



Полученные в данной работе приближенные системы уравнений могут быть использованы при исследовании длинноволновых колебаний и процессов распространения нестационарных волн в многослойных оболочках. В последнем случае они применимы вдали от фронтов волн.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 11-01-00545-а).

### Библиографический список

1. *Karapınar J. D., Kossovich L. Yu., Nolde E. V.* Dynamics of thin walled elastic bodies. San Diego : Academic Press, 1998. 226 p.
2. *Коссович Л. Ю.* Нестационарные задачи теории упругих тонких оболочек. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1986. 176 с.
3. *Коссович Л. Ю., Каплунов Ю. Д.* Асимптотический анализ нестационарных упругих волн в тонких оболочках вращения при ударных торцевых воздействиях // Изв. Сарат. ун-та. 2001. Т. 1, вып. 2. С. 111–131.
4. *Каплунов Ю. Д., Кириллова И. В., Коссович Л. Ю.* Асимптотическое интегрирование динамических уравнений теории упругости для случая тонких оболочек // ПММ. 1993. Т. 57, вып. 1. С. 83–91.
5. *Коссович Л. Ю., Шевцова Ю. В.* Асимптотические приближения трехмерных динамических уравнений теории упругости в случае двухслойных пластин // Проблемы прочности и пластичности : межвуз. сб. Н. Новгород : Изд-во Нижегород. ун-та, 2005. Вып. 76. С. 102–111.
6. *Амбарцумян С. А.* Общая теория анизотропных оболочек. М. : Наука, 1971. 446 с.

УДК 539.3

## ОДНОМЕРНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ГИБКИХ ТРУБКАХ

Ю. П. Гуляев

Саратовский государственный университет  
E-mail: gulvis@yandex.ru

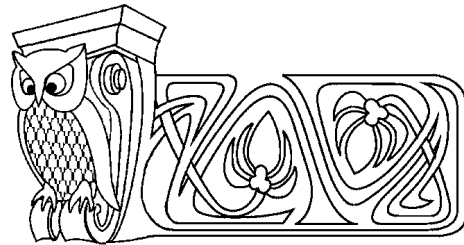
В статье описан новый вариант осреднения уравнений Навье–Стокса для осесимметричного течения вязкой несжимаемой жидкости при минимальном числе упрощающих гипотез. Приведена полная система пространственно одномерных дифференциальных уравнений, описывающая динамику кровотока в системе крупных артериальных сосудов.

**Ключевые слова:** линеаризация, одномерные уравнения, осесимметричные колебания, закон Пуазейля.

Одномерные уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости [1] применяются для моделирования динамики кровотока в крупных артериях. Эти уравнения положены в основу создания быстродействующих многопараметрических моделей артериальных систем, которые достаточно быстро и точно могут численно описывать динамику кровотока в соответствующей части артериальной системы применительно к конкретному индивидууму. Используемый в настоящее время вариант уравнений, полученный с помощью осреднения уравнений Навье–Стокса для осесимметричного течения вязкой несжимаемой жидкости и некоторых упрощающих предположениях [2], на наш взгляд, не полностью отражает характер течения жидкости в случае осевой симметрии потока и когда осевая скорость существенно больше радиальной скорости течения.

В данной работе предлагается новый, более строгий математический подход к выводу одномерных уравнений осесимметричных движений вязкой жидкости. При этом существенно сокращается число дополнительных гипотез. В частности, непосредственно закон Пуазейля, справедливый только для установившихся течений в тонких жестких трубках, здесь не используется.

Предположим, что происходит осесимметричное нестационарное течение вязкой несжимаемой жидкости в предварительно натянутой гибкой цилиндрической трубке. В цилиндрической системе



### One-Dimensional Equations of Motion of a Viscous Incompressible Fluid in Flexible Tubes

Yu. P. Gulyaev

This paper describes a new variant of the averaging of the Navier–Stokes equations for axisymmetric flow of a viscous incompressible fluid with a minimum number of simplifying hypotheses. The complete system is spatially one-dimensional differential equations describing the dynamics of blood flow in the large arteries.

**Key words:** linearized, one-dimensional equation, axisymmetric oscillations, Poiseuille law.



координат, где ось  $z$  направлена по оси потока, уравнения Навье–Стокса имеют вид [3]:

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right), \\ \rho \left( \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_x \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left( -\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial(rv_z)}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Для потоков жидкости с существенным преобладанием осевой скорости уравнения (1) легко линеаризуются и принимают более простой вид:

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + 2v_0 \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right), \\ \rho \left( \frac{\partial v_r}{\partial t} + 2v_0 \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left( -\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial(rv_z)}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $v_0$  — средняя скорость преобладающего осевого течения.

Из этих уравнений вытекает уравнение для давления  $p$ :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0. \quad (3)$$

Осредняя уравнение (3) по площади поперечного сечения круглой трубки номинального радиуса  $R$  и вводя среднее по сечению давление в потоке жидкости по формуле

$$p_c = \frac{2}{R^2} \int_0^R r p \, dr,$$

получим следующее соотношение:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{r=R} = -\frac{R}{2} \frac{\partial^2 p_c}{\partial z^2}. \quad (4)$$

Осреднение первого уравнения системы (1) по радиусу трубки приводит к известному одномерному уравнению движения для объёмного расхода жидкости  $Q$  [2]:

$$\rho \left( \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{2Q_0}{\pi R^2} \frac{\partial Q}{\partial z} \right) = -\pi R^2 \frac{\partial p_c}{\partial z} + 2\pi R \mu \left. \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|_{r=R} + \mu \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2}, \quad Q = 2\pi \int_0^R r v_z \, dr. \quad (5)$$

Здесь  $Q_0$  — средний за период пульсации объёмный расход в направлении оси трубки.

Таким образом, в рамках линейной теории в данном случае учитывается конвективная часть ускорения частиц жидкости.

Аналогично преобразуется уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости

$$v_r|_{r=R} = -\frac{1}{2\pi R} \frac{\partial Q}{\partial z}. \quad (6)$$

Запишем второе уравнение системы (2) с учетом равенства (4) на границе контакта жидкости и стенки трубки:

$$\rho \left( \left. \frac{\partial v_r}{\partial t} \right|_{r=R} + 2v_0 \left. \frac{\partial v_r}{\partial z} \right|_{r=R} \right) = \frac{R}{2} \frac{\partial^2 p_c}{\partial z^2} + \mu \left( -\frac{\partial}{\partial z} \left( \left. \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|_{r=R} \right) + \left. \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right|_{r=R} \right). \quad (7)$$

Легко показать, что уравнение (7) будет выполнено, если будет выполнено уравнение (4). Для этого нужно из уравнения (7) исключить с помощью уравнения неразрывности (6) радиальную скорость стенки трубы.



Найдем давление на контактной поверхности. Для этого второе уравнение системы (2) умножим на  $r^2$  и проинтегрируем по частям в пределах от 0 до  $R$ . После применения к соответствующим интегралам теоремы о среднем значении окончательно получим:

$$p|_{r=R} = p_c - \rho \frac{R}{2} \left( \frac{\partial v_r}{\partial t} \Big|_{r=R} + 2v_0 \frac{\partial v_r}{\partial z} \Big|_{r=R} \right) - \rho \frac{1}{8\pi} \left( \frac{\partial^2 Q}{\partial t \partial z} + 2v_0 \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} \right) + \mu \left[ -\frac{\partial v_z}{\partial z} \Big|_{r=R} + \frac{2}{R} v_r|_{r=R} + \frac{R}{2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \Big|_{r=R} + \frac{1}{8\pi} \frac{\partial^3 Q}{\partial z^3} \right]. \quad (8)$$

Из уравнения неразрывности вытекает следующее равенство:

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} \Big|_{r=R} = -\frac{1}{R} v_r|_{r=R} - \frac{\partial v_z}{\partial z} \Big|_{r=R}. \quad (9)$$

Запишем уравнения осесимметричных колебаний круглой цилиндрической оболочки с учетом предварительного натяжения её стенок в продольном и поперечном направлениях [3]. Материал стенок предполагаем линейно упругим и изотропным. Деформации оболочки считаются малыми.

$$\rho_{ст} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial s}{\partial z} + \frac{s_0 - T_0}{R} \frac{\partial w}{\partial z} + \tau, \quad \rho_{ст} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{T}{R} + \frac{T_0}{R^2} w + s_0 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + q, \quad (10)$$

$$s = \frac{Eh}{1 - \nu^2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \nu \frac{w}{R} \right), \quad T_0 = \frac{Eh}{1 - \nu^2} \left( \frac{w}{R} + \nu \frac{\partial u}{\partial z} \right),$$

где  $E$  — модуль Юнга материала,  $h$  — толщина оболочки,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $s_0$ ,  $T_0$  — соответственно мембранные силы предварительного продольного и поперечного натяжений оболочки.

Для уравнений гидроупругости необходимо написать кинематические и статические контактные условия на поверхности контакта стенки оболочки с жидкостью.

1. Условие безотрывного обтекания и условия прилипания частиц [1] жидкости к внутренней стенке оболочки:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v_z|_{r=R}, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = v_r|_{r=R}. \quad (11)$$

2. Статические контактные условия, выражающие условие непрерывности нормальных и касательных напряжений на поверхности контакта:

$$q = p|_{r=R} - 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} \Big|_{r=R}, \quad \tau = \mu \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} \Big|_{r=R} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \Big|_{r=R} \right). \quad (12)$$

Определенная трудность возникает при нахождении скорости деформации сдвига на стенке трубы  $\partial v_z / \partial r|_{r=R}$ .

Здесь можно предложить следующий приближенный метод. Введем в рассмотрение среднее по сечению трубки скорость деформации частиц жидкости:

$$\left( \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)_{cp} = \frac{2}{R^2} \int_0^R r \frac{\partial v_z}{\partial r} dr = \frac{2}{R} \left( v_z|_{r=R} - \frac{Q}{\pi R^2} \right) = \frac{2}{R} \left( \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{Q}{\pi R^2} \right). \quad (13)$$

В случае установившегося течения вязкой жидкости в круглых трубках с жесткими стенками (течение Пуазейля) отношение скорости деформации сдвига на стенке трубки к средней по сечению трубки скорости деформации сдвига близко к двум. Предположим, что такое же отношение справедливо и для гибких трубок в общем случае осесимметричного неустановившегося течения. Тогда будем иметь:

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} \Big|_{r=R} = 2 \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)_{cp} = \frac{4}{R} \left( \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{Q}{\pi R^2} \right). \quad (14)$$

Из формулы (14), как частный случай, следует известное выражение скорости деформации сдвига на жесткой стенке при установившемся течении ( $\partial u / \partial t = 0$ ).



Кроме того, можно получить простую формулу, связывающую скорость продольного перемещения стенки сосуда с объёмным расходом жидкости и осевой скоростью потока. Для этого определим среднюю скорость деформации сдвига частиц жидкости по-другому:

$$\left(\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)_{\text{cp}} = \frac{1}{R} \int_0^R \frac{\partial v_z}{\partial r} dr = \frac{1}{R} (v_z|_{r=R} - v_x(0)) = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial t} - v_z|_{r=0}\right). \quad (15)$$

Вычитая почленно из формулы (13) формулу (15), окончательно получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{2Q}{\pi R^2} - v_z|_{r=0}. \quad (16)$$

Измеряя методом доплерографии объёмный расход крови  $Q$  и максимальную осевую скорость потока, по формуле (16) можно найти скорость продольного перемещения стенки сосуда. Эта скорость в качестве дополнительной продольной составляющей может включать в себя скорость продольного реактивного сокращения мышц стенки сосуда при работе вторичного распределенного сердца.

Теперь запишем систему одномерных уравнений гидроупругости, которая может быть использована при моделировании пульсирующего кровотока в системе крупных артерий:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial Q}{\partial t} &= -\pi R^2 \frac{\partial p_c}{\partial z} + 2\pi R \mu \frac{\partial v_z}{\partial r} \Big|_{r=R} + \mu \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2}, & Q &= 2\pi \int_0^R r v_z dr, \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= -\frac{1}{2\pi R} \frac{\partial Q}{\partial z}, & \rho_{\text{ст}} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial s}{\partial z} + \frac{s_0 - T_0}{R} \frac{\partial w}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \Big|_{r=R} \right), \\ \rho_{\text{ст}} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= -\frac{T}{R} + \frac{T_0}{R^2} w + s_0 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + p|_{r=R} - 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} \Big|_{r=R}, \\ s &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \nu \frac{w}{R} \right), & T &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left( \frac{w}{R} + \nu \frac{\partial u}{\partial z} \right), \\ p|_{r=R} &= p_c + \rho \frac{1}{8\pi} \left( \frac{\partial^2 Q}{\partial t \partial z} + 2v_0 \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} \right) - \mu \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t} + \frac{1}{\pi R^2} \frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^3 Q}{\partial z^3} \right], \\ \frac{\partial v_r}{\partial r} \Big|_{r=R} &= -\frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t} = \frac{1}{2\pi R^2} \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t}, \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} \Big|_{r=R} &= \frac{4}{R} \left( \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{Q}{\pi R^2} \right), & \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{1}{R} \left( \frac{2Q}{\pi R^2} - v_z|_{r=0} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Система замкнута, так как для определения десяти искомым функций  $Q$ ,  $u$ ,  $w$ ,  $s$ ,  $T$ ,  $p_c$ ,  $p|_{r=R}$ ,  $v_x|_{r=0}$ ,  $\frac{\partial v_r}{\partial r}|_{r=R}$ ,  $\frac{\partial v_z}{\partial r}|_{r=R}$  имеем десять уравнений.

В классе периодических функций времени эта система решается точно, и её общее решение можно представить комплексными рядами Фурье.

### Библиографический список

1. Педли Т. Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. М. : Мир, 1983. 400 с.
2. Гуляев Ю. П., Коссович Л. Ю. Математические модели биомеханики в медицине / учеб. пособие для студ. мех.-мат. фак. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2001. 49 с.
3. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика : в 2 ч. М. : Физматгиз, 1963. Ч. 2. 728 с.