{n_0-3} = 2^{n_0-2}$.

В силу метода математической индукции равенство $R(n) = 2^{n-3}$ верно для всех $n > 2$. □

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (05-08-18082).

Библиографический список

1. *Богомолов А.М., Салий В.Н.* Алгебраические основы теории дискретных систем. М., 1997.

2. *Богомолов А.М., Салий В.Н.* Несколько задач из алгебры дискретных систем // Методы и системы технической диагностики: Материалы X Междунар. конф. по проблемам теоретич. кибернетики. Саратов, 1993. Вып. 18. С.32–34.

3. *Киреева А.В.* О конгруэнциях корневых деревьев // XI Всесоюз. конф. по проблемам теоретической кибернетики: Тез. докл. Волгоград, 1990. Ч. 1. С. 23.

4. *Киреева А.В.* Решетка конгруэнций турнира // Студенты – ускорению научного прогресса. Саратов, 1991. Вып. 3. С. 3–7.

5. *Кабанов М.А.* Функциональные конгруэнции ориентированных графов // Упорядоч. множества и решетки. Саратов, 1995. Вып. 11. С. 15–23.

6. *Мирзаянов М.Р.* Построение минимальной сильно связной конгруэнции ориентированного графа // Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения. Тез. докл. VI Междунар. конф. Саратов, 2004. С. 80.

УДК 519.4

О РАСПОЗНАВАНИИ ЯЗЫКОВ ПРОИЗВОЛЬНЫХ СЛОВ КОНЕЧНЫМИ ПОЛУГРУППАМИ

В.А. Молчанов

Саратовский государственный университет,
кафедра геометрии
E-mail: v.molchanov@inbox.ru

В настоящей работе на основе методов нестандартного анализа разрабатывается новый подход к теории бесконечных произведений в конечных полугруппах. Основные результаты работы показывают, что бесконечные произведения элементов стандартных последовательностей в конечных полугруппах могут рассматриваться как двухсторонние алгебраические дубликаты конечных произведений специального вида. С помощью этих результатов строится универсальный функтор категории конечных полугрупп в категорию конечных четырехсортных алгебр специального вида и вводится понятие языка произвольных слов, распознаваемого конечными полугруппами. Рассматриваются приложения этих методов к теории распознаваемых языков на конечных полугруппах.

On Recognition of Languages of Arbitrary Words by Finite Semigroups

V. A. Molchanov

Based on methods of nonstandard analysis we elaborate in this paper a new approach to the theory of infinite products in finite semigroups. The main theorems of the paper show that infinite products of elements of standard sequences in finite semigroups can be viewed as a two-sided algebraic counterpart of finite products of a special kind. Using these results we construct a universal functor of the category of finite semigroups to the category of finite four-sorted algebras of a special kind and introduce a notion of a language of arbitrary words recognized by finite semigroups. Applications of these methods to the theory of recognizable languages on finite semigroups are considered.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящается развитию теории формальных языков произвольных слов на конечных полугруппах.

Как известно (см., например, обзор [1]), начало теории формальных языков было положено Н. Хомским [2], который ввел понятие слова в виде конечной последовательности букв алфавита, понятие языка в виде произвольного множества слов и понятие грамматики в виде совокупности правил, порождающих язык из алфавита. На основе такого подхода Н. Хомский построил и исследовал первую иерархию формальных языков. Позже С. Гинзбург [3] показал, что так называемые праволинейные грамматики порождают класс языков, которые подходящим образом обрабатываются конечными автоматами и называются распознаваемыми языками. Тесная взаимосвязь между конечными автоматами и полугруппами их переходов естественным образом привела к понятию распознаваемого конечной полугруппой языка. С точки зрения теории формальных языков этот факт устанавливает эквивалентность между конечными автоматами и конечными полугруппами. В то же время алгебраический подход к теории формальных языков, разработанный М. Шютценберже и С. Эйленбергом [4, 5] на основе распознавания таких языков конечными полугруппами, открыл новые возможности для более глубокого исследования теоретико-модельными методами комбинаторных аспектов теории распознаваемых языков. Один из главных результатов теории формальных языков – известная теорема С. Клини [6] показывает, что класс распознаваемых языков совпадает с классом рациональных языков, которые задаются рациональными выражениями в форме обобщенных полиномов с тремя специальными операциями (объединение, произведение и итерация языков).

В связи с широким применением в компьютерных науках (например, при моделировании компьютерных программ или вычислительных схем) не только конечных, но и бесконечных слов, естественно возникает задача исследования языков произвольных слов, содержащих конечные и бесконечные в любую сторону слова. Первые исследования в этом направлении были посвящены главным образом языкам бесконечных вправо слов (см., например, обзор [7]). Показательно, что при переносе основных понятий теории языков конечных слов на бесконечные слова исследователи получали базисные определения, которые, с одной стороны, были вполне естественными и перспективными, но, с другой стороны, интерпретировались весьма неоднозначно и, как правило, приводили к разнообразным техническим