МАТЕМАТИКА

УДК 512.5

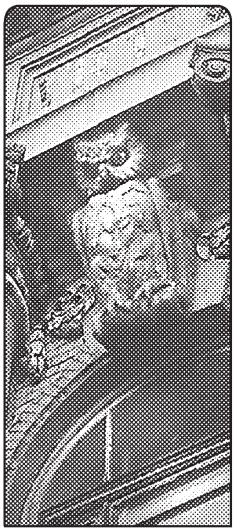
О СЕРИИ ПОДМНОГООБРАЗИЙ МНОГООБРАЗИЯ, ПОРОЖДЕННОГО ПРОСТОЙ БЕСКОНЕЧНОМЕРНОЙ АЛГЕБРОЙ КАРТАНОВСКОГО ТИПА ОБЩЕЙ СЕРИИ W_2

О. А. Богданчук

Аспирант, ассистент кафедры алгебро-геометрических вычислений, Ульяновский государственный университ, bogdanchuk_o_a@mail.ru

В работе изучаются числовые характеристики многообразий алгебр Ли над полем нулевой характеристики, в основном экспонента многообразия. Автором была построена дискретная серия алгебр Ли с различными дробными экспонентами роста коразмерностей, принадлежащая многообразию, порожденному простой бесконечномерной алгеброй Ли картановского типа общей серии W_2.

Ключевые слова: многообразие алгебр Ли, экспонента многообразия, полиномиальные тождества.



НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

Работа посвящена изучению многообразий алгебр Ли и их числовых характеристик. Все использованные, но не объясненные понятия можно найти в монографиях [1, 2]. Характеристика основного поля Φ предполагается равной нулю. На протяжении всей работы в относительно свободных алгебрах, а также при записи тождественных соотношений запись лиевской операции ведется без коммутаторных скобок. Кроме того, будем использовать левонормированную запись произведений, опуская скобки, т. е. $(ab)c = abc$. Коммутаторные скобки используем только в конкретных алгебрах Ли, которые построены из соответствующих ассоциативных алгебр, в которых ab обозначает результат ассоциативного умножения элементов алгебры.

Пусть $\mathbf{V}$ — многообразие алгебр Ли, а $F(\mathbf{V})$ — его относительно свободная алгебра счетного ранга, порожденная элементами $x_1, x_2, \ldots$. Обозначим через $P_n(\mathbf{V})$ подпространство полилинейных элементов от $x_1, \ldots, x_n$ в $F(\mathbf{V})$, а через $c_n(\mathbf{V}) = \dim P_n(\mathbf{V})$ — его размерность. Рост числовой последовательности $c_n(\mathbf{V})$ называют ростом многообразия $\mathbf{V}$. Если последовательность $c_n(\mathbf{V})$ мажорируется экспонентой a^n для подходящего a, то существуют пределы

$$LEXP(\mathbf{V}) = \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(\mathbf{V})}, \qquad HEXP(\mathbf{V}) = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(\mathbf{V})},$$

которые называют нижней и верхней экспонентой многообразия $\mathbf{V}$. Если предел последовательности $\sqrt[n]{c_n(\mathbf{V})}$ существует, то он называется PI-экспонентой или просто экспонентой многообразия $\mathbf{V}$:

$$EXP(\mathbf{V}) = LEXP(\mathbf{V}) = HEXP(\mathbf{V}).$$

Пусть $R_k = \Phi[t_1, t_2, \ldots, t_k]$ — кольцо многочленов от переменных $t_1, t_2, \ldots, t_k$ над полем Φ. Всякий элемент бесконечномерной простой алгебры Ли картановского типа общей серии W_k может быть записан в виде $\sum\limits_{i=1}^{k} f_i\partial_i$, где ∂_i — оператор взятия частной производной по t_i, а $f_i \in R_k$, $i = 1, \ldots, k$. В этой алгебре лиевской операцией является коммутирование операторов. Обозначим через $\mathbf{W_k}$ многообразие, порожденное соответствующей алгеброй W_k. В работе [3] было доказано, что для верхних экспонент многообразий $\mathbf{W_k}$ выполняются неравенства

$$HEXP(\mathbf{W_k}) \le k(1+k)(1+1/k)^k.$$

В этой же статье была высказана гипотеза о том, что экспонента многообразия, порожденного алгеброй W_k, существует и равна верхней оценке из приведенного выше неравенства, т. е. $EXP(\mathbf{W_k}) = k(k+1)(1+1/k)^k$. Давно известно, что экспонента многообразия $\mathbf{W_1}$ равна 4 (см. [4]). В случае же многообразия, порожденного алгеброй W_2, экспонента целым числом не является. В работе [3] доказано, что в случае поля нулевой характеристики экспонента многообразия $\mathbf{W_2}$ является дробной:

$$13,1 < LEXP(\mathbf{W_2}) \le HEXP(\mathbf{W_2}) < 13,5.$$

Напомним еще раз строение простой бесконечномерной алгебры Ли картановского типа общей серии W_2. Пусть $R_2 = \Phi[t_1, t_2]$ — кольцо многочленов от переменных t_1, t_2. Алгебра W_2 состоит из дифференциальных операторов первого порядка вида

$$f_1\partial_1 + f_2\partial_2,$$

где ∂_i — оператор взятия частной производной по t_i, а $f_i \in R_2$, $i = 1, 2$. Относительно операции коммутирования множество W_2 является алгеброй Ли, причем результат коммутирования двух операторов первого порядка будет также оператором первого порядка. Проверим этот хорошо известный факт в явном виде. Действительно, выпишем результат коммутирования двух дифференциальных операторов, каждый из которых состоит из одного слагаемого. Для этого применим коммутатор к многочлену $h \in R_2$

$$\begin{aligned}
[f_1\partial_1, f_2\partial_2](h) &= f_1\partial_1(f_2\partial_2(h)) - f_2\partial_2(f_1\partial_1(h)) = f_1\partial_1\left(f_2\frac{\partial h}{\partial t_2}\right) - f_2\partial_2\left(f_1\frac{\partial h}{\partial t_1}\right) = \\
&= f_1\frac{\partial f_2}{\partial t_1}\frac{\partial h}{\partial t_2} + f_1 f_2\frac{\partial^2 h}{\partial t_2\partial t_1} - f_2\frac{\partial f_1}{\partial t_2}\frac{\partial h}{\partial t_1} - f_2 f_1\frac{\partial^2 h}{\partial t_1\partial t_2} = \\
&= f_1\frac{\partial f_2}{\partial t_1}\frac{\partial h}{\partial t_2} - f_2\frac{\partial f_1}{\partial t_2}\frac{\partial h}{\partial t_1} = \left(f_1\frac{\partial f_2}{\partial t_1}\partial_2 - f_2\frac{\partial f_1}{\partial t_2}\partial_1\right)(h).
\end{aligned}$$

Итак,

$$[f_1\partial_1, f_2\partial_2] = f_1\frac{\partial f_2}{\partial t_1}\partial_2 - f_2\frac{\partial f_1}{\partial t_2}\partial_1.$$

Договоримся опускать в произведениях элементов алгебры W_2 коммутаторные скобки в случае их левонормированной расстановки, т. е.

$$[[[a, b], c], d] = [a, b, c, d],$$

где a, b, c, d — некоторые элементы алгебры W_2. В работе [5] была получена дискретная серия алгебр Ли L_s, где $s = 3, 4, \ldots$, с различными дробными экспонентами роста их коразмерностей. Дадим определение алгебры L_s. Пусть $\mathbf{A}^2$ — многообразие всех метабелевых алгебр Ли, определенное тождеством

$$(x_1x_2)(x_3x_4) \equiv 0\,,$$

а $M_s = F_s(\mathbf{A}^2)$, $s = 3, 4, \ldots$ — относительно свободная алгебра ранга s этого многообразия с множеством свободных образующих $\{z_0, z_1, \ldots, z_{s-1}\}$. Рассмотрим линейное преобразование d векторного пространства $\langle z_0, z_1, \ldots, z_{s-1}\rangle$, действующее по правилу $z_id = z_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, s-1$, $z_0d = 0$. Так как M_s — относительно свободная алгебра, то отображение d можно продолжить до дифференцирования алгебры M_s, которое мы обозначим той же буквой. Напомним, что дифференцированием d некоторой алгебры A называется линейное отображение алгебры в себя, удовлетворяющее условию

$$(xy)d = (xd)y + x(yd), \tag{1}$$

где x, y — элементы алгебры A. Вернемся к построению алгебры L_s. Линейная оболочка построенного дифференцирования $\langle d\rangle$ алгебры L_s относительно операции коммутирования является одномерной алгеброй Ли с нулевым умножением. Поэтому можно определить полупрямое произведение (см. [1, п. 1.4.4, с. 16]) алгебр M_s и $\langle d\rangle$, которое обозначим $L_s = M_s \leftthreetimes \langle d\rangle$. Отметим, что алгебра M_s является метабелевым идеалом коразмерности 1 алгебры L_s. Поясним, что как векторное пространство алгебра L_s является прямой суммой пространств M_s и $\langle d\rangle$, т. е. $L_s = M_s \bigoplus \langle d\rangle$. Элементы алгебры L_s умножаются следующим образом:

$$(x+\alpha d)(y+\beta d) = xy + \beta xd - \alpha yd,$$

где x, y — элементы относительно свободной метабелевой алгебры M_s, xy — их лиевское произведение, а xd и yd — результаты действия дифференцирования d на элементы x и y соответственно.

Многообразие, порожденное алгеброй L_s, обозначим как $\mathbf{L_s}$, $s = 3, 4, \ldots$, и сформулируем доказанную в работе [5] теорему об экспонентах этих многообразий. Для экспонент роста коразмерностей алгебр Ли L_s выполняются строгие неравенства:

$$3 = EXP(\mathbf{L_3}) < \cdots < EXP(\mathbf{L_s}) < EXP(\mathbf{L_{s+1}}) < \cdots < 4\,, \quad \text{где} \quad s = 4, 5, \ldots\ .$$

Хорошо известно, что в алгебре W_1 выполняется стандартное лиевское тождество степени пять, которое имеет вид

$$\sum_{p\in S_4} (-1)^p x_0 x_{p(1)} x_{p(2)} x_{p(3)} x_{p(4)} \equiv 0,$$

где S_4 — симметрическая группа, а $(-1)^p$ — четность перестановки. Однако это тождество не выполняется в алгебрах L_s, где $s = 3, 4, \ldots$, поэтому алгебры L_s не лежат в многообразии $\mathbf{W_1}$. Действительно, для проверки этого факта достаточно подставить элементы z_0, z_1, z_2, z_3, d алгебры L_4 вместо переменных тождества x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 соответственно и получить ненулевой результат подстановки. Оказалось, что многообразию $\mathbf{W_2}$ рассматриваемая серия алгебр уже принадлежит. Сформулируем основной результат этой работы.

Теорема. *Дискретная серия алгебр Ли L_s с различными дробными экспонентами роста коразмерностей принадлежит многообразию, порожденному простой бесконечномерной алгеброй Ли картановского типа общей серии W_2.*

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно проверить, что любое тождество, которое не выполняется в алгебре L_s, также не выполняется в алгебре W_2. Предположим, что произвольное тождественное соотношение степени $n+1$ не выполняется в алгебре L_s. Тогда существуют такие элементы этой алгебры, после подстановки которых вместо переменных тождества получаем ненулевой элемент алгебры L_s. Пусть вместо k образующих был подставлен элемент d. Обозначим эти образующие буквой b. А вместо остальных m ($m = n+1-k$) образующих подставлены некоторые z_i или их произведения, которые мы, в свою очередь, переобозначим как y_0, $y_1, \ldots, y_m$. Так как $ad\,b$ является дифференцированием алгебры и действует по правилу (1), то дифференцируя образующую b необходимое число раз, перепишем наше тождественное соотношение в виде суммы левонормированных произведений элементов вида $y_s(ad\,b)^p$. После подстановки базисных элементов алгебры L_s мы можем менять местами скобки начиная с третьей, так как алгебра M_s является метабелевой. Это же свойство перестановки скобок выполняется и после подстановки элементов из алгебры W_2, что будет следовать из того типа подстановки, о которой будет рассказано ниже. Сделаем подстановки вместо образующих элементов алгебры L_s и W_2 и, производя одинаковые преобразования в обоих случаях, перепишем полученное выражение, считая, что элементы алгебр уже подставлены, но не производя вычислений. При этом еще раз заметим, что мы одновременно производим преобразования, переставляя скобки начиная с третьей и приводя подобные.

В базисе алгебры L_s, кроме z_i и d, есть еще произведения свободных образующих метабелевой алгебры M_s, но произведение может быть подставлено только один раз. Так как если мы подставим произведение два раза, то по свойству метабелевости алгебры M_s получим ноль. Любой из $y_s(ad\,b)^p$ можно «вынести» на первое место, так как мы работаем в алгебре Ли. Будем считать, что если вместо одного из y_i мы подставили произведение, то именно его мы вынесем на первое место. Упорядочим скобки начиная с третьей, по возрастанию индекса i элементов y_i. Тогда тождественное соотношение после подстановки элементов из L_s или из W_2 будет иметь вид

$$\sum_{i,k_0,k_1,\ldots,k_m} \alpha_{i,k_0,k_1,\ldots,k_m}(y_0 b^{k_0})(y_i b^{k_i})(y_1 b^{k_1})\ldots(y_{i-1}b^{k_{i-1}})(y_{i+1}b^{k_{i+1}})\ldots(y_m b^{k_m}). \qquad (2)$$

Так как результат подстановки элементов из L_s, по нашему предположению, отличен от нуля, то хотя бы один из коэффициентов в сумме (2) отличен от нуля. Без ограничения общности будем считать, что таким ненулевым коэффициентом является $\alpha_{i,k_0,k_1,\ldots,k_m}$.

Обозначим через φ подстановку элементов алгебры W_2 и определим ее следующим образом:

$$\varphi(b) = \partial_2,\ \varphi(y_i) = t_1^m t_2^{k_i}\partial_1,\ \varphi(y_j) = t_2^{k_j}\partial_1, \text{ при } j \neq i.$$

Докажем, что в результате такой подстановки элементов алгебры W_2 в сумму (2) остается единственное ненулевое слагаемое вида

$$\alpha_{i,k_0,k_1,\ldots,k_m}(y_0 b^{k_0})(y_i b^{k_i})(y_1 b^{k_1})\ldots(y_{i-1}b^{k_{i-1}})(y_{i+1}b^{k_{i+1}})\ldots(y_m b^{k_m}). \qquad (3)$$

Рассмотрим любое другое слагаемое. Возможны два случая. В первом случае слагаемое имеет вид

$$\alpha_{i,p_0,p_1,\ldots,p_m}(y_0 b^{p_0})(y_i b^{p_i})(y_1 b^{p_1})\ldots(y_{i-1}b^{p_{i-1}})(y_{i+1}b^{p_{i+1}})\ldots(y_m b^{p_m}),$$

где $(p_0,p_1,\ldots,p_m) \neq (k_0,k_1,\ldots,k_m)$.

Чтобы такое слагаемое не было равно нулю, требуется выполнение следующих неравенств: $p_0 \leq k_0$, $p_1 \leq k_1,\ldots,p_m \leq k_m$. Но $\sum\limits_{i=0}^{m} p_i = k$ и $\sum\limits_{i=0}^{m} k_i = k$, поэтому неравенства превращаются в равенства $p_l = k_l$, $l = 0,\ldots,m$. Другими словами, приходим к слагаемому вида (3). Во втором случае слагаемое такое, что первые два сомножителя имеют вид $(y_0 b^{p_0})(y_j b^{p_j})$, где $i \neq j$. Здесь возможны три подслучая. Если $p_0 > k_0$, то, исходя из вида подстановки φ, $y_0 b^{p_0} = 0$. Аналогично, если $p_j > k_j$, то $y_j b^{p_j} = 0$. Остается третий вариант, когда $p_0 \leq k_0$ и $p_j \leq k_j$. В этом случае результат произведения первых двух скобок равен

$$(-1)^{p_0+p_j} k_0(k_0-1)\ldots(k_0-p_0)k_j(k_j-1)\ldots(k_j-p_j)[t_2^{k_0-p_0}\partial_1, t_2^{k_j-p_j}\partial_1] = 0.$$

Таким образом, в результате такой подстановки элементов алгебры W_2 в сумму (2) остается единственное ненулевое слагаемое. Заметим, что оно имеет вид $\beta\partial_1$, где $\beta = (-1)^m \cdot m! \cdot \prod_{i=0}^{m}(k_i)!$. А это значит, что тождество не выполняется в алгебре W_2. Теорема доказана.

Выражаю благодарность моему научному руководителю профессору Сергею Петровичу Мищенко за постановку задачи, постоянное внимание и интерес к работе.

Библиографический список

1. *Бахтурин Ю. А.* Тождества в алгебрах Ли. М. : Наука, 1985. 448 с.
2. *Giambruno A., Zaicev M.* Polynomial Identities and Asymptotic Methods // Mathematical Surveys and Monographs. Providence, RI : American Math. Soc., 2005. Vol. 122. 352 p.
3. *Мищенко С. С.* Новый пример многообразия алгебр Ли с дробной экспонентой // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика и механика. 2011. № 6. С. 44—47.
4. *Кириллов А. А., Молев А. И.* Об алгебраической структуре алгебры Ли векторных полей. Препринт № 16. М. : Ин-т прикл. математики им. М. В. Келдыша АН СССР, 1985. 23 с.
5. *Malyusheva O. A., Mishchenko S. P., Verevkin A. B.* Series of varieties of Lie algebras of different fractional exponents // Compt. rend. Acad. Bulg. Sci. 2013. Vol. 66, № 3. P. 321–330.

On Subvariety of Variety Generated by a Simple Infinite Lie Algebra of Cartan Type General Series W_2

O. A. Bogdanchuk

Ulyanovsk State University, 42, Leo Tolstoy str., 432970, Ulyanovsk, Russia, bogdanchuk_o_a@mail.ru

We consider numerical characteristics of Lie algebras variety over a field of characteristic zero, basically, the exponent of variety. Here, was constructed the infinite series of varieties of Lie algebras with different fractional exponents, which belong to variety generated by a simple infinite Lie algebra of Cartan type general series W_2.

Key words: variety of Lie algebras, identity, exponent of variety.

References

1. Bakhturin Iu. A. *Tozhdestva v algebrakh Li* [Identities in Lie algebras]. Moscow, Nauka, 1985, 448 p. (in Russian).
2. Giambruno A., Zaicev M. Polynomial Identities and Asymptotic Methods. *Mathematical Surveys and Monographs*. Providence, RI, American Math. Soc., 2005, vol. 122, 352 p.
3. Mishchenko S. S. New example of a variety of Lie algebras with fractional exponent *Russian Math.* [Moscow Univ. Math. Bull.], 2011, vol. 66, pp. 264–266.
4. Kirillov A. A., Molev A. I. *On the algebraic structure of the Lie algebra of vector fields*. Preprint no. 16. Moscow, In-t prikl. matematiki im. M. V. Keldysha AN SSSR, 1985, 23 p. (in Russian).
5. Malyusheva O. A., Mishchenko S. P., Verevkin A. B. Series of varieties of Lie algebras of different fractional exponents. *Compt. rend. Acad. Bulg. Sci.*, 2013, vol. 66, no. 3, pp. 321–330.

УДК 517.518

ВЕСОВАЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ СУММ РЯДОВ ПО МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ СИСТЕМАМ

С. С. Волосивец[1], Р. Н. Фадеев[2]

[1]Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций и приближений, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, VolosivetsSS@mail.ru

[2]Аспирант кафедры теории функций и приближений, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, belal_templier@mail.ru

Получены необходимые и достаточные условия L^p-интегрируемости со степенным весом функции f, представимой рядом по мультипликативной системе с обобщенно-монотонными коэффициентами. Интегрируемость мажоранты частичных сумм представляющего функцию ряда описывается теми же условиями. Кроме того, мы изучаем интегрируемость разностного отношения $(f(x) - f(0))/x$.

Ключевые слова: весовая L^p-интегрируемость, мультипликативная система, степенной вес, обобщенно-монотонная последовательность.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\{p_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$, $2 \le p_n \le N$. По определению $m_0 = 1$, $m_n = p_n m_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, тогда каждое $x \in [0, 1)$ имеет разложение вида

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n/m_n, \quad x_n \in \mathbb{Z}_+ \cap [0, p_n). \tag{1}$$

Разложение (1) будет единственным, если для $x = k/m_l$, $k, l \in \mathbb{Z}_+$, $0 < k < m_l$, брать разложение с конечным числом $x_n \ne 0$. Каждое $k \in \mathbb{Z}_+$ единственным образом представимо в виде $k = \sum\limits_{i=1}^{\infty} k_i m_{i-1}$, $k_i \in \mathbb{Z}_+ \cap [0, p_i)$. Для $x \in [0, 1)$ и $k \in \mathbb{Z}_+$ положим по определению $\chi_k(x) = \exp\left(2\pi i \sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j k_j/m_j\right)$. Система $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ является ортонормированной на $[0, 1)$ и полной в $L^1[0, 1)$. Подробнее о ее свойствах см. [1, § 1.5]. Измеримая на $[0, 1)$ функция $f(x)$ принадлежит пространству $L^r_\alpha[0, 1)$, $1 \le r < \infty$, $\alpha \in \mathbb{R}$, если конечна норма $\|f\|_{r,\alpha} = \left(\int_0^1 |f(x)|^r x^\alpha\, dx\right)^{1/r}$.

Сумма $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \chi_k(x) =: D_n(x)$ называется n-м ядром Дирихле. Для ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \chi_k(x) \tag{2}$$

