References

1. Bakhturin Iu. A. *Tozhdestva v algebrakh Li* [Identities in Lie algebras]. Moscow, Nauka, 1985, 448 p. (in Russian).
2. Giambruno A., Zaicev M. Polynomial Identities and Asymptotic Methods. *Mathematical Surveys and Monographs*. Providence, RI, American Math. Soc., 2005, vol. 122, 352 p.
3. Mishchenko S. S. New example of a variety of Lie algebras with fractional exponent *Russian Math.* [Moscow Univ. Math. Bull.], 2011, vol. 66, pp. 264–266.
4. Kirillov A. A., Molev A. I. *On the algebraic structure of the Lie algebra of vector fields*. Preprint no. 16. Moscow, In-t prikl. matematiki im. M. V. Keldysha AN SSSR, 1985, 23 p. (in Russian).
5. Malyusheva O. A., Mishchenko S. P., Verevkin A. B. Series of varieties of Lie algebras of different fractional exponents. *Compt. rend. Acad. Bulg. Sci.*, 2013, vol. 66, no. 3, pp. 321–330.

УДК 517.518

ВЕСОВАЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ СУММ РЯДОВ ПО МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ СИСТЕМАМ

С. С. Волосивец[1], Р. Н. Фадеев[2]

[1]Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций и приближений, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, VolosivetsSS@mail.ru

[2]Аспирант кафедры теории функций и приближений, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, belal_templier@mail.ru

Получены необходимые и достаточные условия L^p-интегрируемости со степенным весом функции f, представимой рядом по мультипликативной системе с обобщенно-монотонными коэффициентами. Интегрируемость мажоранты частичных сумм представляющего функцию ряда описывается теми же условиями. Кроме того, мы изучаем интегрируемость разностного отношения $(f(x) - f(0))/x$.

Ключевые слова: весовая L^p-интегрируемость, мультипликативная система, степенной вес, обобщенно-монотонная последовательность.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\{p_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$, $2 \le p_n \le N$. По определению $m_0 = 1$, $m_n = p_n m_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, тогда каждое $x \in [0, 1)$ имеет разложение вида

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n/m_n, \quad x_n \in \mathbb{Z}_+ \cap [0, p_n). \tag{1}$$

Разложение (1) будет единственным, если для $x = k/m_l$, $k, l \in \mathbb{Z}_+$, $0 < k < m_l$, брать разложение с конечным числом $x_n \ne 0$. Каждое $k \in \mathbb{Z}_+$ единственным образом представимо в виде $k = \sum\limits_{i=1}^{\infty} k_i m_{i-1}$, $k_i \in \mathbb{Z}_+ \cap [0, p_i)$. Для $x \in [0, 1)$ и $k \in \mathbb{Z}_+$ положим по определению $\chi_k(x) = \exp\left(2\pi i \sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j k_j/m_j\right)$. Система $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ является ортонормированной на $[0, 1)$ и полной в $L^1[0, 1)$. Подробнее о ее свойствах см. [1, § 1.5]. Измеримая на $[0, 1)$ функция $f(x)$ принадлежит пространству $L^r_\alpha[0, 1)$, $1 \le r < \infty$, $\alpha \in \mathbb{R}$, если конечна норма $\|f\|_{r,\alpha} = \left(\int_0^1 |f(x)|^r x^\alpha\, dx\right)^{1/r}$.

Сумма $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \chi_k(x) =: D_n(x)$ называется n-м ядром Дирихле. Для ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \chi_k(x) \tag{2}$$

рассмотрим частичные суммы $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k\chi_k(x)$, $n \in \mathbb{N}$, и максимальные функции $M(x) = \sup\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} |S_{m_n}(x)|$, $M^*(x) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |S_n(x)|$. Будем писать $\{a_k\}_{k=0}^{\infty} \in GM$, если

$$\sum_{k=n}^{2n-1} |a_k - a_{k+1}| \le Ca_n, \qquad n \in \mathbb{N}; \qquad |a_0 - a_1| \le Ca_0. \tag{3}$$

Можно показать, что для $\{a_k\}_{k=0}^{\infty} \in GM$ при дополнительном условии $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k/k < \infty$ ряд (2) сходится при $x \ne 0$ (лемма 5). Класс GM, введенный С. Ю. Тихоновым [2], включает в себя класс последовательностей $RBVS$, введенный Л. Лейндлером (L. Leindler) [3] и определяемый неравенством $\sum\limits_{k=n}^{\infty} |a_k - a_{k+1}| \le Ca_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Он содержит также класс QM квазимонотонных последовательностей, рассматривавшийся А. А. Конющковым [4]. Далее, $\Delta a_j = a_j - a_{j+1}$, $\Delta^2 a_j = a_j - 2a_{j+1} + a_{j+2}$, $j \in \mathbb{Z}_+$.

Обзор ранних работ по проблеме L^r-интегрируемости со степенным весом суммы тригонометрического ряда можно найти в [5]. В том числе в [5] даны критерии принадлежности сумм тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами указанным выше классам. В последнее время много работ посвящено ослаблению условия монотонности при сохранении критерия интегрируемости. Отметим в этой связи работы [2, 3, 6]. В статье Ф. Морица [7] было дано условие L^r-интегрируемости не суммы ряда (2), а мажоранты его частичных сумм $M^*(x)$ для ряда по системе Уолша с монотонными коэффициентами. Там же были даны оценки L^r-нормы подобных рядов снизу. Другие результаты типа теоремы Харди – Литтлвуда для рядов (2) с монотонными коэффициентами были приведены в статье [8] без доказательства. В статье С. С. Волосивца [9] аналог теоремы Харди – Литтлвуда был получен для рядов (2) с коэффициентами классов $RBVS$ и QM. В нашей работе [10] даны оценки наилучших приближений функций сверху в L^r и пространстве Харди, при условии, что разности коэффициентов удовлетворяют некоторому условию, близкому к изучавшимся Р. Аски (R. Askey) и С. Вейнгером (S. Wainger) [11]. Следует также отметить работу Т. М. Вуколовой и М. И. Дьяченко [12], в которой получены двусторонние одинаковые по порядку оценки L^r-нормы косинус-ряда с выпуклыми коэффициентами и синус-ряда с монотонными коэффициентами, причем $r \in (0, \infty)$.

Далее, выражение $A(f) \asymp B(f)$ означает, что $C_1A(f) \le B(f) \le C_2(f)$, где $C_1, C_2 > 0$ не зависят от f. Константы $C, C_1, C_2, \dots$ являются разными в различных случаях.

1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Лемма 1 [1, гл. 1,§ 1.5; 13, гл. 4, § 3]. 1) *Пусть* $D_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \chi_k(x)$. *Тогда* $D_{m_n}(x) = m_n X_{[0,1/m_n)}(x)$, $n \in \mathbf{Z}_+$, *где* X_E *— характеристическая функция множества* E.

2) *Для любых* $n \in \mathbb{N}$ *и* $x \in (0,1)$ *имеет место неравенство* $|D_n(x)| \le N/x$, *где* $p_i \le N$ *для всех* $i \in \mathbb{N}$.

Лемма 2. [2] *Пусть* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in GM$, *тогда справедливы неравенства*

$$\sum_{j=k}^{n-1} |a_j - a_{j+1}| \le C\left(\sum_{j=k}^{n-1} a_j/j + a_k\right), \qquad n \ge k+1, \qquad n,k \in \mathbb{Z}_+,$$

и $a_n \le Ca_j$, $j \le n \le 2j$, $a_1 \le Ca_0$.

В леммах 3 и 4 приведены знаменитые неравенства Харди – Литтлвуда [14, теорема 346].

Лемма 3. *Пусть* $1 \le p < \infty$, $r > 1$, $a_n \ge 0$ *при* $n \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-r}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^p \le C(p,r)\sum_{n=1}^{\infty} n^{-r}(na_n)^p.$$

Лемма 4. *Пусть* $1 \le p < \infty$, $s < 1$, $a_n \ge 0$ *при* $n \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}\left(\sum_{i=n}^{\infty} a_i\right)^p \le C(p,s)\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}(na_n)^p.$$

Аналогично как в статье [2], с помощью лемм 1 и 2 показывается

Лемма 5. *Пусть* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in GM$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k/k < \infty$. *Тогда ряд* (2) *сходится при* $x \neq 0$.

Лемма 6. *Пусть* $f \in L^1[0,a)$ ($f \in L^1_{loc}[0,a)$ *при* $a = +\infty$), $1 \le p < \infty$, $f(x) \ge 0$ *на* $[0,a)$ *и* $F(x) = x^{-1}\int_0^x f(t)\,dt$, $x \in (0,a)$. *Тогда при* $r < p-1$ *справедливо неравенство*

$$\int_0^a x^r F^p(x)\,dx \le (p/(r-1))^p \int_0^a x^r f^p(x)\,dx.$$

Неравенство леммы 6 принадлежит Г. Харди [14, теорема 330].

Последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется квази убывающей, если $a_n \ge Ca_{n+j}$ при $1 \le j \le n$.

Лемма 7. 1) *Пусть последовательность* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *квази убывает, а последовательность* $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ *не отрицательна. Тогда имеет место неравенство*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p n^{p-1} \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k \le C \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^p, \quad p > 1.$$

2) *Пусть последовательность* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *не отрицательна, а последовательность* $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ *положительна,* $p \ge 1$. *Тогда имеет место неравенство*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(\sum_{k=n}^{\infty} a_k\right)^p \le p^p \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{1-p} \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right)^p a_n^p.$$

.

Лемма 7 доказана Л. Лейндлером (L. Leindler) в [15, теорема 1] и [16].

Лемма 8. *Пусть* $F_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} D_k(x)/n$, $n \in \mathbb{N}$. *Тогда для* $x \in (0,1)$ *и* $n \in \mathbb{N}$ *справедливо неравенство* $|nF_n(x)| \le Cx^{-2}$.

Лемму 8, доказанную С. С. Волосивцом, можно найти в [17].

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. *Пусть* $-1 < \alpha < r-1$, $r \ge 1$, $\{a_k\}_{k=0}^{\infty} \in GM$ *и* $S_{r,\alpha}(a) := \left(\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j^r (j+1)^{r-2-\alpha}\right)^{1/r} < \infty$. *Тогда* $M^*(x) := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \left|\sum\limits_{j=0}^{n-1} a_j \chi_j(x)\right|$ *принадлежит* $L^r_\alpha[0,1)$ *и при этом* $\|M^*\|_{r,\alpha} \le CS_{r,\alpha}(a)$.

Доказательство. Отметим, что в силу условия $\alpha < r-1$ из неравенства $S_{r,\alpha}(a) < \infty$ по неравенству Гельдера следует, что $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j/j < \infty$ и по лемме 5 ряд (2) сходится при $x \neq 0$. Пусть $x \in [1/(p+1), 1/p)$, $p \in \mathbb{N}$. Тогда с помощью преобразования Абеля и лемм 1, 2 имеем:

$$\left|\sum_{j=p}^{n-1} a_j \chi_j(x)\right| = \left|\sum_{j=p}^{n-2} (a_j - a_{j+1}) D_{j+1}(x) + a_{n-1}D_n(x) - a_p D_p(x)\right| \le$$
$$\le Nx^{-1}\left(\sum_{j=p}^{n-2} |a_j - a_{j+1}| + a_{n-1} + a_p\right) \le C_1 N x^{-1}\left(\sum_{j=p}^{n-1} a_j/j + a_p + a_{n-1}\right). \tag{4}$$

Если $n-1 \le 2p$, то $a_{n-1} \le C_2 a_p$ по лемме 2. Если же $n-1 > 2p$, то справедливо неравенство $\sum\limits_{j=[(n-1)/2]}^{n-1} a_j/j \ge C_3 a_{n-1}$. Таким образом в правой части (4) можно убрать a_{n-1} и тогда

$$\left|\sum_{j=0}^{n-1} a_j \chi_j(x)\right| \le C_4 \left(\sum_{j=0}^{p-1} a_j + pa_p + p\sum_{j=p}^{n-1} a_j/j\right).$$

Как и выше показывается, что $a_p \le C_5 \sum\limits_{j=[(p-1)/2]}^{p-1} a_j/j$, $p \ge 3$, и $pa_p \le C_5 \sum\limits_{j=0}^{p-1} a_j$, $p \le 2$. Поэтому

$$\left|\sum_{j=0}^{n-1} a_j\chi_j(x)\right| \le C_6\left(\sum_{j=0}^{p-1} a_j + p\sum_{j=p}^{n-1} a_j/j\right).$$

Теперь по определению $M^*(x)$ имеем $M^*(x) \le C_6\left(\sum\limits_{j=0}^{p-1} a_j + p\sum\limits_{j=p}^{\infty} a_j/j\right)$ и

$$\int_0^1 (M^*(x))^r x^\alpha\,dx = \sum_{p=1}^{\infty}\int_{1/(p+1)}^{1/p}(M^*(x))^r x^\alpha\,dx \le$$

$$\le C_7\sum_{p=1}^{\infty}\int_{1/(p+1)}^{1/p}\left[\left(\sum_{j=0}^{p-1} a_j\right)^r + p^r\left(\sum_{j=p}^{\infty} a_j/j\right)^r\right]p^{-\alpha} \le$$

$$\le C_8\sum_{p=1}^{\infty}p^{-2-\alpha}\left(\sum_{j=1}^{p} a_{j-1}\right)^r + C_8\sum_{p=1}^{\infty}p^{r-2-\alpha}\left(\sum_{j=p}^{\infty} a_j/j\right)^r. \qquad (5)$$

При $2+\alpha>1$ применяем лемму 3 и получаем:

$$\sum_{p=1}^{\infty}p^{-2-\alpha}\left(\sum_{j=1}^{p} a_{j-1}\right)^r \le C_9\sum_{p=1}^{\infty}p^{-2-\alpha}(pa_{p-1})^r = C_9\sum_{p=1}^{\infty}p^{r-2-\alpha}a_{p-1}^r. \qquad (6)$$

При $r-\alpha-2>-1$, т.е. при $\alpha<r-1$, по лемме 4 находим, что

$$\sum_{p=1}^{\infty}p^{r-2-\alpha}\left(\sum_{j=p}^{\infty} a_j/j\right)^r \le C_{10}\sum_{p=1}^{\infty}p^{r-2-\alpha}(pa_p/p)^r = C_{10}\sum_{p=1}^{\infty}p^{r-2-\alpha}a_p^r. \qquad (7)$$

Объединяя неравенства (5), (6) и (7), получаем:

$$\int_0^1 (M^*(x))^r x^\alpha\,dx \le C_{11}\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)^{r+\alpha-2}a_j^r. \qquad \square$$

Теорема 2. *Пусть $-1<\alpha<r-1$, $r>1$, $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}\in GM$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k/k<\infty$. Если сумма $f(x)$ ряда (2) принадлежит $L_\alpha^r[0,1)$, то $S_{r,\alpha}(a)\le C\|f\|_{r,\alpha}<\infty$.*

Доказательство. Рассмотрим $F(x)=\int_0^x f(u)\,du$. В силу ортонормированности системы $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ и леммы 1 имеем:

$$F(1/m_l)=\int_0^{1/m_l} f(u)\,du = m_l^{-1}\int_0^1 f(u)D_{m_l}(u)\,du = m_l^{-1}\sum_{k=0}^{m_l-1}a_k.$$

Если $G(x)=\int_0^x |f(u)|\,du$, то $|F(x)|\le G(x)$ и по лемме 6 при $\alpha<r-1$

$$\int_0^1 (x^{-1}G(x))^r x^\alpha\,dx \le C\int_0^1 |f(x)|^r x^\alpha\,dx.$$

Но

$$\int_0^1 x^{\alpha-r}G^r(x)\,dx = \sum_{l=0}^{\infty}\int_{1/m_{l+1}}^{1/m_l} x^{-r}G^r(x)x^\alpha\,dx \ge \sum_{l=0}^{\infty}G^r(1/m_{l+1})(1/m_l)^{\alpha-r}(m_l^{-1}-m_{l+1}^{-1}) \ge$$

$$\ge 2^{-1}\sum_{l=1}^{\infty}F^r(1/m_l)m_{l-1}^{r-\alpha-1} \ge C_1\sum_{l=0}^{\infty}\left(m_l^{-1}\sum_{k=0}^{m_l-1}a_k\right)^r m_l^{r-\alpha-1} \ge C_2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}a_k\right)^r n^{-\alpha-2}.$$

Чтобы получить последнее неравенство, надо заметить, что $\sum\limits_{k=0}^{m_l-1} a_k \ge \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k$ при $n \in [m_{l-1}, m_l - 1]$ и $n^{-\alpha-2} \le N^{\alpha+2} m_l^{-\alpha-2}$ при тех же n, поэтому

$$\sum_{n=m_{l-1}}^{m_l-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k\right)^r n^{-\alpha-2} \le \sum_{n=m_{l-1}}^{m_l-1} n^{-\alpha-2} \left(\sum_{k=0}^{m_l-1} a_k\right)^r \le C_3 m_l^{-\alpha-1} \left(\sum_{k=0}^{m_l-1} a_k\right)^r.$$

Наконец, согласно части 1 леммы 7 и ввиду второго свойства $\{a_k\}_{k=0}^{\infty} \in GM$ из леммы 2 находим при $-\alpha - 2 < -1$, т.е. при $\alpha > -1$, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha-2} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{k-1}\right)^r \ge C_4 \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}^r n^{r-1} \sum_{k=n}^{\infty} k^{-\alpha-2} \ge C_5 \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)^{r-\alpha-2} a_j^r. \qquad \square$$

Теорема 3. *Пусть $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ не отрицательна, квази убывает и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i < \infty$, $r \ge 1$, $\alpha < -1$ и $f_d(x)$ равна сумме ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i(1 - \chi_i(x))$. Тогда*

$$\|f_d\|_{r,\alpha} \asymp \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha-2} \left(\sum_{k=n}^{\infty} a_k\right)^r\right)^{1/r}.$$

Доказательство. Учитывая, что $\chi_n(x) = 1$ при $n < m_{k-1}$ на $[1/m_k, 1/m_{k-1})$, получаем, что при $x \in [1/m_k, 1/m_{k-1})$

$$|f_d(x)| = \left|\sum_{n=m_{k-1}}^{\infty} a_n(1 - \chi_n(x))\right| \le 2 \sum_{n=m_{k-1}}^{\infty} a_n,$$

поэтому

$$\int_0^1 |f_d(x)|^r x^\alpha\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{1/m_k}^{1/m_{k-1}} |f_d(x)|^r x^\alpha\, dx \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{\infty} m_k^{-\alpha} (1/m_{k-1} - 1/m_k) \left(2 \sum_{n=m_{k-1}}^{\infty} a_n\right)^r \le C_1 \sum_{k=1}^{\infty} m_k^{-\alpha-1} \left(\sum_{n=m_{k-1}}^{\infty} a_n\right)^r \le$$

$$\le C_1 \left(m_1^{-\alpha-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)^r + \sum_{k=2}^{\infty} m_k^{-\alpha-1} \left[\sum_{j=m_{k-2}}^{m_{k-1}-1} \left(\sum_{n=j}^{\infty} a_n\right)^r (m_{k-1} - m_{k-2})^{-1}\right]\right) \le$$

$$\le C_2 \left(m_1^{-\alpha-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)^r + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{n=j}^{\infty} a_n\right)^r j^{-\alpha-2}\right) \le C_2 \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{n=j}^{\infty} a_n\right)^r j^{-\alpha-2}.$$

С другой стороны, при $x \in [1/m_k, 1/m_{k-1})$ и $n \in [m_{k-1}, 2m_{k-1})$ верно неравенство

$$\mathrm{Re}\,(1 - \chi_n(x)) = 1 - \cos(2\pi x_k/p_k) \ge 2\sin^2 \pi/N > 0,$$

так как x_k из разложения (1) принадлежит $[1, p_k - 1] \cap \mathbb{Z}$. Поэтому

$$\int_0^1 |f_d(x)|^r x^\alpha\, dx \ge \sum_{k=1}^{\infty} \int_{1/m_k}^{1/m_{k-1}} C_3 \left(\sum_{j=m_k}^{2m_k-1} a_j\right)^r (1/m_k)^\alpha.$$

Но в силу квази убывания $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$

$$\sum_{j=m_{k-1}}^{2m_{k-1}-1} a_J \ge C_4 \sum_{j=2m_{k-1}}^{4m_{k-1}-1} a_j \ge C_4^2 \sum_{j=4m_{k-1}}^{8m_{k-1}-1} a_j \ge \ldots,$$

откуда в силу ограниченности m_k/m_{k-1} следует, что $\sum\limits_{j=m_{k-1}}^{2m_{k-1}-1} a_j \geq C_5 \sum\limits_{j=m_{k-1}}^{m_k-1} a_j$. Таким образом,

$$\int_0^1 |f_d(x)|^r x^\alpha\, dx \geq C_6 \sum_{k=1}^\infty m_k^{-\alpha-1} \left(\sum_{j=m_{k-1}}^{m_k-1} a_j \right)^r.$$

Пусть $b_k = \sum\limits_{j=m_{k-1}}^{m_k-1} a_j$ и $B_k = \sum\limits_{j=k}^{\infty} b_j = \sum\limits_{j=m_{k-1}}^{\infty} a_j$. По части 2) леммы 7 имеем

$$\sum_{k=1}^\infty m_k^{-\alpha-1} B_k^r \leq r^r \sum_{n=1}^\infty m_n^{-(\alpha+1)(1-r)} \left(\sum_{i=1}^n m_i^{-\alpha-1} \right)^r b_n^r \leq r^r \sum_{n=1}^\infty m_n^{-(\alpha+1)(1-r+r)} b_n^r.$$

Аналогично теореме 2 доказывается, что

$$\sum_{n=1}^\infty m_n^{-\alpha-1} B_n^r \geq C_7 \sum_{j=1}^\infty j^{-\alpha-2} \left(\sum_{i=j}^\infty a_j \right)^r.$$

Из полученных неравенств следует утверждение теоремы. □

Следствие 1. *Пусть* $\{a_i\}_{i=1}^\infty$, r *удовлетворяют условию теоремы 3,* $\alpha < r-1$, $f(x)$ *— сумма ряда* (2). *Тогда функция* $(f(x)-f(0))/x$ *принадлежит* $L^r_\alpha[0,1)$ *в том и только в том случае, когда сходится ряд* $\sum\limits_{n=1}^\infty n^{r-\alpha-2} \left(\sum\limits_{k=n}^\infty a_k \right)^r$.

Замечание 1. Теоремы 1 и 2 обобщают результаты из [9], теорема 3 является мультипликативным аналогом теоремы 6.7 из [5].

Теорема 4. *Пусть* $-1 < \alpha < 2r-1$, $r \geq 1$, $\Delta^2 a_k \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k = 0$ *и* $Q_{r,\alpha}(a) = \left(\sum\limits_{i=0}^\infty (i+1)^{3r-2-\alpha} (\Delta^2 a_i)^r \right)^{1/r} < \infty$. *Тогда сумма* $f(x)$ *ряда* (2) *принадлежит* $L^r_\alpha[0,1)$ *и* $\|f\|_{r,\alpha} \leq CQ_{r,\alpha}(a)$.

Доказательство. В силу условия имеем $\Delta a_k = \sum\limits_{i=k}^\infty \Delta^2 a_i \geq 0$. Применяя дважды преобразование Абеля и используя леммы 1 и 8, стандартным образом получаем $f(x) = \sum\limits_{k=0}^\infty \Delta^2 a_k (k+1) F_{k+1}(x)$, $x \in (0,1)$. Поэтому

$$\int_0^1 |f(x)|^r x^\alpha\, dx \leq 2^{r-1} \sum_{l=1}^\infty \int_{1/(l+1)}^{1/l} \left| \sum_{j=0}^{l-1} \Delta^2 a_j (j+1) F_{j+1}(x) \right|^r x^\alpha\, dx +$$

$$+ 2^{r-1} \sum_{l=1}^\infty \int_{1/(l+1)}^{1/l} \left| \sum_{j=l}^{\infty} \Delta^2 a_j (j+1) F_{j+1}(x) \right|^r x^\alpha\, dx = I_1 + I_2.$$

Так как $|D_j(x)| \leq j$, то $|nF_n(x)| \leq \sum\limits_{j=1}^n |D_j(x)| \leq n^2$. Поэтому по лемме 3 при $\alpha > -1$ имеем:

$$I_1 \leq C_1 \sum_{l=1}^\infty l^{-\alpha-2} \left(\sum_{j=1}^l j^2 \Delta^2 a_{j-1} \right)^r \leq C_2 \sum_{l=1}^\infty l^{-\alpha-2} \left(l^3 \Delta^2 a_{l-1} \right)^r = C_2 \sum_{l=1}^\infty l^{3r-\alpha-2} \left(\Delta^2 a_{l-1} \right)^r. \quad (8)$$

С другой стороны, по лемме 4 и лемме 8 при $2r-2-\alpha > -1$ находим, что

$$2^{1-r} I_2 \leq \sum_{l=1}^\infty l^{-\alpha-2} \left(\sum_{j=l}^\infty C_3 l^2 \Delta^2 a_j \right)^r = C_3^r \sum_{l=1}^\infty l^{2r-\alpha-2} \left(\sum_{j=l}^\infty \Delta^2 a_j \right)^r \leq C_4 \sum_{l=1}^\infty l^{3r-\alpha-2} \left(\Delta^2 a_l \right)^r. \quad (9)$$

Из (8) и (9) вытекает неравенство теоремы. □

Замечание 2. Теорема 4 близка по своему содержанию к оценке сверху в теореме из [12], однако в последней работе оценка для косинус-ряда была получена в терминах первых разностей выпуклых коэффициентов.

Библиографический список

1. *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения. М. : Наука, 1987. 344 с.
2. *Tikhonov S.* Trigonometric series with general monotone coefficients // J. Math. Anal. Appl. 2007. Vol. 326, № 1. P. 721–735.
3. *Leindler L.* A new class of numerical sequences and its application to sine and cosine series // Analysis Math. 2002. Vol. 28, № 4. P. 279–286.
4. *Конюшков А. А.* Наилучшее приближение тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье // Мат. сб. 1958. Т. 44, № 1. С. 53–84.
5. *Boas R. P.* Integrability theorems for trigonometric transforms. Berlin : Springer, 1967. 68 p.
6. *Dyachenko M., Tikhonov S.* Integrability and continuity of functions represented by trigonometric series: coefficients criteria // Studia Math. 2009. Vol. 193, № 3. P. 285–306.
7. *Moricz F.* On Walsh series with coefficients tending monotonically to zero // Acta Math. Hung. 1983. Vol. 38, № 1–4. P. 183–189.
8. *Тиман М. Ф., Рубинштейн А. И.* О вложении классов функций, определенных на нуль-мерных группах // Изв. вузов. Математика. 1980. № 6. С. 66–76.
9. *Волосивец С. С.* О некоторых условиях в теории рядов по мультипликативным системам // Analysis Math. 2007. Vol. 33, № 3. P. 227–246.
10. *Volosivets S. S., Fadeev R. N.* Estimates of best approximations in integral metrics and Fourier coefficients with respect to multiplicative systems // Analysis Math. 2011. Vol. 37, № 3. P. 215–238.
11. *Askey R., Wainger S.* Integrability theorems for Fourier series // Duke Math. J. 1966. Vol. 33, № 2. P. 223–228.
12. *Вуколова Т. М., Дьяченко М. И.* О свойствах сумм тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика и механика. 1994. № 3. С. 22–31.
13. *Агаев Г. Н., Виленкин Н. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И.* Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. Баку : Элм, 1981. 180 с.
14. *Харди Г., Литтлвуд Дж., Полиа Г.* Неравенства. М. : Изд-во иностр. лит., 1948. 576 с.
15. *Leindler L.* Inequalities of Hardy – Littlewood type // Analysis Math. 1976. Vol. 2, № 2. P. 117–123.
16. *Leindler L.* Generalization of inequalities of Hardy and Littlewood // Acta Sci. Math. (Szeged). 1970. Vol. 31, № 1–2. P. 279–285.
17. *Iofina T. V., Volosivets S. S.* On the degree of approximation by means of Fourier – Vilenkin series in Hölder and L^p norm // East J. Approximations. 2009. Vol. 15, № 2. P. 143–158.

Weighted Integrability of Sums of Series with Respect to Multiplicative Systems

S. S. Volosivets, R. N. Fadeev

Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., 410012, Saratov, Russia, VolosivetsSS@mail.ru, belal_templier@mail.ru

A necessary and sufficient condition for L^p-integrability with power weight of a function f represented by the series with respect to multiplicative systems with generalized monotone coefficients is obtained. The integrability of the majorant of partial sums of a representing series is also described by the same conditions. In addition we study the integrability of difference quotient $(f(x) - f(0))/x$.

Key words: weighted L^p-integrability, multiplicative system, power weight, generalized monotone sequences.

References

1. Golubov B. I., Efimov A. V., Skvortsov V. A. *Walsh series and transforms. Theory and applications.* Dordrecht, Kluwer, 1991.

2. Tikhonov S. Trigonometric series with general monotone coefficients. *J. Math. Anal. Appl.*, 2007, vol. 326, no. 1, pp. 721–735.

3. Leindler L. A new class of numerical sequences and its application to sine and cosine series. *Analysis Math.*, 2002, vol. 28, no. 4, pp. 279–286.

4. Konyushkov A. A. Nailuchshee priblizhenie trigonometricheskimi polinomami i koefficienty Fur'e [The best approximation by trigonometrical polynomials and Fourier coefficients]. *Mat. sbornik*, 1958, vol. 44, no. 1, pp. 53–84 (in Russian).

5. Boas R. P. *Integrability theorems for trigonometric transforms*. Berlin, Springer, 1967.

6. Dyachenko M., Tikhonov S. Integrability and continuity of functions represented by trigonometric

series: coefficients criteria. *Studia Math.*, 2009, vol. 193, no. 3, pp. 285–306.
7. Moricz F. On Walsh series with coefficients tending monotonically to zero. *Acta Math. Hung.*, 1983, vol. 38, no. 1–4, pp. 183–189.
8. Timan M. F., Rubinstein A.I. On embedding of function classes defined on zero-dimensional groups. *Izvestiya vuzov. Matematika.* [Soviet Math.], 1980, no. 6, pp. 66–76 (in Russian).
9. Volosivets S. S. On certain conditions in the theory of series with respect to multiplicative systems. *Analysis Math.*, 2007, vol. 33, no. 3, pp. 227–246 (in Russian).
10. Volosivets S. S., Fadeev R. N. Estimates of best approximations in integral metrics and Fourier coefficients with respect to multiplicative systems. *Analysis Math.*, 2011, vol. 37, no. 3, pp. 215–238.
11. Askey R., Wainger S. Integrability theorems for Fourier series. *Duke Math. J.*, 1966, vol. 33, no. 2, pp. 223–228.
12. Vukolova T. M., Dyachenko M. I. On the properties of trigonometric series sums with monotone coefficients. *Vestnik Mosk. Universiteta. Ser. Matem. mech.*, 1994, no. 3, pp. 22–31 (in Russian).
13. Agaev G. N., Vilenkin N. Ya., Dzhafarli G. M., Rubinstein A. I. *Mul'tiplikativnye sistemy funkcii i garmonicheskii analiz na nul'-mernyh gruppah* [Multiplicative systems of functions and harmonic analysis on zero-dimensional groups]. Baku, Elm, 1980 (in Russian).
14. Hardy G. H., Littlewood J. E., Polya G. *Inequalities*. Cambridge, Cambridge University Press, 1934.
15. Leindler L. Inequalities of Hardy – Littlewood type. *Analysis Math.*, 1976, vol. 2, no. 2, pp. 117–123.
16. Leindler L. Generalization of inequalities of Hardy andf Littlewood. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 1970, vol. 31, no. 1–2, pp. 279–285.
17. Iofina T. V., Volosivets S. S. On the degree of approximation by means of Fourier – Vilenkin series in Hölder and L^p norm. *East J. Approximations.*, 2009, vol. 15, no. 2, pp. 143–158.

УДК 517.937, 517.983

О СОСТОЯНИЯХ ОБРАТИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В. Б. Диденко

Кандидат физико-математических наук, научный сотрудник кафедры математических методов исследования операций, Воронежский государственный университет, vladimir.didenko@gmail.com

Исследуемому линейному дифференциальному оператору (уравнению) с неограниченными периодическими операторными коэффициентами, действующему в одном из банаховых пространств векторных функций, определенных на всей оси, сопоставляется разностный оператор (разностное уравнение) с постоянным операторным коэффициентом, определенный в соответствующем банаховом пространстве двусторонних векторных последовательностей. Для дифференциального и разностного оператора доказаны утверждения о совпадении размерностей их ядер и кообразов, одновременной дополняемости ядер и образов, одновременной обратимости, получены утверждения о взаимосвязи спектров.

Ключевые слова: дифференциальные операторы, разностные операторы, состояния обратимости, спектр.

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается линейное дифференциальное уравнение

$$-\frac{dx}{dt} + A(t)x = f(t), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где $A(t) : D(A(t)) \subset X \to X$ — семейство линейных замкнутых операторов, действующих в комплексном банаховом пространстве X.

Предполагается корректная разрешимость задачи Коши [1]

$$x(s) = x_0 \in D(A(s)), \qquad s \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

для однородного дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \qquad t \geq s. \tag{3}$$