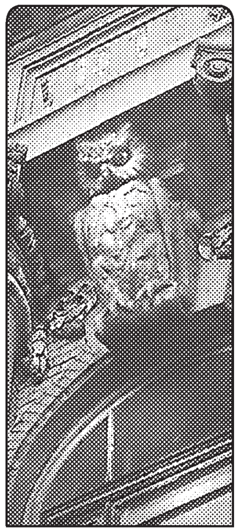

НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

МАТЕМАТИКА

УДК 517.956

КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА МНОГОМЕРНЫХ ЭЛЛИПТИКО-ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

С. А. Алдашев

Алдашев Серик Аймурзаевич, доктор физико-математических наук, профессор, Казахский национальный педагогический университет им. Абая, Алматы, Казахстан, aldash51@mail.ru

Корректность краевых задач на плоскости для эллиптических уравнений методом теории аналитических функций комплексного переменного хорошо изучены. При исследовании аналогичных вопросов, когда число независимых переменных больше двух, возникают трудности принципиального характера. Весьма привлекательный и удобный метод сингулярных интегральных уравнений теряют свою силу из-за отсутствия сколько-нибудь полной теории многомерных сингулярных интегральных уравнений. В работе используется метод, предложенный в работах автора, показана однозначная разрешимость и получен явный вид задачи Дирихле в цилиндрической области для одного класса многомерных эллиптико-параболических уравнений.

Ключевые слова: корректность, многомерные уравнения, задача Дирихле, функция Бесселя.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-2-125-132

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И РЕЗУЛЬТАТ

Для общих эллиптико-параболическких уравнений второго порядка постановку первой краевой задачи (или задачи Дирихле) впервые осуществил Г. Фикера [1]. Дальнейшее изучение этой задачи приведено в [2].

В данной работе для одного класса многомерных эллиптико-параболических уравнений доказана однозначная разрешимость и получен явный вид классического решения задачи Дирихле в цилиндрической области. В работе используется метод, предложенный в работах [3, 4].

Пусть $\Omega_{\alpha\beta}$ — цилиндрическая область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, \ldots, x_m, t)$, ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x,t) : |x| = 1\}$, плоскостями $t = \alpha > 0$ и $t = \beta < 0$, где $|x|$ — длина вектора $x = (x_1, \ldots, x_m)$.

Обозначим через Ω_α и Ω_β части области $\Omega_{\alpha\beta}$, а через Γ_α, Γ_β — части поверхности Γ, лежащие в полупространствах $t > 0$ и $t < 0$; σ_α — верхнее, а σ_β — нижнее основание области $\Omega_{\alpha\beta}$.

Пусть далее S — общая часть границ областей Ω_α, Ω_β, представляющая множество $\{t = 0,\ 0 < |x| < 1\}$ в E_m.

В области $\Omega_{\alpha\beta}$ рассмотрим вырождающиеся смешанно-эллиптико-параболические уравнения:

$$\begin{cases} \Delta_x u + u_{tt} + \sum\limits_{i=1}^{m} a_i(x,t) u_{x_i} + b(x,t) u_t + c(x,t) u = 0, & t > 0, \\ \Delta_x u - u_t + \sum\limits_{i=1}^{m} d_i(x,t) u_{x_i} + e(x,t) u = 0, & t < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где Δ_x — оператор Лапласа по переменным $x_1, \ldots, x_m$, $m \geqslant 2$.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1, \ldots, x_m$, t к сферическим r, $\theta_1, \ldots, \theta_{m-1}$, t, $r \geqslant 0$, $0 \leqslant \theta_i \leqslant \pi$, $i = 2, 3, \ldots, m-2$, $0 \leqslant \theta_{m-1} < 2\pi$, $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_{m-1})$.

Задача 1 (Дирихле). Найти решение уравнения (1) в области $\Omega_{\alpha\beta}$ при $t \neq 0$ из класса $C(\overline{\Omega}_{\alpha\beta}) \cap \cap C^2(\Omega_\alpha \cup \Omega_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям:

$$u|_{\sigma_\alpha} = \varphi_1(r,\theta), \qquad u|_{\Gamma_\alpha} = \psi_1(t,\theta), \tag{2}$$

$$u|_{\Gamma_\beta} = \psi_2(t,\theta), \qquad u|_{\sigma_\beta} = \varphi_2(r,\theta), \tag{3}$$

при этом $\varphi_1(1,\theta) = \psi_1(\alpha,\theta)$, $\varphi_2(1,\theta) = \psi_2(\beta,\theta)$, $\psi_1(0,\theta) = \psi_2(0,\theta)$.

Пусть $\left\{Y_{n,m}^k(\theta)\right\}$ — система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \leqslant k \leqslant k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $W_2^l(S)$, $l = 0, 1, \ldots$, — пространства Соболева.

Имеют место следующие леммы [5].

Лемма 1. *Пусть $f(r,\theta) \in W_2^l(S)$. Если $l \geqslant m-1$, то ряд*

$$f(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{4}$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p \leqslant l-m+1$, сходятся абсолютно и равномерно.

Лемма 2. *Для того, чтобы $f(r,\theta) \in W_2^l(S)$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда* (4) *удовлетворяли неравенствам*

$$|f_0^1(r)| \leqslant c_1, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{2l} |f_n^k(r)|^2 \leqslant c_2, \qquad c_1, c_2 = \mathrm{const}.$$

Через $\widetilde{d}_{in}^k(r,t)$, $d_{in}^k(r,t)$, $\widetilde{e}_n^k(r,t)$, $\widetilde{d}_n^k(r,t)$, ρ_n^k, $\overline{\varphi}_{1n}^k(r)$, $\overline{\varphi}_{2n}^k(r)$, $\psi_{1n}^k(t)$, $\psi_{2n}^k(t)$ обозначим коэффициенты разложения ряда (4), соответственно функций $d_i(r,\theta,t)\rho$, $d_i \frac{x_i}{r}\rho$, $e(r,\theta,t)\rho$, $d(r,\theta,t)\rho$, $\rho(\theta)$, $i = 1, \ldots, m$, $\varphi_1(r,\theta)$, $\varphi_2(r,\theta)$, $\psi_1(t,\theta)$, $\psi_2(t,\theta)$, причем $\rho(\theta) \in C^\infty(H)$, H — единичная сфера в E_m.

Пусть $a_i(r,\theta,t)$, $b(r,\theta,t)$, $c(r,\theta,t) \in W_2^l(\Omega_\alpha) \subset C(\bar{\Omega}_\alpha)$, $d_i(r,\theta,t)$, $e(r,\theta,t) \in W_2^l(\Omega_\beta)$, $i = 1, \ldots, m, l \geqslant m+1$, $c(r,\theta,t) \leqslant 0$ для всех $l(r,\theta,t) \in \Omega_\alpha$, $e(r,\theta,t) \leqslant 0$ для всех $(r,\theta,t) \in \Omega_\beta$.

Тогда справедлива

Теорема. *Если $\varphi_1(r,\theta)$, $\varphi_2(r,\theta) \in W_2^p(S)$, $\psi_1(t,\theta) \in W_2^p(\Gamma_\alpha)$, $\psi_2(t,\theta) \in W_2^l(\Gamma_\beta)$, $p > 3m/2$, то задача* 1 *однозначно разрешима.*

Отметим,что это теорема для модельного многомерного эллиптико-параболического уравнения получена в [3].

2. РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ 1

Сначала покажем разрешимость задачи (1), (3). В сферических координатах уравнения (1) в области Ω_β имеет вид

$$L_1 u \equiv u_{rr} + \frac{m-1}{r} u_r - \frac{1}{r^2} \delta u - u_t + \sum_{i=1}^{m} d_i(r,\theta,t) u_{x_i} + e(r,\theta,t) u = 0, \tag{5}$$

$$\delta \equiv -\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j sin^{m-j-1}\theta_j} \frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(sin^{m-j-1}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\right), \qquad g_1 = 1, \qquad g_j = (\sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{j-1})^2, \qquad j > 1.$$

Известно [5], что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n+m-2)$, $n = 0, 1, \ldots$, каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y_{n,m}^k(\theta)$.

Искомое решение задачи 1 в области Ω_β будем искать в виде

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}_n^k(r, t) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{6}$$

где $\bar{u}_n^k(r, t)$ — функции, подлежащие определению.

Подставив (6) в (5), умножив полученное выражение на $\rho(\theta) \neq 0$ и проинтегрировав в сфере H для $\overline{u}_n^k$, получим [6–8]:

$$\rho_0^1 \bar{u}_{0rr}^1 - \rho_0^1 \bar{u}_{0t}^1 + \left(\frac{m-1}{r}\rho_0^1 + \sum_{i=1}^{m} d_{i0}^1\right)\bar{u}_{0r}^1 + \tilde{e}_0^1 \bar{u}_0^1 + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\Big\{\rho_n^k \bar{u}_{nrr}^k - \rho_n^k \bar{u}_{nt}^k +$$
$$+ \left(\frac{m-1}{r}\rho_n^k + \sum_{i=1}^{m} d_{in}^k\right)\bar{u}_{nr}^k + \left[\tilde{e}_n^k - \lambda_n \frac{\rho_n^k}{r^2} + \sum_{i=1}^{m}(\tilde{d}_{in-1}^k - n d_n^k)\right]\bar{u}_n^k\Big\} = 0. \tag{7}$$

Теперь рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений:

$$\rho_0^1 \bar{u}_{0rr}^1 - \rho_0^1 \bar{u}_{0t}^1 + \frac{(m-1)}{r}\rho_0^1 \bar{u}_{0r}^1 = 0, \tag{8}$$

$$\rho_1^k \bar{u}_{1rr}^k - \rho_1^k \bar{u}_{1t}^k + \frac{(m-1)}{r}\rho_1^k \bar{u}_{1r}^k - \frac{\lambda_1}{r^2}\rho_1^k \bar{u}_1^k = -\frac{1}{k_1}\left(\sum_{i=1}^{m} d_{i0}^1 \bar{u}_{0r}^1 + \tilde{e}_0^1 \bar{u}_0^1\right), \quad n = 1, \quad k = \overline{1, k_1}, \tag{9}$$

$$\rho_n^k \bar{u}_{nrr}^k - \rho_n^k \bar{u}_{nt}^k + \frac{(m-1)}{r}\rho_n^k \bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\rho_n^k \bar{u}_n^k = -\frac{1}{k_n}\sum_{k=1}^{k_{n-1}}\Big\{\sum_{i=1}^{m} d_{in-1}^k \bar{u}_{n-1r}^k +$$
$$+ \left[\tilde{e}_{n-1}^k + \sum_{i=1}^{m}(\tilde{d}_{in-2}^k - (n-1)d_{in-1}^k)\right]\bar{u}_{n-1}^k\Big\}, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 2, 3 \ldots. \tag{10}$$

Суммируя уравнение (9) от 1 до k_1, уравнение (10) — от 1 до k_n, а затем сложив полученные выражения вместе с уравнением (8), получим уравнение (7).

Отсюда следует, что если $\{\bar{u}_n^k\}$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, \ldots$, — решение системы (8)–(10), то оно является решением уравнения (7).

Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (8)–(10) можно представить в виде

$$\bar{u}_{nrr}^k - \bar{u}_{nt}^k + \frac{(m-1)}{r}\bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar{u}_n^k = \bar{f}_n^k(r, t), \tag{11}$$

где $\bar{f}_n^k(r, t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, причем $\bar{f}_0^1(r, t) \equiv \equiv 0$.

Далее из краевого условия (3) в силу (6) будем иметь

$$\bar{u}_n^k(r, \beta) = \bar{\varphi}_{2n}^k(r), \qquad \bar{u}_n^k(1, t) = \psi_{2n}^k(t), \qquad k = \overline{1, k_n}, \qquad n = 0, 1, \ldots. \tag{12}$$

В (11), (12), произведя замену $\bar{v}_n^k(r, t) = \bar{u}_n^k(r, t) - \psi_{2n}^k(t)$, получим:

$$\bar{v}_{nrr}^k + \frac{(m-1)}{r}\bar{v}_{nr}^k - \bar{v}_{nt}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar{v}_n^k = f_n^k(r, t), \tag{13}$$

$$\bar{v}_n^k(r, \beta) = \varphi_{2n}^k(r), \quad \bar{v}_n^k(1, t) = 0, \qquad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{14}$$

$$f_n^k(r, t) = \bar{f}_n^k(r, t) + \psi_{2nt}^k + \frac{\lambda_n}{r^2}\psi_{2n}^k, \qquad \varphi_{2n}^k(r) = \bar{\varphi}_{2n}^k(r) - \psi_{2n}^k(\beta).$$

Произведя замену $\bar{\upsilon}_n^k(r,t) = r^{(1-m)/2}\upsilon_n^k(r,t)$, задачу (13), (14) приведем к следующей задаче:

$$L\upsilon_n^k \equiv \upsilon_{nrr}^k - \upsilon_{nt}^k + \frac{\overline{\lambda}_n}{r^2}\upsilon_n^k = \tilde{f}_n^k(r,t), \tag{15}$$

$$\upsilon_n^k(r,\beta) = \tilde{\varphi}_{2n}^k(r), \qquad \upsilon_n^k(1,t) = 0, \tag{16}$$

$$\bar{\lambda}_n = \frac{(m-1)(3-m) - 4\lambda_n}{4}, \qquad \widetilde{f}_n^k(r,t) = r^{\frac{(m-1)}{2}} f_n^k(r,t), \qquad \tilde{\varphi}_{2n}^k(r) = r^{(m-1)/2}\varphi_{2n}^k(r).$$

Решение задачи (15), (16) ищем в виде

$$\upsilon_n^k(r,t) = \upsilon_{1n}^k(r,t) + \upsilon_{2n}^k(r,t), \tag{17}$$

где $\upsilon_{1n}^k(r,t)$ — решение задачи

$$L\upsilon_{1n}^k = \widetilde{f}_n^k(r,t), \tag{18}$$

$$\upsilon_{1n}^k(r,\beta) = 0, \qquad \upsilon_{1n}^k(1,t) = 0, \tag{19}$$

а $\upsilon_{2n}^k(r,t)$ — решение задачи

$$L\upsilon_{2n}^k = 0, \tag{20}$$

$$\upsilon_{2n}^k(r,\beta) = \tilde{\varphi}_{2n}^k(r), \qquad \upsilon_{2n}^k(1,t) = 0. \tag{21}$$

Решение вышеуказанных задач рассмотрим в виде

$$\upsilon_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} R_s(r) T_s(t), \tag{22}$$

при этом пусть

$$\tilde{f}_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n}(t) R_s(r), \qquad \tilde{\varphi}_{2n}^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n} R_s(r). \tag{23}$$

Подставляя (22) в (18), (19) с учетом (23), получим:

$$R_{srr} + \frac{\overline{\lambda}_n}{r^2} R_s + \mu R_s = 0, \qquad 0 < r < 1, \tag{24}$$

$$R_s(1) = 0, \qquad |R_s(0)| < \infty, \tag{25}$$

$$T_{st} + \mu T_s(t) = -a_{s,n}(t), \qquad \beta < t < 0, \tag{26}$$

$$T_s(\beta) = 0. \tag{27}$$

Ограниченным решением задачи (24), (25) является [9]

$$R_s(r) = \sqrt{r} J_\nu(\mu_{s,n} r), \tag{28}$$

где $\nu = n + (m-2)/2$, $\mu_{s,n}$ — нули функций Бесселя первого рода $J_\nu(z)$, $\mu = \mu_{s,n}^2$.

Решением задачи (26), (27) является

$$T_{s,n}(t) = \left(\exp(-\mu_{s,n}^2 t)\right) \int_t^\beta a_{s,n}^k(\xi)(\exp \mu_{s,n}^2 \xi) d\xi. \tag{29}$$

Подставляя (28) в (23), получим:

$$r^{-\frac{1}{2}} \tilde{f}_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n}^k(t) J_\nu(\mu_{s,n} r), \qquad r^{-\frac{1}{2}} \tilde{\varphi}_{2n}^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n}^k J_\nu(\mu_{s,n} r), \qquad 0 < r < 1. \tag{30}$$

Ряды (30) — разложения в ряды Фурье – Бесселя [10], если

$$a_{s,n}^k(t) = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \tilde{f}_n^k(\xi,t) J_\nu(\mu_{s,n}\xi) d\xi, \tag{31}$$

$$b^k_{s,n} = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int\limits_0^1 \sqrt{\xi}\tilde{\varphi}^k_{2n}(\xi) J_\nu(\mu_{s,n}\xi) d\xi, \tag{32}$$

$\mu_{s,n}$, $s = 1, 2, \ldots$, — положительные нули функций Бесселя $J_\nu(z)$, расположенные в порядке возрастания их величины.

Из (22), (28), (29) получим решение задачи (18), (19)

$$\upsilon^k_{1n}(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} T_{s,n}(t) J_\nu(\mu_{s,n} r), \tag{33}$$

где $a^k_{s,n}(t)$ определяются из (31).

Далее, подставляя (22) в (20), (21) с учетом (23), будем иметь задачу

$$T_{st} + \mu^2_{s,n} T_s = 0, \qquad \beta < t < 0, \qquad T_s(\beta) = b^k_{s,n},$$

решением которого является

$$T_s(t) = b_{s,n} \exp \mu^2_{s,n}(\beta - t). \tag{34}$$

Из (28), (34) будем иметь

$$\upsilon^k_{2n}(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n} \sqrt{r} (\exp \mu^2_{s,n}(\beta - t)) J_\nu(\mu_{s,n} r), \tag{35}$$

где $b_{s,n}$ находятся из (32).

Следовательно, сначала решив задачу (8), (12) $(n = 0)$, а затем (9), (12) $(n = 1)$ и т. д., найдем последовательно все $\upsilon^k_n(r,t)$ из (17), где $\upsilon^k_{1n}(r,t)$, $\upsilon^k_{2n}(r,t)$ определяются из (33), (35).

Итак, в области Ω_β, имеет место

$$\int\limits_H \rho(\theta) L_1 u \, dH = 0. \tag{36}$$

Пусть $f(r,\theta,t) = R(r)\rho(\theta)T(t)$, причем $R(r) \in V_0$, V_0 — плотна в $L_2((0,1))$, $\rho(\theta) \in C^\infty(H)$ — плотна в $L_2(H)$, $T(t) \in V_1$, V_1 — плотна в $L_2((\beta,0))$. Тогда $f(r,\theta,t) \in V$, $V = V_0 \otimes H \otimes V_1$ — плотна в $L_2(\Omega_\beta)$ [11].

Отсюда и из (36) следует, что

$$\int\limits_{\Omega_\beta} f(r,\theta,t) L_1 u \, d\Omega_\beta = 0$$

и

$$L_1 u = 0, \qquad \forall (r,\theta,t) \in \Omega_\beta.$$

Таким образом, решением задачи (1), (3) в области Ω_β является функция

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \psi^k_{2n}(t) + r^{\frac{(1-m)}{2}} \left[\upsilon^k_{1n}(r,t) + \upsilon^k_{2n}(r,t) \right] \right\} Y^k_{n,m}(\theta), \tag{37}$$

где $\upsilon^k_{1n}(r,t)$, $\upsilon^k_{2n}(r,t)$ находятся из (33), (35).

Учитывая формулу [10] $2J'_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z)$, оценки [5, 12]

$$\begin{gathered} J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + 0\left(\frac{1}{z^{3/2}}\right), \qquad \nu \geqslant 0, \\ |k_n| \leqslant c_1 n^{m-2}, \qquad \left| \frac{\partial^l}{\partial \theta^l_j} Y^k_{n,m}(\theta) \right| \leqslant c_2 n^{\frac{m}{2} - 1 + l}, \qquad j = \overline{1, m-1}, \qquad l = 0, 1, \ldots, \end{gathered} \tag{38}$$

а также леммы, ограничения на коэффициенты уравнения (1) и на заданные функции $\psi_2(t,\theta)$, $\varphi_2(r,\theta)$, аналогично [4] можно доказать, что полученное решение (37) принадлежит классу $C(\bar{\Omega}_\beta) \cap C^2(\Omega_\beta)$.

Далее, из (33), (35), (37) $t \to -0$ имеем:

$$u(r,\theta,0) = \tau(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \tau_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta),$$
$$\tau_n^k(r) = \psi_{2n}^k(0) + \sum_{s=1}^{\infty} r^{\frac{(2-m)}{2}} \left[\int_0^{\beta} a_{s,n}^k(\xi) \left(\exp \mu_{s,n}^2 \xi\right) \, d\xi + b_{s,n}^k \left(\exp \mu_{s,n}^2 \beta\right) \right] J_{\nu+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_{s,n} r). \tag{39}$$

Из (30)–(33), (35), а также из лемм вытекает, что $\tau(r,\theta) \in W_2^l(S)$, $l > 3m/2$.

Таким образом, учитывая краевые условия (2) и (39), приходим в области Ω_α к задаче Дирихле для эллиптического уравнения:

$$L_2 u = \Delta_x u + u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(r,\theta,t) u_{x_i} + b(r,\theta,t) u_t + c(r,\theta,t) u = 0 \tag{40}$$

с данными

$$u|_S = \tau(r,\theta), \qquad u|_{\Gamma_\alpha} = \psi_1(t,\theta), \qquad u|_{\sigma_\alpha} = \varphi_1(r,\theta), \tag{41}$$

которое имеет единственное решение [4].

Следовательно, разрешимость задачи 1 установлено.

3. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 1

Сначала рассмотрим задачу (1), (3) в области Ω_β и докажем ее единственность решения. Для этого сначала построим решение первой краевой задачи для уравнения

$$L_1^* \upsilon \equiv \Delta_x \upsilon + \upsilon_t - \sum_{i=1}^{m} d_i \upsilon_{x_i} + d\upsilon = 0, \tag{42}$$

с данными

$$\upsilon|_S = \tau(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \bar{\tau}_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \qquad \upsilon|_{\Gamma_\beta} = 0, \tag{43}$$

где $d(x,t) = e - \sum\limits_{i=1}^{m} d_{ix_i}$, $\bar{\tau}_n^k(r) \in G$, G — множество функций $\tau(r)$ из класса $C([0,1]) \cap C^1((0,1))$. Множество G плотно всюду в $L_2((0,1))$ [11]. Решение задачи (42), (43) будем искать в виде (6), где функции $\bar{\upsilon}_n^k(r,t)$ будут определены ниже. Тогда аналогично п. 2 функции $\bar{\upsilon}_n^k(r,t)$ удовлетворяют систему уравнений вида (8)–(10), где $\tilde{d}_{in}^k$, d_{in}^k заменены соответственно на $-\tilde{d}_{in}^k$, $-d_{in}^k$, $\tilde{e}_n^k$, $\tilde{d}_n^k$, $i = 1,\dots,m$, $k = \overline{1,k_n}$, $n = 0,1,\dots$.

Далее, из краевого условия (43) в силу (6) получим:

$$\bar{\upsilon}_n^k(r,0) = \bar{\tau}_n^k(r), \qquad \bar{\upsilon}_n^k(1,t) = 0, \qquad k = \overline{1,k_n}, \qquad n = 0,1,\dots. \tag{44}$$

Как ранее замечено, каждое уравнение системы (8)–(10) представимо в виде (11). Задачу (11), (44) приведем к следующей задаче:

$$L\upsilon_n^k \equiv \upsilon_{nrr}^k + \upsilon_{nt}^k + \frac{\overline{\lambda_n}}{r^2} \upsilon_n^k = \widetilde{f}_n^k(r,t), \tag{45}$$

$$\upsilon_n^k(r,0) = \tau_n^k(r), \qquad \upsilon_n^k(1,t) = 0, \tag{46}$$

$$\upsilon_n^k(r,t) = r^{\frac{(m-1)}{2}} \bar{\upsilon}_n^k(r,t), \qquad \widetilde{f}_n^k(r,t) = r^{\frac{(m-1)}{2}} \bar{f}_n^k(r,t), \qquad \tau_n^k(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}} \bar{\tau}_n^k(r).$$

Решение задачи (45), (46) будем искать в виде (17), где $\upsilon_{1n}^k(r,t)$ — решение задачи для уравнения (18) с данными

$$\upsilon_{1n}^k(r,0) = 0, \qquad \upsilon_{1n}^k(1,t) = 0, \tag{47}$$

а $\upsilon^k_{2n}(r,t)$ — решение задачи для уравнения (20) с условием

$$\upsilon^k_{2n}(r,0)=\tau^k_n(r), \qquad \upsilon^k_{2n}(1,t)=0. \tag{48}$$

Решения задач (18), (47) и (20), (48) соответственно имеют вид

$$\upsilon^k_{1n}(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}\sqrt{r}\left[\left(\exp(\mu^2_{s,n}t)\right)\int_0^t a^k_{s,n}(\xi)\left(\exp(-\mu^2_{s,n}\xi)\right)d\xi\right]J_\nu(\mu_{s,n}r),$$

$$\upsilon^k_{2n}(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}\tau_{s,n}\sqrt{r}\left(\exp(\mu^2_{s,n}t)\right)J_\nu(\mu_{s,n}r),$$

где

$$\tau_{s,n}=2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2}\int_0^1\sqrt{\xi}\tau^k_n(\xi)J_\nu(\mu_{s,n}\xi)d\xi,\ \nu=n+\frac{(m-2)}{2}\,.$$

Таким образом, решение задачи (42), (43) построено в виде ряда

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}r^{\frac{(1-m)}{2}}\left[\upsilon^k_{1n}(r,t)+\upsilon^k_{2n}(r,t)\right]Y^k_{n,m}(\theta)$$

и в силу (38) принадлежит классу $C(\bar{\Omega}_\beta)\cap C^2(\Omega_\beta)$.

В результате интегрирования по области Ω_β получаем [13] тождество

$$\upsilon L_1u-uL_1^*\upsilon=-\upsilon P(u)+uP(\upsilon)-u\upsilon Q,$$

где

$$P(u)=\sum_{i=1}^{m}u_{x_i}\cos\left(N^\perp,x_i\right),Q=\cos\left(N^\perp,t\right)-\sum_{i=1}^{m}d_i\cos\left(N^\perp,x_i\right),$$

$$\int_S\tau(r,\theta)u(r,\theta,0)ds=0. \tag{49}$$

Поскольку линейная оболочка системы функций $\{\bar{\tau}^k_n(r)Y^k_{n,m}(\theta)\}$ плотна $L_2(S)$ [11], то из (49) заключаем, что $u(r,\theta,0)=0$ при всех $(r,\theta)\in S$. Стало быть, по принципу экстремума для параболического уравнения (5) [14] $u\equiv0$ в $\overline{\Omega}_\beta$. Далее из принципа Хопфа [15] $u\equiv0$ в $\bar{\Omega}_\alpha$.

В [4] приводится явный вид решения задачи (40), (41), поэтому можно записать представления решения и для задачи 1.

Библиографический список

1. *Фикера Г.* К единой теории краевых задач для эллиптико-параболических уравнений второго порядка : сб. переводов // Математика. 1963. Т. 7, № 6. С. 99–121.
2. *Олейник О. А., Радкевич Е. В.* Уравнения с неотрицательной характеристической формой. М. : Изд-во Моск. ун-та, 2010. 360 с.
3. *Алдашев С. А.* Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для многомерного эллиптико-параболического уравнения // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 1. С. 5–10.
4. *Алдашев С. А.* Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для одного класса многомерных эллиптических уравнений // Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ. 2012. Т. 12, вып. 1. С. 7–13.
5. *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М. : Физматгиз, 1962. 254 с.
6. *Алдашев С. А.* Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. Алматы : Гылым, 1994. 170 с.
7. *Алдашев С. А.* О задачах Дарбу для одного класса многомерных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 1. С. 64–68.
8. *Алдашев С. А.* Вырождающиеся многомерные гиперболические уравнения. Орал : ЗКАТУ, 2007. 139 с.

9. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М. : Наука, 1965. 703 с.
10. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции : в 2 т. Т. 2. М. : Наука, 1974. 297 с.
11. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М. : Наука, 1976. 543 с.
12. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М. : Наука, 1966. 724 с.
13. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики : в 5 т. Т. 4, ч. 2. М. : Наука, 1981. 550 с.
14. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М. : Мир, 1968. 527 с.
15. *Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.* Уравнения с частными производными. М. : Мир, 1966. 352 с.

Well-posedness of the Dirichlet Problem for a Class of Multidimensional Elliptic-parabolic Equations

S. A. Aldashev

Serik A. Aldashev, Kazakhstan National Pedagogical University named Abay, 86, Tolebi st., 050012, Almaty, Kazakhstan, aldash51@mail.ru

Correctness of boundary problems in the plane for elliptic equations is well analyzed by analitic function theory of complex variable. There appear principal difficulties in similar problems when the number of independent variables is more than two. An attractive and suitable method of singular integral equations is less strong because of lock of any complete theory of multidimensional singular integral equations. In the work, the method proposed in the author's works, shows the unique solvability and obtained the explicit form of the Dirichlet problem in the cylindric domain for a class of multidimensional elliptic-parabolic equations.

Key words: correctness, many-dimensional equation, Dirichlet problem, Bessel's function.

References

1. Fikera G. K edinoi teorii kraevykh zadach dlia elliptiko-parabolicheskikh uravnenii vtorogo poriadka [The unified theory of boundary value problems for elltptlc-parabolic equations of second order]. *Sbornik perevodov. Matematika*, 1963, vol. 7, no. 6, pp. 99–121 (in Russian).
2. Oleinik O. A., Radkevich E. V. *Uravneniia s neotritsatel'noi kharakteristicheskoi formoi* [Equations with nonnegativo characteristic form]. Moscow, Moscow Univ. Press, 2010, 360 p. (in Russian).
3. Aldashev S. A. The correctness of the Dirichlet problem in the cylindric domain for the multidimensional elliptic-parabolic equation. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2014, vol. 14, iss. 1, pp. 5–10 (in Russian).
4. Aldashev S. A. Correctness of Dirichlet's Problem in a Cylindric Domain for a Single Class of Many-dimensional Elliptic Equations. *Vestn. Novosib. Gos. Univ., Ser. Matem., Mekh., Inform.*, 2012, vol. 12, iss. 1, pp. 7–13 (in Russian).
5. Mikhlin S. G. *Multidimensional Singular Integrals and Integral Equations*. New York, Pergamon, 1965 (Russ. ed.: Mikhlin S. G. Mnogomernye singuliarnye integraly i integral'nye uravneniia. Moscow, Physmathgiz, 1962, 254 p.).
6. Aldashev S. A. *Boundary-Value Problems for Multi-Dimensional Hyperbolic and Mixed Equations*. Almaty, Kazakhstan, Gylym Press, 1994, 170 p. (in Russian).
7. Aldashev S. A. On Darboux problems for a class of multidimensional hyperbolic equations. *Differentsialnye Uravneniya*, 1998, vol. 34, no. 1, pp. 64–68 (in Russian).
8. Aldashev S. A. *Degenerate multidimensional hyperbolic equation*. Oral, ZKATU, 2007, 139 p. (in Russian).
9. Камке E. Spravochnik po obyknovennym differentsial'nym uravneniiam [Handbook on Ordinary Differential Equations]. Moscow, Nauka, 1965, 703 p. (in Russian).
10. Beitmen G., Erdeii A. Vysshie transtsendentnye funktsii [Higher Transcendental Functions]. Moscow, Nauka, 1974, vol. 2, 297 p. (in Russian).
11. Kolmogorov A., Fomin S. *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*. Mineola, NY, USA, Dover Publications, 1999. (Russ. ed. : Kolmogorov A. N., Fomin S. V. Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza. Moscow, Nauka, 1976, 543 p.).
12. Tikhonov A. N., Samarskii A. A. *Equations of mathematical physics*. Moscow, Nauka, 1966, 724 p. (in Russian).
13. Smirnov V. I. *The higher mathematics course*. Moscow, Nauka, 1981, vol. 4, pt. 2, 550 p. (in Russian).
14. Friedman A. *Uravneniia s chastnymi proizvodnymi parabolicheskogo tipa* [Partial differential Equations of parabolic type]. Moscow, Mir, 1968, 527 p. (in Russian).
15. Bers L., John F., Schechter M. *Uravneniia s chastnymi proizvodnymi* [Partial differential equations]. Moscow, Mir, 1966, 352 p. (in Russian).