МАТЕМАТИКА

УДК 501.1

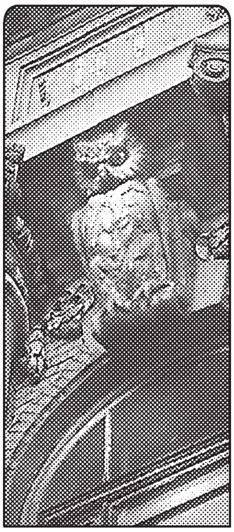
О НЕКОТОРЫХ ЛИУВИЛЛЕВЫХ ТЕОРЕМАХ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ГИНЗБУРГА – ЛАНДАУ НА КВАЗИМОДЕЛЬНЫХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

С. С. Вихарев

Ассистент кафедры математического анализа и теории функций, Волгоградский государственный университет, vhr1987@mail.ru.

В работе найдены условия выполнения теорем типа Лиувилля для ограниченных решений стационарного уравнения Гинзбурга – Ландау и неравенства $-\Delta u \geqslant u^q$, $q > 1$, на квазимодельных римановых многообразиях.

Ключевые слова: уравнение Гинзбурга – Ландау, римановы многообразия, теоремы типа Лиувилля.



НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

ВВЕДЕНИЕ

Истоки рассматриваемой проблематики относятся к задаче определения типа римановых поверхностей. Известно, что всякая односвязная риманова поверхность конформно эквивалентна одной из следующих модельных поверхностей: сфере (поверхность эллиптического типа), евклидовой плоскости (поверхность параболического типа), гиперболической плоскости (поверхность гиперболического типа). Эллиптичность типа эквивалентна компактности. Значительно больший интерес вызывает задача определения параболического и гиперболического типов. Ключевым моментом для решения данной проблемы является выполнение на поверхностях параболического типа теоремы Лиувилля, которая утверждает, что всякая ограниченная снизу супергармоническая функция на подобных поверхностях равна константе. Именно данное свойство послужило основой для распространения понятия параболичности на произвольные римановы многообразия. А именно некомпактное риманово многообразие, на котором всякая ограниченная снизу супергармоническая функция равна константе, называют многообразием параболического типа.

В настоящее время к аналогам теоремы Лиувилля для случая произвольных эллиптических уравнений и неравенств на римановых многообразиях применяют следующий подход. Пусть на римановом многообразии M задан класс функций A и эллиптический оператор L. Будем говорить, что на M выполнено (A, L)-лиувиллево свойство, если любое решение или субрешение уравнения $Lu = 0$, принадлежащее функциональному классу A, является тождественной постоянной. За последние годы опубликован ряд работ, посвященных вопросам выполнения теорем типа Лиувилля на некомпактных римановых многообразиях и в областях евклидова пространства (см., например, [1–11]). Так, изучая проблемы выполнения теорем типа Лиувилля для ограниченных решений уравнений вида

$$\Delta u = 0 \qquad \text{и} \qquad \Delta u - c(x)u = 0,$$

где $c(x)$ — гладкая неотрицательная функция, А. Г. Лосевым в 1998 году был построен пример некомпактных римановых многообразий, на которых выполнение теоремы типа Лиувилля для первого из этих уравнений не влечёт за собой выполнения аналогичной теоремы для второго из них (см. [2]). Построенные многообразия были названы автором квазимодельными. Опишем их подробнее.

Пусть M изометрично $R_+ \times S_1 \times \ldots \times S_k$ (где $R_+ = (0, +\infty)$, а S_i — компактные римановы многообразия без края) с метрикой

$$ds^2 = dr^2 + g_1^2(r)d\theta_1^2 + \ldots + g_k^2(r)d\theta_k^2.$$

Здесь g_i — гладкие положительные на R_+ функции. Пусть также $n_i = \dim S_i$.

Заметим, что квазимодельное риманово многообразие имеет параболический тип тогда и только тогда (см. [2, 3]), когда

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{dr}{G(r)} = \infty, \tag{1}$$

где $G(r) = g_1^{n_1}(r) \cdot \ldots \cdot g_k^{n_k}(r)$.

Данная работа посвящена получению условий выполнения теоремы типа Лиувилля на квазимодельных римановых многообразиях для уравнения

$$-\Delta u = c(x) f(u), \tag{2}$$

где $f \in C^1(\mathbb{R})$ такая, что

$$f(0) = f(a) = 0, \qquad f(u) > 0 \quad \text{на} \quad (0, a), \tag{3}$$

$c(x)$ — положительная функция, а Δ — оператор Лапласа – Бельтрами на M.

Данное уравнение является многомерным стационарным аналогом знаменитого уравнения Гинзбурга – Ландау, впервые возникшего в теории сверхпроводимости [12]. Впоследствии было установлено, что оно описывает широкий круг физических явлений, таких как нелинейные волны, фазовые переходы второго рода, сверхтекучесть, конденсация Бозе – Энштейна и др. [13]. Интересно отметить, что подобное уравнение возникает не только в физике, но и, к примеру, в популяционной генетике и теории химических реакций [14].

Слабым решением уравнения (2) на множестве $\Omega \subset M$ мы будем называть функцию $u \in C^1(\overline{\Omega})$ такую, что для любого множества $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$ и для любой положительной функции $\phi(x) \in C_0^1(\widetilde{\Omega})$ выполнено

$$\int\limits_{\widetilde{\Omega}} \nabla u \cdot \nabla \phi(x)\, dx = \int\limits_{\widetilde{\Omega}} c(x) f(u) \phi(x)\, dx. \tag{4}$$

Легко показать, что всякое классическое решение $u \in C^2(\Omega)$ уравнения (2) удовлетворяет равенству (4). Везде ниже под решением уравнения (2) мы будем понимать его слабые решения.

В процессе решения поставленной задачи нам потребуется получение условий выполнения лиувиллева свойства для квазилинейного эллиптического неравенства

$$-\Delta u \geqslant u^q, \qquad q > 1, \tag{5}$$

на внешней области квазимодельного риманова многообразия M, а именно на множестве $\Omega_e = \{x = (r, \theta_1, \ldots, \theta_k) \in M : r > 1\}$.

Поиску условий выполнения теорем типа Лиувилля для решений квазилинейных эллиптических неравенств в областях евклидова пространства и на некомпактных римановых многообразиях также посвящены многочисленные работы (см. например, [5, 6, 11]).

Заметим, что из условия (3) следует, что решения уравнения (2) и неравенства (5) являются супергармоническими функциями. В случае выполнения (1) из параболичности типа многообразия следует, что рассматриваемые решения являются тождественными постоянными. Поэтому всюду далее будут рассматриваться квазимодельные многообразия непараболического типа, т. е. такие, что

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{dr}{G(r)} < \infty.$$

Также всюду далее будем считать, что $G(r)$ — неубывающая на R_+ функция.

Условия выполнения теоремы типа Лиувилля для неравенства (5) на квазимодельных римановых многообразиях непараболического типа получены в параграфе 2 настоящей работы, а для уравнения (2) — в параграфе 3.

1. ТЕОРЕМА ТИПА ЛИУВИЛЛЯ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО НЕРАВЕНСТВА СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Справедлив следующий результат.

Теорема 1. *Пусть многообразие M такое, что выполняется условие*

$$\limsup_{\rho\to\infty} \rho^{2/(q-1)} \left(\frac{\int\limits_{\rho/2}^{\rho} G(r)dr}{\int\limits_{\rho/4}^{2\rho} G(r)\,dr} \right)^{1/(q-1)} \int\limits_{2\rho}^{\infty} \frac{ds}{G(s)} = +\infty. \tag{6}$$

Тогда любое неотрицательное решение неравенства (5) *на* Ω_e *есть тождественный ноль.*

Для доказательства, идея которого вполне аналогична изложенной в работе [6], нам потребуется ряд вспомогательных утверждений.

Зафиксируем произвольно $\rho > 4$ и введём в рассмотрение функцию $\xi_\rho(r, \theta_1, \ldots, \theta_k)$: $M \to \mathbb{R}$ определённую следующим образом:

$$\xi_\rho(r, \theta_1, \ldots, \theta_k) = \begin{cases} 0, & \text{если } \ r \leqslant \rho/4, \\ 4r/\rho - 1, & \text{если } \ \rho/4 < r \leqslant \rho/2, \\ 1, & \text{если } \ \rho/2 < r \leqslant \rho, \\ 2 - r/\rho, & \text{если } \ \rho < r \leqslant 2\rho, \\ 0, & \text{если } \ r > 2\rho. \end{cases} \tag{7}$$

Заметим также, что квазимодельное риманово многообразие обладает таким свойством, что произведение $|S_1| \cdot |S_2| \cdot \ldots \cdot |S_k| \cdot G(r_0)$ является объёмом сечения M при $r = r_0$ и формула для вычисления объёма шарового слоя $B(a, b) = \{x = (r, \theta_1, \ldots, \theta_k) \in M : \ a < r < b\}$ многообразия M имеет вид

$$|B(a, b)| = |S_1| \cdot |S_2| \cdot \ldots \cdot |S_k| \int\limits_a^b G(t)\,dt.$$

Здесь $|S_i|$ — объём многообразия S_i.

Лемма 1. *Для всех достаточно больших λ справедливо неравенство*

$$\int\limits_{B(\rho/4, 2\rho)} \xi_\rho^\lambda\,dx \leqslant \left|B\left(\frac{\rho}{4}, \frac{\rho}{2}\right)\right| + |B(\rho, 2\rho)|. \tag{8}$$

Доказательство. Учитывая (3), а также тот факт, что $4r/\rho - 1 \leqslant 1$ при $\rho/4 \leqslant r \leqslant \rho/2$, достаточно показать справедливость неравенства

$$\int\limits_{\rho/2}^{\rho} G(r)\,dr + \int\limits_{\rho}^{2\rho} G(r)\left(2 - \frac{r}{\rho}\right)^{\lambda} dr \leqslant \int\limits_{\rho}^{2\rho} G(r)\,dr.$$

Учитывая монотонное убывание функции $(2 - r/\rho)^{\lambda}$ и неубывание $G(r)$, получаем справедливость следующих неравенств:

$$\int\limits_{\rho/2}^{\rho} G(r)\,dr + \int\limits_{\rho}^{2\rho} G(r)\left(2 - \frac{r}{\rho}\right)^{\lambda} dr \leqslant \int\limits_{\rho/2}^{3/4\rho} G(r)\,dr + \int\limits_{3/4\rho}^{\rho} G(r)\,dr + \int\limits_{\rho}^{5/4\rho} G(r)\,dr +$$

$$+ \left(\frac{3}{4}\right)^{\lambda} \int\limits_{5/4\rho}^{3/2\rho} G(r)\,dr + \left(\frac{1}{2}\right)^{\lambda} \int\limits_{3/2\rho}^{7/4\rho} G(r)\,dr + \left(\frac{1}{4}\right)^{\lambda} \int\limits_{7/4\rho}^{2\rho} G(r)dr \leqslant$$

$$\leqslant 2 \int\limits_{\rho}^{5/4\rho} G(r)\,dr + \left(1 + \left(\frac{3}{4}\right)^{\lambda}\right) \int\limits_{5/4\rho}^{3/2\rho} G(r)\,dr + \left(\frac{1}{2}\right)^{\lambda} \int\limits_{3/2\rho}^{7/4\rho} G(r)\,dr + \left(\frac{1}{4}\right)^{\lambda} \int\limits_{7/4\rho}^{2\rho} G(r)\,dr \leqslant \int\limits_{\rho}^{2\rho} G(r)\,dr,$$

где последнее неравенство выполняется для всех достаточно больших λ. □

Лемма 2. *Пусть u — неотрицательное решение неравенства* (5). *Тогда существует $\Lambda > 0$ такое, что для всех $\lambda > \Lambda$ и $\rho > 4$ можно подобрать некоторую константу $C_1(\Lambda, \lambda)$, для которой выполнено*

$$\left(\frac{1}{\int\limits_{B(\rho/4,2\rho)} \xi_\rho^\lambda\,dx} \int\limits_{B(\rho/4,2\rho)} u^q \xi_\rho^\lambda\,dx\right)^{1/q} \leqslant C_1 \left(\frac{\int\limits_{\rho/4}^{2\rho} G(r)dr}{\int\limits_{\rho/2}^{\rho} G(r)dr}\right)^{1/(q-1)} \rho^{-2/(q-1)}. \tag{9}$$

Доказательство. Действительно, почти дословно повторяя доказательство из [6], получаем, что существует $\Lambda > 0$ такое, что для всех $\lambda > \Lambda$, $\rho > 4$ можно подобрать некоторую константу C_1, для которой выполнено неравенство:

$$\int\limits_{B(\rho/4,2\rho)} u^q \xi_\rho^\lambda\,dx \leqslant C_1^{q-1}\,\rho^{-2}\,\left|B\left(\frac{\rho}{4}, \frac{\rho}{2}\right) \cup B(\rho, 2\rho)\right|^{1-1/q} \left(\int\limits_{B(\rho/4,\rho/2)\cup B(\rho,2\rho)} u^q \xi_\rho^\lambda dx\right)^{1/q},$$

где C_1 не зависит от ρ.

Учитывая последнее неравенство, а также вид функции ξ_ρ, несложно показать, что:

$$\frac{1}{\int\limits_{B(\rho/4,2\rho)} \xi_\rho^\lambda\,dx} \int\limits_{B(\rho/4,2\rho)} u^q \xi_\rho^\lambda\,dx \leqslant$$

$$\leqslant C_1^{q-1}\,\rho^{-2}\,\frac{\left|B\left(\frac{\rho}{4}, \frac{\rho}{2}\right) \cup B(\rho, 2\rho)\right|}{\int\limits_{B(\rho/4,2\rho)} \xi_\rho^\lambda\,dx} \left(\frac{1}{\left|B\left(\frac{\rho}{4}, \frac{\rho}{2}\right) \cup B(\rho, 2\rho)\right|} \int\limits_{B(\rho/4,\rho/2)\cup B(\rho,2\rho)} u^q \xi_\rho^\lambda dx\right)^{1/q} \leqslant$$

$$\leqslant C_1^{q-1}\,\rho^{-2}\,\frac{\int\limits_{\rho/4}^{2\rho} G(r)dr}{\int\limits_{\rho/2}^{\rho} G(r)dr} \left(\frac{1}{\left|B\left(\frac{\rho}{4}, \frac{\rho}{2}\right) \cup B(\rho, 2\rho)\right|} \int\limits_{B(\rho/4,\rho/2)\cup B(\rho,2\rho)} u^q \xi_\rho^\lambda\,dx\right)^{1/q} \leqslant$$

$$\leqslant C_1^{q-1}\,\rho^{-2}\,\frac{\int\limits_{\rho/4}^{2\rho} G(r)dr}{\int\limits_{\rho/2}^{\rho} G(r)dr}\left(\frac{1}{\left|B\left(\frac{\rho}{4},\frac{\rho}{2}\right)\cup B\left(\rho,2\rho\right)\right|}\int\limits_{B(\rho/4,2\rho)} u^q\xi_\rho^\lambda dx\right)^{1/q}\leqslant$$

$$\leqslant C_1^{q-1}\,\rho^{-2}\,\frac{\int\limits_{\rho/4}^{2\rho} G(r)dr}{\int\limits_{\rho/2}^{\rho} G(r)dr}\left(\frac{1}{\int\limits_{B(\rho/4,2\rho)}\xi_\rho^\lambda dx}\int\limits_{B(\rho/4,2\rho)} u^q\xi_\rho^\lambda\, dx\right)^{1/q},$$

где последнее неравенство справедливо в силу (8). Сравнивая начало и конец последней цепочки неравенств, делаем вывод, что имеет место неравенство

$$\left(\frac{1}{\int\limits_{B(\rho/4,2\rho)}\xi_\rho^\lambda\, dx}\int\limits_{B(\rho/4,2\rho)} u^q\xi_\rho^\lambda\, dx\right)^{(q-1)/q}\leqslant C_1^{q-1}\rho^{-2}\,\frac{\int\limits_{\rho/4}^{2\rho} G(r)dr}{\int\limits_{\rho/2}^{\rho} G(r)dr},$$

откуда, очевидно, следует нужное. □

Лемма 3. *Пусть $u\not\equiv 0$ — неотрицательное решение неравенства $-\Delta u\geqslant u^q$, $x\in\Omega_e$. Тогда существует $C_2>0$ такая, что*

$$u(r,\theta_1,\ldots,\theta_k)\geqslant C_2\int\limits_r^\infty\frac{ds}{G(s)}\quad \textit{для}\quad r\geqslant 2.$$

Данное неравенство сразу следует из супергармоничности функции u и того, что $v=\int\limits_r^{+\infty}\frac{ds}{G(s)}$ является гармонической на M функцией (см. [2]). □

Доказательство теоремы 1. Пусть неравенство (5) имеет нетривиальное решение u на Ω_e. Тогда, применяя лемму 3, получаем:

$$\left(\frac{1}{\int\limits_{B(\rho/4,2\rho)}\xi_\rho^\lambda dx}\int\limits_{B(\rho/4,2\rho)} u^q\xi_\rho^\lambda\, dx\right)^{1/q}\geqslant\left(\frac{C_2^q}{\int\limits_{B(\rho/4,2\rho)}\xi_\rho^\lambda dx}\int\limits_{B(\rho/4,2\rho)}\left(\int\limits_r^\infty\frac{ds}{G(s)}\right)^q\xi_\rho^\lambda\, dx\right)^{1/q}\geqslant$$

$$\geqslant C_2\int\limits_{2\rho}^\infty\frac{ds}{G(s)}\left(\frac{1}{\int\limits_{B(\rho/4,2\rho)}\xi_\rho^\lambda\, dx}\int\limits_{B(\rho/4,2\rho)}\xi_\rho^\lambda\, dx\right)^{1/q}=C_2\int\limits_{2\rho}^\infty\frac{ds}{G(s)}.$$

В то же время согласно (9)

$$\left(\frac{1}{\int\limits_{B(\rho/4,2\rho)}\xi_\rho^\lambda dx}\int\limits_{B(\rho/4,2\rho)} u^q\xi_\rho^\lambda\, dx\right)^{1/q}\leqslant C_1\left(\frac{\int\limits_{\rho/4}^{2\rho} G(r)dr}{\int\limits_{\rho/2}^{\rho} G(r)dr}\right)^{1/(q-1)}\rho^{-2/(q-1)}.$$

Таким образом,

$$C_2\int\limits_{2\rho}^\infty\frac{ds}{G(s)}\leqslant\left(\frac{1}{\int\limits_{B(\rho/4,2\rho)}\xi_\rho^\lambda dx}\int\limits_{B(\rho/4,2\rho)} u^q\xi_\rho^\lambda\, dx\right)^{1/q}\leqslant C_1\left(\frac{\int\limits_{\rho/4}^{2\rho} G(r)dr}{\int\limits_{\rho/2}^{\rho} G(r)dr}\right)^{1/(q-1)}\rho^{-2/(q-1)}.$$

Последнее противоречит условию (6). □

2. ТЕОРЕМА ТИПА ЛИУВИЛЛЯ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ГИНЗБУРГА – ЛАНДАУ

Далее будем считать, что $0 < c_1 \leqslant c(x) \leqslant c_2 < \infty$ для некоторых положительных констант c_1 и c_2.

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) многообразие M такое, что для некоторой константы $q > 1$ выполнено

$$\limsup_{\rho\to\infty} \rho^{\frac{2}{q-1}} \left(\frac{\int\limits_{\rho/2}^{\rho} G(r)\,dr}{\int\limits_{\rho/4}^{2\rho} G(r)dr} \right)^{1/(q-1)} \int\limits_{2\rho}^{\infty} \frac{ds}{G(s)} = +\infty; \tag{10}$$

2) функция f такая, что существуют $\delta(q) > 0$ и $\sigma(q,\delta) > 0$ такие, что для всех $s \in (0,\delta)$ выполнено

$$f(s) \geqslant \sigma s^q.$$

Тогда любое решение уравнения (2)*, удовлетворяющее условию $0 \leqslant u \leqslant a$, является тождественной константой.*

Замечание. Аналогичные результаты для решений уравнений несколько более общего вида в R^n получены в [8] и на полных римановых многообразиях с несколько другими условиями на поведение решений уравнения в [9].

Доказательство теоремы 2. Идея доказательства вполне аналогична изложенной в работе [8]. Пусть $u(x)$ — решение уравнения (2) на M, удовлетворяющее условию $0 \leqslant u \leqslant a$.

Так как $u(x)$ — неотрицательная супергармоническая функция, то согласно принципу минимума [4] имеем либо $u \equiv 0$, либо $u > 0$. Предположим далее, что $u > 0$, и покажем, что в этом случае $u \equiv a$.

Докажем вначале, что $u(x) \to a$ при $r \to \infty$. Для этого возьмём произвольное $R > 0$, $\alpha \in \left(0, \min\limits_{r=R} u(x)\right)$ и рассмотрим семейство решений краевых задач:

$$\begin{cases} -\Delta w_n = c_1 f(w), & \text{когда} \quad R < r < R_n, \\ w_n = \alpha, & \text{когда} \quad r = R, \\ w_n = 0, & \text{когда} \quad r = R_n, \end{cases} \tag{11}$$

где R_n — возрастающая последовательность чисел такая, что $R < R_1$ и $R_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

Нам понадобится понятие суб- и суперрешения (11). Функцию $\psi \in C^1(B(R,R_n))$ называют (см. [7]) суперрешением краевой задачи (11), если $\nabla\psi,\ f(\psi) \in L^2(B(R,R_n))$ и выполнены условия:

1) $\psi \geqslant \alpha$, если $r = R$;

2) $\psi \geqslant 0$, если $r = R_n$;

3) $\int\limits_{B(R,R_n)} \nabla\psi \cdot \nabla\zeta\,dx \geqslant \int\limits_{B(R,R_n)} c_1 f(\psi)\zeta\,dx$ для каждой $\zeta \in C_0^1(B(R,R_n))$ и $\zeta \geqslant 0$ п.в. на $B(R,R_n)$.

Субрешение краевой задачи (11) определяется заменой неравенств на противоположные.

Докажем, что краевая задача (11) имеет минимальное решение w_n, где минимальность понимается в том смысле, что если $\widetilde{w}_n$ — произвольное решение (11), то $0 \leqslant w_n \leqslant \widetilde{w}_n$ почти всюду.

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ функция $w = u$ является суперрешением задачи (11). Действительно,

$$u(R,\theta_1,\ldots,\theta_k) \geqslant \alpha, \qquad u(R_n,\theta_1,\ldots,\theta_k) > 0,$$

$$\int\limits_{B(R,R_n)} \nabla u \nabla\varphi\,dx = \int\limits_{B(R,R_n)} c(x)f(u)\varphi \geqslant \int\limits_{B(R,R_n)} c_1 f(u)\varphi\,dx \quad \text{для всех} \quad \varphi \in C_0^1(B(R,R_n)),$$

где $B(R,R_n) = \{(r,\theta_1,\ldots,\theta_k) : R < r < R_n\}$.

В то же время очевидно, что $w = 0$ — её субрешение. Следовательно (см. [7]), задача (11) имеет решение w_n, причём оно минимально в указанном выше смысле. Несложно показать, что w_n — радиально симметрично, т. е. $w_n = w_n(r)$.

Теперь покажем, что последовательность w_n не убывает для каждого фиксированного r. Для этого замечаем, что w_{n+1} — суперрешение задачи (11). Действительно,

$$w_{n+1}(R) = \alpha, \quad w_{n+1}(R_n) \geqslant 0,$$

$$\int\limits_{B(R,R_n)} \nabla w_{n+1} \nabla \varphi \, dx = \int\limits_{B(R,R_n)} c_1 f(u) \quad \text{для всех} \quad \varphi \in C_0^\infty(B(R,R_n)),$$

так как $B(R,R_n) \subset B(R,R_{n+1})$.

Тогда согласно принципу максимума получаем, что $w_n \leqslant w_{n+1}$. Таким образом, справедливо неравенство $w_n(r) \leqslant w_{n+1}(r) \leqslant u(x)$ при условии $R < r < R_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Это значит, что существует функция $w(r)$ такая, что $w(r) = \lim\limits_{n\to\infty} w_n(r)$ для $r > R$ и выполнено $0 \leqslant w(x) \leqslant u(x)$.

Пусть $\Omega \subset \{x = (r, \theta_1, \ldots, \theta_k) \in M : r > R\}$ — произвольная ограниченная область с гладкой границей. Так как $0 \leqslant cf(w_n) \leqslant c_2 \max\limits_{s\in[0,a]} f(s)$ и $0 \leqslant w_n \leqslant u \leqslant a$, то найдётся $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $\Omega \subset B(R, R_{n_0})$ и для $n \geqslant n_0$ семейство решений $\{w_n|_\Omega\}$ уравнения $-\Delta w_n = c(x) f(w_n)$ — равномерно ограничено по норме в $C^{1,\alpha'}(\Omega)$ для некоторого $\alpha' \in (0,1)$ [15]. В то же время, так как $C^{1,\alpha'}(\Omega)$ — компактно вложено в $C^1(\overline{\Omega})$, то последовательность функций $\{w_n|_\Omega\}$ имеет сходящуюся подпоследовательность в $C^1(\overline{\Omega})$. Получаем, что $w_n \to w$ в $C^1(\overline{\Omega})$ для любой ограниченной области $\Omega \subset \{x = (r, \theta_1, \ldots, \theta_k) \in M : r > R\}$ с гладкой границей, откуда сразу следует, что w удовлетворяет условиям

$$\begin{cases} -\Delta w = c_1 f(w), & \text{когда} \quad r > R, \\ w = \alpha, & \text{когда} \quad r = R, \end{cases} \tag{12}$$

причём $0 \leqslant w(r) \leqslant u(r, \theta_1, \ldots, \theta_k) \leqslant a$ для всех $r \geqslant R$ и $(\theta_1, \ldots, \theta_k) \in S_1 \times \ldots \times S_k$.

Из радиальной симметричности w и вида оператора Лапласа – Бельтрами в метрике многообразия M следует, что (12) эквивалентно

$$\begin{cases} G(r)w'(r) = G(R)w'(R) - c_1 \int\limits_R^r G(r) f(w) dr, & \text{когда} \quad r > R, \\ w(r) = \alpha, & \text{когда} \quad r = R. \end{cases}$$

Обозначим $\varphi(r) = G(r)w'(r)$. Нетрудно показать, что $\varphi(r)$ не возрастает и возможны два варианта.

1. Функция $\varphi(r)$ — отрицательна при больших r. Докажем, что этого не может быть. Действительно, предположим, что существует $R_0 \geqslant R$ такое, что $w'(r) < 0$, начиная с R_0. Тогда, $w(r) < w(R_0 + 1) < w(R) \leqslant a$ для $r > R_0 + 1$. Положим $\alpha_1 = w(R_0 + 1)$. Согласно условию 2 доказываемой теоремы существуют $q \in (1, \infty)$, $\delta > 0$, $\sigma > 0$ такие, что

$$f(s) \geqslant \sigma s^q, \qquad s \in (0, \delta).$$

Положим $B = \min\limits_{[\delta,\alpha_1]} f(s)$, если $\alpha_1 > \delta$. Согласно (3), $B > 0$, поэтому положим также

$$\sigma_1 = \begin{cases} \min\{\sigma, B/{\alpha_1}^q\} & \text{если } \alpha_1 > \delta, \\ \sigma & \text{если } \alpha_1 \leqslant \delta. \end{cases}$$

Тогда $\sigma_1 \in (0, \sigma]$ и $f(s) \geqslant \sigma_1 s^q$ для $s \in (0, \alpha_1)$. Таким образом,

$$-\Delta w = c_1 f(w) \geqslant c_1 \sigma_1 w^q$$

в области $\{x \in M : r > R_0 + 1\}$. Это значит, что в этой области существует нетривиальное решение неравенства $-\Delta w \geqslant c_1\sigma_1 w^q$. Несложно показать, что функция $v(r) = (c_1\sigma_1)^{1/(q-1)}w(r)$ является нетривиальным решением неравенства $-\Delta v \geqslant v^q$ в области $\{x \in M : r > R_0 + 1\}$. Действительно,

$$-\Delta v(r) = -(c_1\sigma_1)^{1/(q-1)}\Delta w(r) \geqslant (c_1\sigma_1)^{1/(q-1)}c_1\sigma_1 w^q = v^q(r).$$

Последнее вместе с (10) противоречит утверждению теоремы 1.

2. $\varphi(r) \geqslant 0$ при $r > R$. Это означает, что $w'(r) \geqslant 0$ при $r > R$, но так как $w \leqslant u \leqslant a$, то существует $\alpha_2 = \lim\limits_{r\to\infty} w(r)$. Если $\alpha_2 < a$, то $w(r) \leqslant \alpha_2$ для $r > R$ и мы можем воспользоваться рассуждениями случая 1, чтобы показать, что существуют $q \in (1, +\infty)$, $\sigma > 0$ и $\sigma_2 \in (0, \sigma]$ такие, что

$$-\Delta w = c_1 f(w) \geqslant c_1\sigma_2 w^q$$

в области $\{x \in M : r > R\}$. Аналогично случаю 1 можно показать, что функция $v(r) = (c_1\sigma_1)^{1/(q-1)}w(r)$ является нетривиальным решением неравенства $-\Delta v \geqslant v^q$ в области $\{x \in M : r > R\}$. Таким образом, снова приходим к противоречию с теоремой 1.

Значит, $\lim\limits_{r\to\infty} w(r) = a$. А с учётом $a \geqslant u(r, \theta_1, \ldots, \theta_k) \geqslant w(r)$, заключаем, что

$$\lim_{r\to\infty} u(r, \theta_1, \ldots, \theta_k) = a.$$

Покажем, что отсюда следует $u \equiv a$. Действительно, предположим, что это не так, т. е. $u \not\equiv a$. В этом случае $\inf\limits_M u(x) < a$ достигается в некоторой точке $x_0 \in M$. Поэтому функция $v(x) = u(x) - u(x_0)$ удовлетворяет

$$v \geqslant 0, \qquad v(x_0) = 0, \qquad \int\limits_M \nabla u \nabla\varphi \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad \varphi \in C_0^1(M).$$

Согласно принципу минимума [4] заключаем, что $v(x) \equiv 0$ или

$$u(x) \equiv u(x_0) < a.$$

Это противоречит тому, что $\lim\limits_{r\to\infty} u(r, \theta_1, \ldots, \theta_k) = a$. □

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-97038-р_поволжье_а).

Библиографический список

1. *Лосев А. Г.* Некоторые лиувиллевы теоремы на римановых многообразиях специального вида // Изв. вузов. Математика. 1991. № 12. С. 15–24.
2. *Лосев А. Г.* О некоторых лиувиллевых теоремах на некомпактных римановых многообразиях // Сиб. матем. журн. 1998. Т. 39, № 1. С. 87–93.
3. *Лосев А. Г., Мазепа Е. А.* Ограниченные решения уравнения Шрёдингера на римановых произведениях // Алгебра и анализ. 2001. Т. 13, № 1. С. 84-–110.
4. *Лосев А. Г., Федоренко Ю. С.* О положительных решениях квазилинейных эллиптических неравенств на некомпактных римановых многообразиях // Матем. заметки. 2007. Т. 81, № 6. С. 867–878.
5. *Лосев А. Г., Мазепа Е. А.* Положительные решения квазилинейных неравенств на модельных римановых многообразиях // Вестн. Волгогр. гос. ун-та. Сер. 1: Математика. Физика. 2013. № 1 (18). С. 59–69.
6. *Bidaut-Veron M., Pohozaev S. I.* Non-existence results and estimates for some nonlinear elliptic problems // J. Anal. Math. 2001. Vol. 84. P. 1–49.
7. *Diaz J. I.* Nonlinear Partial Differential Equations and Free Boundary Problem. Vol. 1 : Elliptic Equations. Pitman Research Notes in Mathematics. Boston : Pitman, 1985. Vol. 106. 323 p.
8. *Dancer E. N., Du Y.* Some remarks on Liouville type results for quasilinear elliptic equations // Proc. Amer. Math. Soc. 2002. Vol. 131, № 6. P. 1891–1899.
9. *Pigola S., Rigoli M., Setti A. G.* A Liouville-type result for quasi-linear elliptic equations on complete Riemannian manifolds // J. Functional Analysis. 2005. Vol. 219, № 2. P. 400–432.
10. *Grigor'yan A.* Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Browman motion on Riemannian manifolds // Bull. Amer. Math. Soc. 1999. Vol. 36. P. 135–249.

11. *Serrin J., Zou H.* Cauchy – Liouville and universal boundedness theorems for quasilinear elliptic equations and inequalities // Acta. Math. 2002. № 189. P. 79–142.
12. *Гинзбург В. Л., Ландау Л. Д.* К теории сверхпроводимости // ЖЭТФ. 1950. Т. 20. С. 1064–1091.
13. *Aranson I. S., Kramer L.* The world of the complex Ginzburg – Landau equation // Rev. Mod. Phys. 2002. Vol. 74, № 1. P. 99–143.
14. *Aronson D. G., Weinberger H. F.* Multidimensional nonlinear diffusion arising in population genetics // Advances in Math. 1978. Vol. 30. P. 33–76.
15. *Tolksdorf P.* Regularity for more general class of quasilinear elliptic equations // J. Differ. Equations. 1984. № 51. P. 126–150.

Some Liouville-type Theorems for the Stationary Ginsburg – Landau Equation on Quasi-model Riemannian Manifolds

S. S. Vikharev

Volgograd State University, 100, prospect Universitetsky, 400062, Volgograd, Russia, vhr1987@mail.ru

In this paper we find the conditions for validity of Liouville-type theorems for bounded solutions of the stationary Ginsburg – Landau equation and quasilinear elliptic inequality $-\Delta u \geqslant u^q$, $q > 1$, on quasi-model Riemannian manifolds.

Key words: Ginsburg – Landau equation, Riemannian manifolds, Liouville-type results.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 13-01-97038).

References

1. Losev A. G. Certain Liouville Theorems for Riemannian Manifolds of a Special Form. *Soviet Math.* [Izvestiya VUZ. Matematika], 1991, vol. 35, no. 12, pp. 15–23.
2. Losev A. G. On some Liouville theorems on noncompact Riemannian manifolds. *Siberian Math. J.*, 1998, vol. 39, no. 1, pp. 74–80. DOI: 10.1007/BF02732362.
3. Losev A. G., Mazepa E. A. Bounded solutions of the Schrodinger equation on Riemannian products. *St. Petersburg Math. J.*, 2002, vol. 13, no. 1, pp. 57–73.
4. Losev A. G., Fedorenko Iu. S. Positive solutions of quasilinear elliptic inequalities on noncompact Riemannian manifolds. *Math. Notes*, 2007, vol. 81, no. 6, pp. 778–787. DOI: 10.1134/S000143460 7050252.
5. Losev A. G., Mazepa E. A. On Asymptotical Behavior of the Positive Solutions Some Quasilinear Inequalities on Model Riemannian Manifolds. *Science Journal of VolSU. Mathematics. Physics*, 2013, no. 1(18), pp. 59-69 (in Russian).
6. Bidaut-Veron M., Pohozaev S. I. Non-existence results and estimates for some nonlinear elliptic problems. *J. Anal. Math.*, 2001, vol. 84, pp. 1–49. DOI: 10.1007/BF02788105.
7. Diaz J. *Nonlinear Partial Differential Equations and Free Boundary Problem, Vol. 1 : Elliptic Equations*. Pitman Research Notes in Mathematics, Boston, 1985, vol. 106, 323 p. DOI: 10.1002/zamm.19870670311.
8. Dancer E. N., Du Y. Some remarks on Liouville type results for quasilinear elliptic equations. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2002, vol. 131, no. 6, pp. 1891–1899. DOI: 10.2307/1194368.
9. Pigola S., Rigoli M., Setti A. G. A Liouville-type result for quasi-linear elliptic equations on complete Riemannian manifolds. *J. Functional Analysis*, 2005, vol. 219, no. 2, pp. 400–432. DOI: 10.1016/j.jfa.2004.05.009.
10. Grigor'yan A. Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Browman motion on Riemannian manifolds. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1999, vol. 36, pp. 135–249. DOI: 10.1090/S0273-0979-99-00776-4.
11. Serrin J., Zou H. Cauchy-Liouville and universal boundedness theorems for quasilinear elliptic equations and inequalities. *Acta. Math.*, 2002, no. 189, pp. 79–142. DOI: 10.1007/BF02392645.
12. Ginzburg V. L., Landau L. D. K teorii sverkhprovodimosti. [On the theory of superconductivity]. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 1950, vol. 20, pp. 1064–1091 (in Russian).
13. Aranson I. S., Kramer L. The world of the complex Ginzburg-Landau equation. *Rev. Mod. Phys.*, 2002, vol. 74, no 1, pp. 99–143. DOI: 10.1103/RevModPhys.74.99.
14. Aronson D. G., Weinberger H. F. Multidimensional nonlinear diffusion arising in population genetics. *Advances in Math.*, 1978, vol. 30, pp. 33–76. DOI: 10.1016/0001-8708(78)90130-5.
15. Tolksdorf P. Regularity for more general class of quasilinear elliptic equations. *J. Differ. Equations*, 1984, no. 51, pp. 126–150. DOI: 10.1016/0022-0396(84)90105-0.