

Рис. 6. Распределение упругих деформаций вблизи точек динамической неустойчивости ( $m = 20$ ,  $\mu = 3.0$ ,  $h = 0.2$ ,  $\nu = 2.0$ ,  $\kappa = 0.12$  (а),  $\kappa = 5.8$  (б))

### Библиографический список

1. Белоцерковский С. М., Кочетков Ю. А., Красовский А. А., Новицкий В. В. Введение в аэроавтоупругость. М.: Наука, 1980. 384 с.
2. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971. 512 с.
3. Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р. Теория обобщенных функций. Сенквенциальный подход. М.: Мир, 1976. 312 с.
4. Брычков Ю. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования обобщенных функций. М.: Наука, 1977. 288 с.
5. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979. 320 с.
6. Белоцерковский С. М., Скрипач Б. К., Табачников В. Г. Крыло в нестационарном потоке газа. М.: Наука, 1971. 768 с.
7. Тимошенко С. П., Войновски-Кригер С. А. Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1963. 636 с.
8. Бисплингофф Р. Л., Эшли Х., Халфмен Р. Л. Аэроупругость. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 800 с.
9. Бабаков И. М. Теория колебаний. М.: Наука, 1968. 560 с.
10. Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 344 с.
11. Нобл Б. Метод Винера – Хопфа. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 279 с.
12. Ефремов И. И., Лукащук Е. П., Грибашев С. А. Гармонические колебания пластинки вблизи твердой границы сжимаемой жидкости // Методы дискретных особенностей в задачах математической физики: тр. междунар. шк.-семинаров. Орел, 2008. Вып. 6. С. 38–45.

УДК 539.374: 517.958

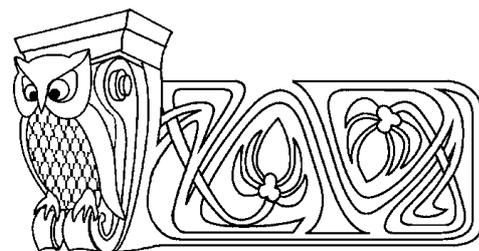
## ТЕЧЕНИЕ МАТЕРИАЛА СЛИБАРА – ПАСЛЯ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

Н. А. Окулов

Филиал Российского государственного социального университета, Наро-Фоминск, кафедра педагогики, психологии и информационных технологий  
E-mail: okulovna@rambler.ru

Рассматривается вопрос о численном моделировании неустановившегося течения вязкопластического материала в плоском канале. Определяющие соотношения принимаются в форме Слибара – Пасляя. Задача решается в напряжениях. Доказана теорема о слабом разрыве на границах раздела жестких и вязкопластических зон. Предложен оригинальный численный метод решения задачи. Приведены результаты численного моделирования.

**Ключевые слова:** вязкопластическая среда, материал Слибара – Пасляя, численное моделирование.



### Flow of Slibar – Paslay Material in a Flat Channel

N. A. Okulov

Branch of Russian State Social University, Naro-Fominsk, Chair of Pedagogy, Psychology and Information Technologies  
E-mail: okulovna@rambler.ru

The question of the numerical simulation of unstable flow of a viscoplastic material in a flat channel is considered. Defining relations are taken in the form of Slibar – Paslay. The problem is solved in stresses. Theorem about the weak discontinuity at the interfaces between rigid and viscoplastic zones is proved. The original numerical method for solving the problem is offered. Numerical simulation results are presented.

**Key words:** viscoplastic fluid, material of Slibar – Paslay, numerical simulation.



## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается неустановившееся однонаправленное течение вязкопластической среды в плоском канале  $\Omega = \{x, y \mid -\infty < x < +\infty, 0 \leq y \leq H\}$ . Задан продольный градиент давления, зависящий только от времени:  $p'_x = P(t)$ . Постановка задачи инвариантна относительно сдвига вдоль оси абсцисс. Единственная ненулевая компонента скорости  $v_x$  и касательное напряжение  $\sigma_{xy}$  зависят только от поперечной координаты и времени:  $v_x = v(y, t)$ ,  $\sigma_{xy} = \tau(y, t)$ .

Материальная точка может находиться либо в жестком состоянии, если в этой точке тензор скоростей деформации равен нулю, либо, в противном случае, — в вязкопластическом состоянии. Связное множество материальных точек, находящихся в жестком состоянии, будем называть жесткой зоной. Аналогично определяется зона вязкопластического течения.

Реологической моделью среды служит модель материала Слибара – Паслая [1, 2], вязкопластические свойства которого задаются параметрами:  $\eta$  — структурная вязкость,  $\tau_s$  и  $\tau_d$  ( $\tau_d < \tau_s$ ) — статический и динамический пределы пластичности соответственно. Эта модель учитывает эффект запаздывания течения некоторых вязкопластических сред. Авторы модели в работе [1] рассматривали только случай монотонного процесса нагружения. Снимем это ограничение. В данной работе под материалом Слибара – Паслая будем понимать вязкопластическую среду, которая обладает следующими свойствами (формулировка для случая однонаправленного течения в плоском канале).

1. В жестких зонах материал не деформируется

$$\frac{\partial v(y, t)}{\partial y} = 0. \quad (1)$$

В вязкопластических зонах скорость и напряжение связаны соотношением

$$\tau(y, t) - \alpha \cdot \tau_d = \eta \frac{\partial v(y, t)}{\partial y}, \quad \alpha = \text{sign}(\tau). \quad (2)$$

2. При  $|\tau| < \tau_d$  материальная точка находится в жестком, а при  $|\tau| > \tau_s$  — в вязкопластическом состоянии. При  $\tau_d \leq |\tau| \leq \tau_s$  материальная точка может находиться в любом из этих состояний.

3. Переход материальной точки из жесткого состояния в вязкопластическое возможен только при  $|\tau| = \tau_s$ . Обратный переход возможен только тогда, когда  $|\tau| = \tau_d$ .

**Следствие.** Материальная точка не меняет своего состояния, пока выполняется неравенство  $\tau_d < |\tau| < \tau_s$ .

Материал Слибара – Паслая рассматривается как несжимаемая сплошная среда, имеющая плотность  $\rho$ . Массовые силы отсутствуют. Уравнение движения имеет вид

$$\rho \frac{\partial v(y, t)}{\partial t} = \frac{\partial \tau(y, t)}{\partial y} - P(t). \quad (3)$$

Оно должно выполняться во всех внутренних точках канала за исключением, быть может, границ раздела жестких и вязкопластических зон. Стенку  $y = H$  будем называть верхней, а стенку  $y = 0$  — нижней. На верхней стенке задается касательное напряжение:  $\tau(H, t) = \psi(t)$ , а на неподвижной нижней стенке — условие прилипания:  $v(0, t) = 0$ . Начальное условие задается для напряжения:  $\tau(y, 0) = \varphi(y)$ .

**Цель исследования.** Для моментов времени  $t > 0$  требуется определить количество и положение жестких и вязкопластических зон. Для каждой вязкопластической зоны требуется определить распределение напряжений и скоростей, а для каждой жесткой зоны — скорость ее движения и распределение напряжений.

**Переход к безразмерным переменным.** В качестве характерных значений напряжения, расстояния, времени, скорости, ускорения и градиента давления примем

$$\langle \tau \rangle = \tau_d, \quad \langle y \rangle = H, \quad \langle t \rangle = \frac{H^2 \rho}{\eta}, \quad \langle v \rangle = \frac{H \tau_d}{\eta}, \quad \langle w \rangle = \frac{\tau_d}{H \rho}, \quad \langle P \rangle = \frac{\tau_d}{H}.$$



Переход к безразмерным переменным произведем стандартным образом:  $\tilde{g} = g/\langle g \rangle$ , где  $g$  — размерная переменная,  $\langle g \rangle$  — ее характерное значение,  $\tilde{g}$  — безразмерная переменная. Дальнейшее изложение будем вести в безразмерных переменных. Помету « $\sim$ » будем опускать. Отметим также, что теперь  $\tau_d = 1$ ,  $\tau_s > 1$ .

Определяющие соотношения (1), (2) и уравнение движения (3) в безразмерных переменных имеют следующий вид:

$$\frac{\partial v(y, t)}{\partial y} = \begin{cases} 0, & \text{в жестких зонах;} \\ \tau(y, t) - \alpha, & \text{в вязкопластических зонах,} \end{cases} \quad (4)$$

$$\frac{\partial v(y, t)}{\partial t} = \frac{\partial \tau(y, t)}{\partial y} - P(t). \quad (5)$$

Исключив с помощью соотношений (4) из уравнения движения (5) скорость, получим два уравнения, одно из которых должно выполняться в вязкопластических зонах:

$$\frac{\partial \tau(y, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \tau(y, t)}{\partial y^2}. \quad (6)$$

Другое — в жестких

$$\frac{\partial^2 \tau(y, t)}{\partial y^2} = 0. \quad (7)$$

**Замечание.** В жесткой зоне, примыкающей к нижней стенке (если такая зона имеется), выполняется уравнение

$$\frac{\partial \tau(y, t)}{\partial y} = P(t). \quad (8)$$

**Теорема о слабом разрыве.** Пусть скорость  $v(y, t)$  и напряжение  $\tau(y, t)$  непрерывны на некоторой границе раздела зон  $y = \xi(t)$ , и имеет место соотношение (4), тогда на этой границе выполняется соотношение

$$\{\tau'_y(y, t)\}_{y=\xi(t)} = \begin{cases} 0, & |\tau(\xi(t), t)| \neq \tau_s, \\ \alpha \cdot (\tau_s - 1) \cdot \dot{\xi}(t), & |\tau(\xi(t), t)| = \tau_s, \end{cases} \quad (9)$$

где  $\{\tau'_y(y, t)\}_{y=\xi(t)}$  — скачок производной  $\tau'_y(y, t)$  при переходе через границу раздела зон (из вязкопластической зоны в жесткую).

**Доказательство.** Для определенности рассмотрим случай, когда твердая зона располагается выше границы  $y = \xi(t)$ . Рассмотрим некоторый момент времени  $t = t_0$ . Будем предполагать, что граница  $y = \xi(t)$  существует на некотором отрезке времени  $[t_0, t_1]$ , и ее скорость движения  $\dot{\xi}(t)$  конечна. Здесь и далее точкой обозначается производная по времени. Тогда существует значение  $\Delta > 0$  такое, что на рассматриваемом отрезке времени граница не выйдет за пределы отрезка  $[y_1, y_2]$ , где  $y_1 = \xi(t_0) - \Delta$ ,  $y_2 = \xi(t_0) + \Delta$ , и, следовательно, интервалы  $[y_1, \xi(t)]$  и  $[\xi(t), y_2]$  все это время будут принадлежать соответственно вязкопластической и жесткой зонам.

Рассмотрим количество движения вязкопластической среды в полосе  $y_1 \leq y \leq y_2$  (в расчете на единицу ее длины)

$$K = \int_{y_1}^{y_2} v(y, t) dy = K_1 + K_2, \quad K_1 = \int_{y_1}^{\xi(t)} v(y, t) dy, \quad K_2 = \int_{\xi(t)}^{y_2} v(y, t) dy.$$

В жесткой зоне скорость всех частиц одинакова и равна  $v(\xi(t), t)$ . Следовательно,  $K_2 = v(\xi(t), t) \times [y_2 - \xi(t)]$ . В области  $y_1 \leq y \leq \xi(t)$  разложим скорость  $v(y, t)$  по формуле Тейлора:

$$v(y, t) = v(\xi(t), t) + v'_y(c_1, t) \cdot [y - \xi(t)],$$



где  $c_1$  — некоторая точка интервала  $[y, \xi(t)]$ . Проводя интегрирование, получим

$$K(t) = 2v(\xi(t), t) \cdot \Delta + \int_{y_1}^{\xi(t)} v'_y(c_1, t) \cdot [y - \xi(t)] dy.$$

Отсюда следует, что

$$\dot{K}(t_0) = 2W(t_0) \cdot \Delta - \dot{\xi}(t_0) \cdot \int_{y_1}^{\xi(t_0)} v'_y(c_1, t_0) dy + \int_{y_1}^{\xi(t_0)} [v'_y(c_1, t_0)]'_{t_0} \cdot [y - \xi(t_0)] dy,$$

где  $W(t)$  — ускорение твердой зоны. Предельным переходом получаем

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \dot{K}(t_0) = 2W(t_0) - \dot{\xi}(t_0) \cdot v'_y(\xi(t_0)-, t_0). \quad (10)$$

Учитывая, что в вязкопластической зоне имеет место второе из равенств (4), эту формулу запишем в виде

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \dot{K}(t_0) = 2W(t_0) - (\tau(\xi(t_0), t_0) - \alpha) \cdot \dot{\xi}(t_0).$$

Важно отметить, что при ее выводе динамические соотношения не были использованы.

Обратимся теперь к динамике. На основании теоремы об изменении количества движения можем записать

$$\dot{K}(t) = \tau(y_2, t) - \tau(y_1, t) - 2P(t) \cdot \Delta.$$

В жесткой зоне напряжение меняется линейно, следовательно,

$$\tau(y_2, t) = \tau(\xi(t), t) + [W(t) + P(t)] \cdot [y_2 - \xi(t)].$$

Значение  $\tau(y_1, t)$  найдем, используя формулу Тейлора:

$$\tau(y_1, t) = \tau(\xi(t), t) + \tau'_y(\hat{y}_1, t) \cdot [y_1 - \xi(t)],$$

где  $\hat{y}_1$  — некоторая промежуточная точка интервала  $[y_1, \xi(t)]$ . Используя указанные выражения для  $\tau(y_1, t)$  и  $\tau(y_2, t)$ , находим предел

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \dot{K}(t_0) = W(t_0) - P(t_0) + \tau'_y(\xi(t_0)-, t_0). \quad (11)$$

Приравнивая правые части формул (10) и (11) и учитывая, что в жесткой зоне  $W(t_0) + P(t_0) = \tau'_y(\xi(t_0) + t_0)$ , получаем

$$\{\tau'_y(y, t_0)\}_{y=\xi(t_0)} = (\tau(\xi(t_0), t_0) - \alpha) \cdot \dot{\xi}(t_0).$$

Отметим, что при  $|\tau(\xi(t_0), t_0)| = 1$  имеем равенство  $(\tau(\xi(t_0), t_0) - \alpha) = 0$ , а при  $1 < |\tau(\xi(t_0), t_0)| < \tau_s$  имеем равенство  $\dot{\xi}(t_0) = 0$ . Следовательно,

$$\{\tau'_y(y, t_0)\}_{y=\xi(t_0)} = \begin{cases} 0, & |\tau(\xi(t_0), t_0)| \neq \tau_s; \\ \alpha \cdot (\tau_s - 1) \cdot \dot{\xi}(t_0), & |\tau(\xi(t_0), t_0)| = \tau_s. \end{cases}$$

Итак, для случая, когда жесткая зона располагается выше границы раздела, теорема доказана. Для случая, когда жесткая зона находится ниже границы раздела, теорема доказывается аналогичным образом.

**Условия сопряжения на границах раздела зон.** Следствием предположения о сплошности среды являются условия непрерывности скорости и напряжения на границах раздела зон. Теорема о слабом разрыве позволяет условие непрерывности скорости заменить на условие (9).



В дальнейшем на каждой границе раздела зон будем ставить два условия: условие непрерывности напряжения

$$\tau(y, t)|_{y=\xi(t)-} = \tau(y, t)|_{y=\xi(t)+} \quad (12)$$

и условие скачка нормальной производной (9). Эти условия будем называть условиями сопряжения.

**Начальное и граничные условия.** При  $t = 0$  задается начальное распределение напряжений. На нижней стенке канала будем требовать обращения скорости в ноль, а на верхней — задавать напряжение. Эти условия через напряжение записываются следующим образом:

$$\tau'_y(0, t) = P(t), \quad \tau(1, t) = \psi(t). \quad (13)$$

## 2. РАЗНОСТНАЯ СХЕМА

**Замечание.** В данной статье способ построения разностной схемы и алгоритм ее решения рассматриваются для случая, когда имеются две зоны. Жесткая зона прилегает к нижней стенке, а вязкопластическая — к верхней. Формулы для случаев с иным количеством и составом зон могут быть получены аналогичным образом.

**Сетка.** Областью решения задачи на плоскости  $Oyt$  является полуполоса  $D = \{y, t | 0 \leq y \leq 1, t \geq 0\}$ . Задачу о течении материала Слибара – Паслая в плоском канале будем решать последовательно, продвигаясь во времени шаг за шагом. Этим шагам в области решения соответствуют временные слои  $t = t_m, m = 0, 1, \dots$ . На каждом слое строится пространственная сетка  $y = y_i^m, i = 1, 2, \dots, N$ , где  $N$  — число узлов. Пространственная нумерация узлов ведется в порядке продвижения от стенки  $y = 0$  к стенке  $y = 1$ . Пространственные координаты узлов  $y_i^m$  будем называть уровнями узлов.

На каждом шаге решается следующая триединая задача:

- 1) определение величины временного шага,
- 2) определение уровней узлов этого временного слоя,
- 3) определение узловых значений напряжения.

Подчеркнем, что сетка формируется в процессе решения задачи. Ее временные и пространственные шаги  $(\Delta t)_m = t_m - t_{m-1}, h_i^m = y_i^m - y_{i-1}^m$ , вообще говоря, непостоянные.

При построении сетки будем требовать, чтобы граница раздела  $y = \xi(t)$  проходила через узлы. В этом случае

$$\xi^m = \xi(t_m) = y_{n^m}^m,$$

где  $n^m$  — пространственный номер разделительного узла (узла, через который проходит граница раздела) на  $m$ -м временном слое.

Отличительным признаком предлагаемого численного метода является процедура перебора версий. Поэтому его естественно называть *методом версий*.

*Версия* — это предположение (гипотеза) о том, какое положение занимает граница раздела зон на рассматриваемом временном слое относительно ее положения на предыдущем слое. Для численного описания версии введем в рассмотрение переменную *ver*. Она может принимать пять символических значений:  $ver = +1$  — уровень поднялся и номер разделительного узла увеличился на единицу ( $\xi^m > \xi^{m-1}, n^m = n^{m-1} + 1$ );  $ver = +0$  — уровень поднялся, но номер разделительного узла остался прежним ( $\xi^m > \xi^{m-1}, n^m = n^{m-1}$ );  $ver = 0$  — уровень и номер разделительного узла остались прежними ( $\xi^m = \xi^{m-1}, n^m = n^{m-1}$ );  $ver = -0$  — уровень опустился, но номер разделительного узла остался прежним ( $\xi^m < \xi^{m-1}, n^m = n^{m-1}$ );  $ver = -1$  — уровень опустился и номер разделительного узла уменьшился на единицу ( $\xi^m < \xi^{m-1}, n^m = n^{m-1} - 1$ ).

Будем полагать  $h_{n^m+1}^m = \delta, h_{n^m}^m = h_{n^m+1}^{m-1} + h_{n^m}^{m-1} - \delta$  и задавать для переменной  $\delta$  либо интервал



допустимых значений (если  $var \neq 0$ ), либо конкретное значение (если  $var = 0$ ):

$$\begin{aligned}
 var = -1 : & \quad \frac{1}{2}h_{n^{m-1}}^{m-1} < \delta < h_{n^{m-1}}^{m-1} + \frac{1}{2}h_{n^{m-1}-1}^{m-1}, \\
 var = -0 : & \quad h_{n^{m-1}+1}^{m-1} < \delta \leq h_{n^{m-1}+1}^{m-1} + \frac{1}{2}h_{n^{m-1}}^{m-1}, \\
 var = 0 : & \quad \delta = h_{n^{m-1}+1}^{m-1}, \\
 var = +0 : & \quad \frac{1}{2}h_{n^{m-1}+1}^{m-1} \leq \delta < h_{n^{m-1}+1}^{m-1}, \\
 var = +1 : & \quad \frac{1}{2}h_{n^{m-1}+2}^{m-1} < \delta < h_{n^{m-1}+2}^{m-1} + \frac{1}{2}h_{n^{m-1}+1}^{m-1}.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Все остальные пространственные шаги, кроме указанных выше, будем брать равными соответствующим шагам предыдущего временного слоя.

Совокупность пространственных шагов на  $m$ -м временном слое удобно рассматривать как  $N$ -мерный вектор  $H^{(m)} = (h_1^m, h_2^m, \dots, h_N^m)$ . Подчеркнем, что вектор пространственных шагов зависит от переменной  $\delta$ :  $H^{(m)} = H^{(m)}(\delta)$ .

### Формирование разностной схемы

Проведя конечно-разностную аппроксимацию уравнений (6)–(8), граничных условий (13) и условий сопряжения (9), (12), получим разностную схему. При этом узлу на нижней стенке и каждому внутреннему узлу жесткой зоны ( $i = 1, \dots, n^m - 1$ ) будет поставлено в соответствие уравнение

$$\frac{\tau_{i+1}^m - \tau_i^m}{h_{i+1}^m} = P(t_{m-1} + (\Delta t)_m). \tag{15}$$

Разделительному узлу ( $i = n^m$ ) – два уравнения

$$\begin{aligned}
 ver_1 \in \{+1, +0\} : & \quad 1) |\tau_i^m| = 1, \quad 2) P(t_{m-1} + (\Delta t)_m) - \frac{\tau_{i+1}^m - \alpha}{h_{i+1}^m} = 0, \\
 ver_1 = 0 : & \quad 1) P(t_{m-1} + (\Delta t)_m) - \frac{\tau_{i+1}^m - \tau_i^m}{h_{i+1}^m} = 0, \quad 2) 1 \leq |\tau_i^m| \leq \tau_s; \\
 ver_1 \in \{-1, -0\} : & \quad 1) |\tau_i^m| = \tau_s, \quad 2) P(t_{m-1} + (\Delta t)_m) - \frac{\tau_{i+1}^m - \alpha \cdot \tau_s}{h_{i+1}^m} = \alpha \cdot (\tau_s - 1) \frac{y_i^m - \xi^{m-1}}{(\Delta t)_m}.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Каждому внутреннему узлу в вязкопластической зоне ( $i = n^m + 1, \dots, N - 1$ ) – уравнение

$$\frac{2\tau_{i+1}^m h_i^m + 2\tau_{i-1}^m h_{i+1}^m - 2\tau_i^m (h_i^m + h_{i+1}^m)}{h_i^m h_{i+1}^m (h_i^m + h_{i+1}^m)} = \frac{\tau_i^m - \tau_i^{m-1}}{(\Delta t)_m}. \tag{17}$$

Узлу на верхней стенке ( $i = N$ ) – уравнение

$$\tau_i^m = \psi(t_{m-1} + (\Delta t)_m). \tag{18}$$

### 3. АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ

На каждом временном шаге выполняем следующую совокупность действий.

1. Задаем величину временного шага  $(\Delta t)_m$ .
2. Формируем множество версий. Выдвигаем одну из них.
3. Решаем систему, состоящую из разностной схемы (15)–(18) и ограничения (14).
- 3а. Если система имеет решение, то рассматриваемую версию объявляем истинной, оформляем решение и переходим на следующий временной шаг.
- 3б. Если система не имеет решения, то выдвигаем следующую версию и переходим к п.3.
4. Если множество версий исчерпано и ни одна из них не является истинной, то корректируем временной шаг в сторону уменьшения и переходим к п. 2.



**Пояснения.** 1. Хорошо зарекомендовал себя следующий способ задания временного шага:  $(\Delta t)_m = (\Delta t)_{m-1}/q$ ,  $0 < q < 1$ .

2. Множество версий данного временного шага формируется, исходя из найденного на предыдущем шаге значения напряжения на разделительной границе, по следующему правилу:

$$|\tau_{n^{m-1}}^{m-1}| = 1 \Rightarrow ver = \{0, +0, +1\}, \quad 1 < |\tau_{n^{m-1}}^{m-1}| < \tau_s \Rightarrow ver = \{0\},$$

$$|\tau_{n^{m-1}}^{m-1}| = \tau_s \Rightarrow ver = \{0, -0, -1\}.$$

Выдвинуть версию — значит указать на конкретную версию, в рамках которой будут выполняться дальнейшие действия.

3. Решение системы, состоящей из разностной схемы (15)–(18) и ограничения (14), осуществляется в два этапа.

Этап 1. Формирование и решение СЛАУ в аналитическом виде. Уравнения (15), (17), (18) и первое из уравнений (16) будем рассматривать как единую СЛАУ

$$A^{(m)}\tau^{(m)} = B^{(m)}, \tag{19}$$

где  $\tau^{(m)} = (\tau_1^m, \dots, \tau_N^m)^T$  — вектор узловых значений напряжения в узлах  $m$ -го слоя. Отметим, что матрица  $A^{(m)}$  является трехдиагональной.

Элементы матрицы  $A^{(m)}$  и столбца  $B^{(m)}$  выражаются через заданные функции времени  $P(t_{m-1} + (\Delta t)_m)$  и  $\psi(t_{m-1} + (\Delta t)_m)$ , известные узловые значения напряжения на предыдущем временном слое  $\tau^{(m-1)}$  и пространственные шаги сетки на рассматриваемом временном слое  $H^{(m)}(\delta)$ . Поэтому, решив СЛАУ (19), получим решение как функцию переменной  $\delta$ :  $\tau^{(m)} = \tau^{(m)}(\delta)$ . В частности, получим функцию

$$\tau_{n^{m+1}}^m = \tau_{n^{m+1}}^m(\delta). \tag{20}$$

**Примечание.** Современные математические системы, например MAPLE, способны давать решение СЛАУ в аналитическом виде.

Этап 2 (случай  $var \neq 0$ ). Численное решение нелинейного уравнения на интервале. Подставив правую часть соотношения (20) во второе условие сопряжения (16), получим следующее нелинейное уравнение относительно  $\delta$ :

$$ver \in \{+0, +1\} : P(t_m + (\Delta t)_m) - \frac{\tau_{n^{m+1}}^m(\delta) - \alpha}{\delta} = 0,$$

$$ver \in \{-0, -1\} : P(t_m + (\Delta t)_m) - \frac{\tau_{n^{m+1}}^m(\delta) - \alpha \cdot \tau_s}{\delta} = \alpha \cdot (\tau_s - 1) \frac{y_{n^{m-1}}^{m-1} + \delta - \xi^{m-1}}{(\Delta t)_m},$$

которое будем решать численно на интервале, задаваемом двойным неравенством (14). Уравнение либо не имеет решения, либо имеет конкретное решение  $\delta = \delta^*$ . В последнем случае рассматриваемая версия является истинной.

Этап 2 (случай  $var = 0$ ). Проверка второго условия (16). Полагаем  $\delta = h_{n^{m-1}+1}^{m-1}$  и проверяем двойное неравенство второго условия (16). Если оно выполнено, то версия  $var = 0$  является истинной. Полагаем  $\delta^* = \delta$ .

За истинное значение пространственного номера  $n^m$  разделительного узла принимаем то значение, которое соответствует истинной версии. За истинное значение временного шага принимаем фактическое значение  $(\Delta t)_m$  и вычисляем истинное время  $t_m = t_{m-1} + (\Delta t)_m$ . За истинные векторы узловых значений напряжения и пространственных шагов принимаем  $\tau^{(m)} = \tau^{(m)}(\delta^*)$ ,  $H^{(m)} = H^{(m)}(\delta^*)$ . Зная пространственные шаги, находим уровни  $y_i^m$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Затем находим положение границы раздела зон:  $\xi^m = y_{n^m}^m$ . Используя узловые значения напряжения, находим поле скоростей по формуле

$$v(y, t_m) = \begin{cases} \int_{\xi^m}^y (\tau(y, t_m) - \alpha) dy, & \xi^m < y \leq 1, \\ 0, & 0 \leq y \leq \xi^m, \end{cases}$$

с помощью какой-либо процедуры численного интегрирования.

4. Хорошо работает следующий способ корректировки временного шага:  $(\Delta t)_m = (\Delta t)_m \cdot q$ .



#### 4. ПРИМЕРЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Ниже в графической форме представлены результаты численного решения двух модельных задач. В обеих задачах на нижней стенке задается условие прилипания. На рис. 1 и рис. 3 серым цветом выделена зона вязкопластического течения. На рис. 2 и рис. 4 участки графиков, соответствующие жестким зонам, выполнены сплошной линией, а соответствующие вязкопластической зоне — пунктирной.

**Пример 1.**  $P(t) = 0$ ,  $\tau(1, t) = 2.25 \cdot \sin(3t)$ ,  $\tau(y, 0) = 0$ ,  $\tau_s = 1.5$  (рис. 1 и рис. 2).

Течение имеет периодический характер с периодом  $2\pi/3$ . На первом полупериоде течение осуществляется следующим образом. При  $0 \leq t < 0.24$  весь материал находится в жестком состоянии. В момент  $t = 0.24$  на верхней стенке зарождается вязкопластическая зона. При  $0.24 < t < 0.87$  имеются две зоны: вязкопластическая, прилегающая к верхней стенке, и жесткая, прилегающая к нижней стенке. В момент  $t = 0.87$  жесткая зона исчезает. При  $0.87 \leq t < 0.90$  весь материал находится в вязкопластическом состоянии.

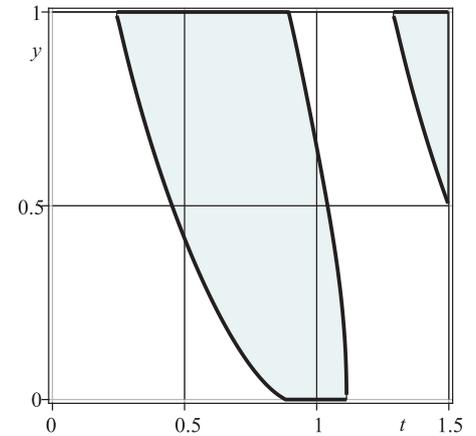
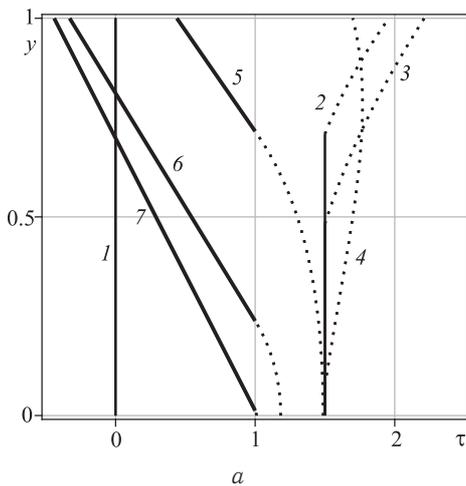


Рис. 1. Динамика изменения положения и размеров жестких и вязкопластической зон

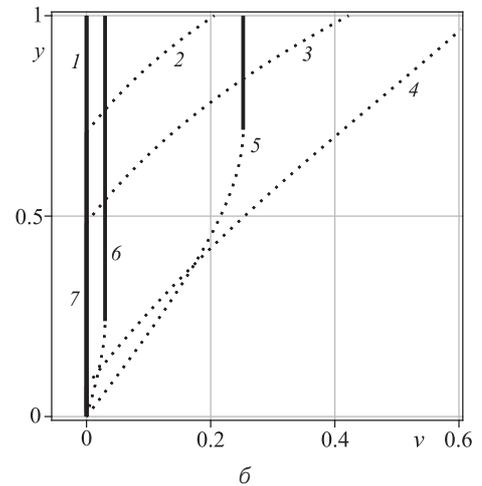


Рис. 2. Распределения напряжения (а) и скорости (б) по сечению канала. Графики 1–7 соответствуют моментам времени  $t = 0.00, 0.35, 0.46, 0.76, 0.98, 1.09, 1.11$

В момент  $t = 0.90$  на верхней стенке зарождается жесткая зона. При  $0.90 < t < 1.11$  имеются две зоны: вязкопластическая, прилегающая к нижней стенке, и жесткая, прилегающая к верхней стенке. В момент  $t = 1.11$  вязкопластическая зона исчезает, весь материал переходит в жесткое состояние и находится в этом состоянии до момента  $t = 1.29$ .

**Пример 2.**  $P = -8 \sin(4t)$ ,  $\tau(1, t) = 0$ ,  $\tau(y, 0) = 0$ ,  $\tau_s = 2$  (рис. 3 и 4).

Картина течения вязкопластического материала в канале следующая. При  $0 \leq t < 0.06$  весь материал находится в жестком состоянии. В момент  $t = 0.06$  на нижней стенке зарождается вязкопластическая зона. При  $0.06 < t < 0.93$  имеются две зоны: вязкопластическая, прилегающая к нижней стенке, и жесткая, прилегающая к верхней стенке.

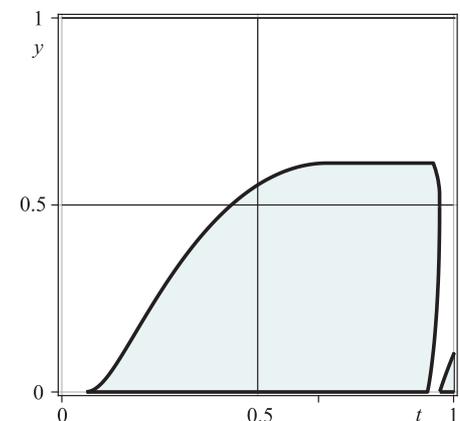


Рис. 3. Динамика изменения положения и размеров жестких и вязкопластической зон



В момент  $t = 0.93$  на нижней стенке зарождается жесткая зона. При  $0.93 < t < 0.96$  имеются три зоны: две жесткие, прилегающие к верхней и нижней стенкам, и вязкопластическая, находящаяся между ними. В момент  $t = 0.96$  жесткие зоны соединяются, и в этот же момент зарождается вязкопластическая зона на нижней стенке.

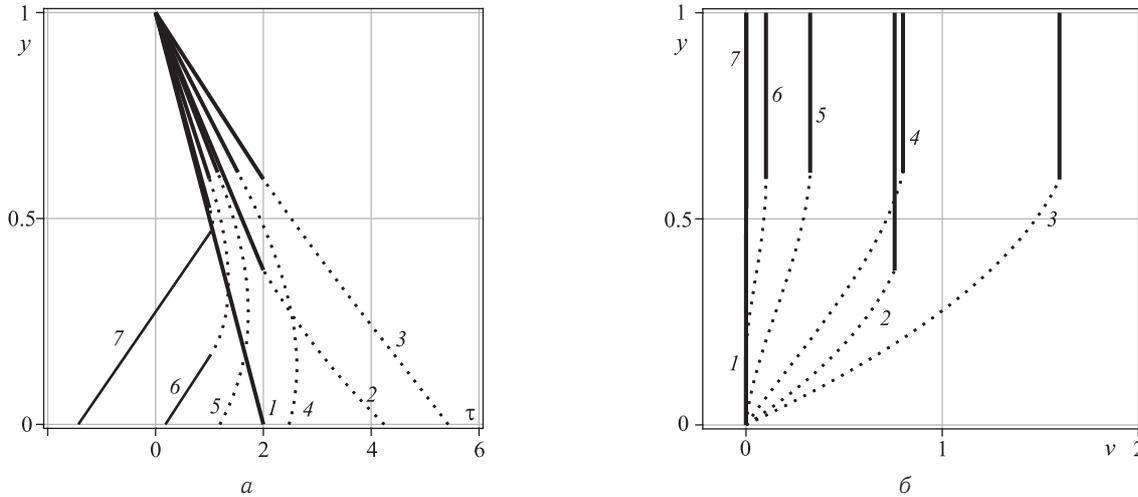


Рис. 4. Распределения напряжения (а) и скорости (б) по сечению канала. Графики 1–7 соответствуют моментам времени  $t = 0.06, 0.32, 0.58, 0.85, 0.92, 0.95, 0.96$

**Примечание.** Используя полученное решение, несложно построить решение задачи о движении материала Слибара – Паслая в канале с двумя неподвижными стенками. Расстояние (безразмерное) между стенками равно двум. Материал прилипает к стенкам канала. Течение вызывается гармонически изменяющимся во времени градиентом давления  $P = -8 \sin(4t)$ .

Для построения искомого решения необходимо продолжить решение примера 2 в область  $1 < y \leq 2$  по формулам

$$\begin{aligned} \tau(y, t) &= -\tau(2 - y, t), \\ v(y, t) &= v(2 - y, t). \end{aligned}$$

Отметим, что построенное решение будет иметь большее количество жестких и вязкопластических зон. Например, при  $0.93 < t < 0.96$  будет пять зон: три жесткие (две прилегают к стенкам канала и одна находится в его средней части) и две вязкопластические, находящиеся между жесткими зонами.

Метод версий, использованный в данной статье для численного моделирования течения материала Слибара – Паслая в канале, открывает новые возможности для решения широкого круга задач типа Стефана. В работах [3–5] он применялся при математическом моделировании теплофизических процессов с фазовыми переходами и течений вязкопластических сред.

### Библиографический список

1. Slibar A., Paslay P. R. Retarded Flow of Bingham Materials // J. of Appl. Mech. 1959. Vol. 26. P. 107–113.
2. Сафрончик М. И. Торможение пластины о слой «запаздывающей» вязкопластичной среды с учетом пристенного скольжения // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2009. Т. 9. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 2. С. 88–93.
3. Окулова Н. Н. Численно-аналитическое исследование задачи о распределении напряжений в вязкопластической полосе // Вестн. Самар. ун-та. Естественнонаучная сер. 2007. № 6. С. 78–84.
4. Окулов Н. А. Об одном численном методе решения одномерных задач типа Стефана // Вычислительные методы и программирование. 2011. Т. 12. С. 238–246.
5. Окулов Н. А. Упругий удар по вязкопластическому стержню // Вычисл. мех. сплош. сред. 2011. Т. 4, № 2. С. 96–109.