УДК 519.4

О РАСПОЗНАВАНИИ ЯЗЫКОВ ПРОИЗВОЛЬНЫХ СЛОВ КОНЕЧНЫМИ ПОЛУГРУППАМИ

В.А. Молчанов

Саратовский государственный университет,
кафедра геометрии
E-mail: v.molchanov@inbox.ru

В настоящей работе на основе методов нестандартного анализа разрабатывается новый подход к теории бесконечных произведений в конечных полугруппах. Основные результаты работы показывают, что бесконечные произведения элементов стандартных последовательностей в конечных полугруппах могут рассматриваться как двухсторонние алгебраические дубликаты конечных произведений специального вида. С помощью этих результатов строится универсальный функтор категории конечных полугрупп в категорию конечных четырехсортных алгебр специального вида и вводится понятие языка произвольных слов, распознаваемого конечными полугруппами. Рассматриваются приложения этих методов к теории распознаваемых языков на конечных полугруппах.

On Recognition of Languages of Arbitrary Words by Finite Semigroups

V. A. Molchanov

Based on methods of nonstandard analysis we elaborate in this paper a new approach to the theory of infinite products in finite semigroups. The main theorems of the paper show that infinite products of elements of standard sequences in finite semigroups can be viewed as a two-sided algebraic counterpart of finite products of a special kind. Using these results we construct a universal functor of the category of finite semigroups to the category of finite four-sorted algebras of a special kind and introduce a notion of a language of arbitrary words recognized by finite semigroups. Applications of these methods to the theory of recognizable languages on finite semigroups are considered.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящается развитию теории формальных языков произвольных слов на конечных полугруппах.

Как известно (см., например, обзор [1]), начало теории формальных языков было положено Н. Хомским [2], который ввел понятие слова в виде конечной последовательности букв алфавита, понятие языка в виде произвольного множества слов и понятие грамматики в виде совокупности правил, порождающих язык из алфавита. На основе такого подхода Н. Хомский построил и исследовал первую иерархию формальных языков. Позже С. Гинзбург [3] показал, что так называемые праволинейные грамматики порождают класс языков, которые подходящим образом обрабатываются конечными автоматами и называются распознаваемыми языками. Тесная взаимосвязь между конечными автоматами и полугруппами их переходов естественным образом привела к понятию распознаваемого конечной полугруппой языка. С точки зрения теории формальных языков этот факт устанавливает эквивалентность между конечными автоматами и конечными полугруппами. В то же время алгебраический подход к теории формальных языков, разработанный М. Шютценберже и С. Эйленбергом [4, 5] на основе распознавания таких языков конечными полугруппами, открыл новые возможности для более глубокого исследования теоретико-модельными методами комбинаторных аспектов теории распознаваемых языков. Один из главных результатов теории формальных языков – известная теорема С. Клини [6] показывает, что класс распознаваемых языков совпадает с классом рациональных языков, которые задаются рациональными выражениями в форме обобщенных полиномов с тремя специальными операциями (объединение, произведение и итерация языков).

В связи с широким применением в компьютерных науках (например, при моделировании компьютерных программ или вычислительных схем) не только конечных, но и бесконечных слов, естественно возникает задача исследования языков произвольных слов, содержащих конечные и бесконечные в любую сторону слова. Первые исследования в этом направлении были посвящены главным образом языкам бесконечных вправо слов (см., например, обзор [7]). Показательно, что при переносе основных понятий теории языков конечных слов на бесконечные слова исследователи получали базисные определения, которые, с одной стороны, были вполне естественными и перспективными, но, с другой стороны, интерпретировались весьма неоднозначно и, как правило, приводили к разнообразным техническим проблемам. Так, в работе [8] Буши ввел понятие конечного автомата, действующего на бесконечные вправо слова, и доказал для языков таких слов аналог теоремы Клини, который утверждает, что класс распознаваемых языков бесконечных вправо слов совпадает с классом языков, которые задаются рациональными выражениями в форме обобщенных полиномов с тремя ранее уже известными стандартными рациональными операциями (объединение, произведение и итерация языков) и принципиально новой операцией бесконечной итерации. При этом оказалось, что в отличие от случая языков конечных слов при распознавании языков бесконечных слов детерминистские и недетерминистские автоматы Буши уже не эквивалентны между собой: сложная взаимосвязь между такими автоматами устанавливается в известной теореме МакНатона [9]. Что касается вопроса о распознаваемости языков бесконечных вправо слов конечными полугруппами, то первые попытки найти алгебраический эквивалент конечного автомата, распознающего такие языки, убедительно показали невозможность его решения в рамках теории конечных полугрупп. Позже эта проблема была успешно решена Уилки [10] на основе конечных полугрупп с дополнительным бесконечным произведением, алгебраическая структура которых (в силу теоремы Рамсея [11]) полностью определяется операциями конечной сигнатуры – операциями двухсортной алгебры Уилки. Таким образом, с точки зрения теории языков бесконечных слов конечные автоматы Буши оказываются эквивалентными конечным двухсортным алгебрам Уилки.

С другой стороны, в работе [12] было положено начало унифицированному подходу к теории языков произвольных слов, в основе которого лежат теоретико-модельные принципы нестандартного анализа [13], позволяющие переносить определенные свойства конечных математических объектов на бесконечные математические объекты. Такой подход не только позволяет естественно переносить на языки произвольных слов базисные понятия теории формальных языков, но и эффективно получать в этом направлении новые результаты с помощью универсальных методов нестандартного анализа. Так, в работе [12] на основе нестандартного подхода для конечного автомата естественно введено понятие распознаваемого им языка произвольных слов и показано, что класс таких языков совпадает с классом так называемых обобщенно рациональных языков, которые задаются рациональными выражениями в форме обобщенных полиномов с тремя специальными операциями (объединение, тернарное произведение и бесконечная итерация). В то же время в работе [14] показано, как с помощью методов нестандартного анализа и нестандартной топологии [15] можно по непрерывности канонически продолжить любое отображение φ алфавита A в произвольную конечную полугруппу S на множество всех слов над этим алфавитом (как конечных, так и бесконечных в любую сторону). Согласно этим результатам, реализация такого продолжения отображения φ: $A \to S$ на множество всех слов приводит к каноническому расширению исходной полугруппы S до четырехсортной алгебры , элементами которой интерпретируются все слова над алфавитом A. Этот результат позволяет естественно ввести понятие языка произвольных слов, распознаваемого конечными полугруппами.

В настоящей работе приводится обоснование изложенной выше программы построения теории распознавания языков произвольных слов конечными полугруппами. В первом разделе работы изучаются бесконечные произведения элементов конечных полугрупп и показывается (теорема 1.4), как взаимосвязаны бесконечные произведения членов одной и той же последовательности элементов конечной полугруппы. Во втором разделе для конечной полугруппы вводится каноническая конструкция четырехсортной алгебры (теорема 2.3), которая определяет функтор категории конечных полугрупп в категорию конечных (четырехсортных) алгебр Уилки (теорема 2.6). В третьем разделе приводится конструкция канонического продолжения произвольного отображения алфавита A в произвольную конечную полугруппу S до гомоморфизма алгебры всех слов над алфавитом A в соответствующую алгебру Уилки (теорема 3.1). На основании этого результата вводится понятие языка произвольных слов, распознаваемого конечной полугруппой, и описывается класс таких языков.

В работе используются общепринятая терминология теории формальных языков [7] и теории полугрупп [16], а также ряд основополагающих понятий нестандартного анализа из [13]. Образно говоря, нестандартный анализ является теоретико-модельной техникой, которая позволяет конструировать нестандартные расширения рассматриваемых математических структур (таких как полугруппы, топологические пространства и др.) с точно такими же элементарными свойствами. При этом обычно предполагается, что каждый математический объект A рассматривается как элемент теоретико-множественного универсума $\boldsymbol{U} = V(\boldsymbol{S})$ с множеством базисных элементов (атомов) $\boldsymbol{S}$. Тогда нестандартное расширение $^*A$ объекта A является математическим объектом, конструируемым подобным образом над расширенным множеством атомов $^*\boldsymbol{S}$. В результате этой конструкции получается вложение * универсума $\boldsymbol{U}$ в собственную подструктуру $^*\boldsymbol{U}$ нового теоретико-множественного универсума $V(^*\boldsymbol{S})$, так что выполняются, в частности, следующие принципы нестандартного анализа.

Принцип расширения. Для любого объекта $A \in \boldsymbol{U}$ *-образ $^*A$ содержит множество $A^\sigma = \{^*a : a \in A\}$, которое в том и только том случае является собственным подмножеством $^*A$, если A бесконечно.

Принцип переноса. Для произвольных $A_1, \ldots, A_n \in \boldsymbol{U}$ любое утверждение $\Phi = \Phi(x_1, \ldots, x_n)$ логики первого порядка с ограниченными кванторами истинно в $\boldsymbol{U}$ тогда и только тогда, когда это утверждение Φ истинно в $^*\boldsymbol{U}$ для *-образов $^*A_1, \ldots, {}^*A_n$.

Множество $A \in V(^*\boldsymbol{S})$ принято называть *внутренним*, если $A \in {}^*\boldsymbol{U}$.

Заметим, что по построению отображения * , для любого $a \in \boldsymbol{S}$ выполняется $^*a = a$ и для каждого математического объекта $a \in \boldsymbol{U}$, сконструированного над множеством атомов $\boldsymbol{S}$, *-образ $^*A$ является математическим объектом над $^*\boldsymbol{S}$, сконструированным подобным образом. Более того, из принципа переноса следует, что для произвольных подмножества $A \subset \boldsymbol{S}$, отображения $f : \boldsymbol{S} \to \boldsymbol{S}$ и n-арного отношения $\sigma \subset \boldsymbol{S} \times \ldots \times \boldsymbol{S}$ соответствующие *-образы являются подмножеством $^*A \subset {}^*\boldsymbol{S}$, отображением $^*f : {}^*\boldsymbol{S} \to {}^*\boldsymbol{S}$ и n-арным отношением* $\sigma \subset {}^*\boldsymbol{S} \times \ldots \times {}^*\boldsymbol{S}$, причем ограничения этих *-образов на $\boldsymbol{S}$ равны A, f и σ соответственно. Следовательно, символ «*» в обозначениях расширений таких отображений и отношений может быть опущен. Поэтому с целью упрощения применения методов нестандартного анализа обычно считают, что основные множества всех изучаемых математических структур являются подмножествами множества атомов $\boldsymbol{S}$.

Пример 1. Пусть $\boldsymbol{F}(A,B)$ обозначает множество всех отображений A в B. Такая операция $\boldsymbol{F}$ имеет нестандартный дубликат $^*\boldsymbol{F}$, действующий на внутренние множества так, что, если A,B – внутренние множества, то условие $f \in {}^*\boldsymbol{F}(A,B)$ по принципу переноса означает, что f отображает A в B и $f \in {}^*\boldsymbol{U}$. Таким образом, $^*\boldsymbol{F}(A,B)$ есть множество всех внутренних отображений A в B.

Пример 2. Пусть $\boldsymbol{Z} = (\boldsymbol{Z}, +, \le)$ – линейно упорядоченная полугруппа целых чисел. Тогда, по принципу переноса, нестандартное расширение $^*\boldsymbol{Z}$ также является линейно упорядоченной полугруппой. Кроме того, по принципу расширения $^*\boldsymbol{Z} \ne \boldsymbol{Z}$. Легко видеть, что элементы $m \in {}^*\boldsymbol{Z} \setminus \boldsymbol{Z}$ удовлетворяют условию $|m| > n$ для любого натурального числа $n \in \boldsymbol{N}$. Такие элементы $m \in {}^*\boldsymbol{Z} \setminus \boldsymbol{Z}$ будем называть *бесконечными числами* и символически обозначать $m \approx +\infty$, если m – положительное бесконечное число, и $m \approx -\infty$, если m – отрицательное бесконечное число.

Пример 3. Пусть A – конечное множество и $W_{fin}(A)$ – полугруппа слов над алфавитом A, которая может быть определена по формуле

$$W_{fin}(A) = \{f : (\exists\, m,n \in \boldsymbol{Z})\ (n \le m\ \wedge f \in \boldsymbol{F}([n,m],A))\}.$$

Тогда по принципу переноса множество

$$^*W_{fin}(A) = \{f : (\exists\, m,n \in {}^*\boldsymbol{Z})\ (n \le m\ \wedge f \in {}^*\boldsymbol{F}([n,m],A))\}$$

с операцией конкатенации образует полугруппу нестандартных слов над A.

Пример 4. Пусть A – конечное множество и $W(A)$ – множество всех слов над алфавитом A (содержащее конечные и бесконечные в любую сторону слова), которое по аналогии с множеством $W_{fin}(A)$ может быть определено по формуле

$$W(A) = \{f : (\exists\, m,n \in \boldsymbol{Z} \cup \{-\infty,+\infty\})\ ((n,m) \ne \varnothing\ \wedge f \in \boldsymbol{F}((n,m),A))\}.$$

Значит $W(A)$ является подмножеством множества X всех частичных отображений $\boldsymbol{Z}$ в A , на котором в силу результатов [5] нестандартно определяется равномерно непрерывная сходимость частичных отображений $\gamma \subset X \times {}^*X$, так что справедливы следующие утверждения:

1) для любого $h \in {}^*W_{fin}(A)$ условие $(f,h) \in \gamma$ равносильно тому, что $f \in W(A)$ и $h = {}^*f\,|[n,m]$ для некоторых $m,n \in {}^*\boldsymbol{Z}$, $n \le m$;

2) замыкание множества $W_{fin}(A)$ в пространстве сходимости X равно множеству всех слов $W(A)$ над алфавитом A.

Как известно [16], любое отображение φ множества A в конечную полугруппу S канонически расширяется до гомоморфизма φ: $W_{fin}(A) \to \mathrm{S}$, которое для слов $w = a_1 \ldots a_k$ из множества $W_{fin}(A)$ определяется по правилу: $\varphi(w) = \varphi(a_1) \ldots \varphi(a_k)$. В силу принципа переноса этот гомоморфизм φ по такому же правилу расширяется до гомоморфизма ${}^*\varphi : {}^*W_{fin}(A) \to \mathrm{S}$. Следовательно (исходя из принципа продолжения гомоморфизма φ по непрерывности), для канонического расширения отображения φ на множество всех слов над алфавитом A необходимо отождествить все образы ${}^*\varphi(w_1)$,${}^*\varphi(w_2)$ бесконечно близких слов $w_1, w_2 \in {}^*W_{fin}(A)$, которые в силу вышеизложенного являются бесконечными произведениями членов одной и той же стандартной последовательности элементов полугруппы S. Это построение последовательно реализуется ниже в настоящей работе.

1. БЕСКОНЕЧНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ В КОНЕЧНЫХ ПОЛУГРУППАХ

Этот раздел посвящается изучению бесконечных произведений в конечных полугруппах с помощью методов нестандартного анализа.

Лемма 1.1. Пусть A – конечное множество, $a \in A$ и $x \in$. Тогда равенство $x_{(m,n)} = a$ в том и только том случае выполняется для некоторых $m,n \approx +\infty$, если существуют такие последовательности натуральных чисел $k_1 < k_2 < \ldots$ и $l_1 < l_2 < \ldots$, что при любых $i \in \boldsymbol{N}$ выполняется равенство $x_{(k_i,l_i)} = a$.

Доказательство. Пусть $x_{(m,n)} = a$ для некоторых $m,n \approx +\infty$. Тогда для любых $p,q \in \boldsymbol{N}$ в нестандартном универсуме ${}^*\boldsymbol{U}$ истинно следующее утверждение:

$$(\exists\, k,l \in {}^*\boldsymbol{N})\ (k > p\ \wedge\ l > q\ \wedge\ x_{(k,l)} = a)$$

(так как, например, мы можем выбрать $k = m$, $l = n$). Значит, по принципу переноса в стандартном универсуме $\boldsymbol{U}$ истинно следующее утверждение:

$$(\exists\, k,l \in \boldsymbol{N})\ (k > p\ \wedge\ l > q\ \wedge\ x_{(k,l)} = a).$$

Положим: $k_0 = l_0 = 1$. Тогда для любого $i \in \boldsymbol{N}$ найдутся такие значения k_i, $l_i \in \boldsymbol{N}$, что $k_i > k_{i-1}$, $l_i > l_{i-1}$ и $x_{(k_i,l_i)} = a$. По построению этих последовательностей натуральных чисел $k_1 < k_2 < \ldots$ и $l_1 < l_2 < \ldots$ при любых $i \in \boldsymbol{N}$ выполняется равенство $x_{(k_i,l_i)} = a$.

С другой стороны, предположим, что существуют такие последовательности натуральных чисел $k_1 < k_2 < \ldots$ и $l_1 < l_2 < \ldots$, что равенство $x_{(k_i,l_i)} = a$ выполняется при любых $i \in \boldsymbol{N}$. Тогда в стандартном универсуме $\boldsymbol{U}$ истинно следующее утверждение:

$$(\forall p \in \boldsymbol{N})\ (\exists\, m,n \in \boldsymbol{N})\ (m,n > p\ \wedge\ x_{(m,n)} = a\ ).$$

Значит, по принципу переноса в нестандартном универсуме ${}^*\boldsymbol{U}$ истинно следующее утверждение:

$$(\forall p \in {}^*\boldsymbol{N})\ (\exists\, m,n \in {}^*\boldsymbol{N})\ (m,n > p\ \wedge\ x_{(m,n)} = a\ ).$$

В частности, для любого бесконечного числа $p \in {}^*\boldsymbol{N}$ найдутся такие $m,n \in {}^*\boldsymbol{N}$, что $m,n > p$ и $x_{(m,n)} = a$. Очевидно, что в этом случае $m,n \approx +\infty$.

Теорема 1.2. Пусть S – конечная полугруппа, $s \in S^{\mathrm{Z}}$ и для некоторых элементов $a \in S$, $m,n \approx +\infty$ выполняется равенство

$$s_{-n} \ldots s_{-1} s_0 s_1 \ldots s_m = a.$$

Тогда найдутся такие идемпотенты $e, f \in S$ и последовательности натуральных чисел $k_1 < k_2 < \ldots$, $l_1 < l_2 < \ldots$, что для любых $i \in \boldsymbol{N}$ выполняются следующие равенства:

$$s_{-n} \ldots s_{-1} s_0 s_1 \ldots s_m = s_{-k_i} \ldots s_{-1} s_0 s_1 \ldots s_{l_i} = eaf,$$

$$e = s_{-k_{i+1}} \ldots s_{-k_i - 1} \text{ и } f = s_{l_i + 1} \ldots s_{l_{i+1}}.$$

В этом случае упорядоченную тройку (e, a, f) будем называть *конечным представлением бесконечного в обе стороны произведения* $s_{-n} \ldots s_{-1} s_0 s_1 \ldots s_m$.

Доказательство. Для любых $k,l \in \boldsymbol{N}$ положим

$$x_{(k,l)} = s_{-k} \dots s_{-1}s_0s_1 \dots s_l.$$

Если $x_{(m,n)} = a$ для некоторых $m,n \approx +\infty$, то по лемме 1.1 найдутся такие последовательности натуральных чисел $k_1 < k_2 < \dots$ и $l_1 < l_2 < \dots$, что для всех $i \in \boldsymbol{N}$ выполняется равенство $x_{(k_i,l_i)} = a$. Рассмотрим полный граф G с множеством вершин $\boldsymbol{N}$ и для всех $i, j \in \boldsymbol{N}$, удовлетворяющих условию $i < j$, ребро, соединяющее вершины i и j, пометим упорядоченной парой $(s_{-k_j} \dots s_{-k_i-1}, s_{l_i+1} \dots s_{l_j})$. Так как мощность множества $|S^2| = r$ конечна, то в результате получаем реберную r-раскраску графа G. По бесконечной версии теоремы Рамсея (см., например, [11]) граф G имеет в качестве подграфа свою монохроматическую копию G', каждое ребро которой помечено одной и той же парой $(e,f) \in S^2$. Не нарушая общности, для простоты рассуждений можно предполагать, что таким монохроматическим графом является сам исходный граф G. Тогда для любых натуральных чисел $i,j,q \in \boldsymbol{N}$, удовлетворяющих условию $i < j < q$, выполняются следующие равенства:

$$e = s_{-k_j} \dots s_{-k_i-1} = s_{-k_q} \dots s_{-k_j-1} = s_{-k_q} \dots s_{-k_i-1}.$$

Так как

$$e^2 = (s_{-k_q} \dots s_{-k_j-1})(s_{-k_j} \dots s_{-k_i-1}) = s_{-k_q} \dots s_{-k_i-1} = e,$$

то элемент e – идемпотент полугруппы S. Аналогично легко проверить, что элемент f также является идемпотентом этой полугруппы. Следовательно, для любого натурального числа $i \in N$ выполняются следующие условия:

$$s_{-n} \dots s_{-1}s_0s_1 \dots s_m = x_{(n,m)} = x_{(k_{i+1},l_{i+1})} = s_{-k_{i+1}} \dots s_{-1}s_0s_1 \dots s_{l_{i+1}} =$$
$$= (s_{-k_{i+1}} \dots s_{-k_i-1})(s_{-k_i} \dots s_{-1}s_0s_1 \dots s_{l_{i+1}} s_{-1}s_0s_1 \dots s_{l_i})(s_{l_i} \dots s_{l_{i+1}}) = eaf.$$

Следствие 1.3. Пусть S – конечная полугруппа, $s \in S^Z$ и для некоторых элементов $a \in S$, $n \approx +\infty$ выполняется равенство

$$s_1 \dots s_n = a \text{ (соответственно } s_{-n} \dots s_{-1} = a).$$

Тогда найдется такой идемпотент $e \in S$ и такая последовательность натуральных чисел $k_1 < k_2 < \dots$, что для любых $i \in \boldsymbol{N}$ выполняются следующие равенства:

$$s_1 \dots s_n = s_1 \dots s_{k_i} = ae, \quad e = s_{k_i+1} \dots s_{k_{i+1}},$$
$$\text{(соответственно } s_{-n} \dots s_{-1} = s_{-k_i} \dots s_{-1} = ea, \quad e = s_{-k_{i+1}} \dots s_{-k_i-1}).$$

В этом случае упорядоченную тройку $(1, a, e)$ (соответственно $(e, a, 1)$) будем называть *конечным представлением бесконечного вправо произведения* $s_1 \dots s_n$ (соответственно *бесконечного влево произведения* $s_{-n} \dots s_{-1}$).

Теорема 1.4. Пусть S – конечная полугруппа, $s \in S^Z$ и для некоторых элементов $a,a' \in S$, $m,n,$ $m',n' \approx +\infty$ выполняются равенства:

$$s_{-n} \dots s_{-1}s_0s_1 \dots s_m = a, \ s_{-n'} \dots s_{-1}s_0s_1 \dots s_{m'} = a'.$$

Тогда найдутся такие идемпотенты $e,e', f, f' \in S$, элементы $x,y,u,v \in S$ и такие последовательности натуральных чисел

$$k_1 < k_1' < k_2 < k_2' < \dots, \ l_1 < l_1' < l_2 < l_2' < \dots,$$

что для любых $i \in \boldsymbol{N}$ выполняются следующие равенства:

$$s_{-n} \dots s_{-1}s_0s_1 \dots s_m = s_{-k_i} \dots s_{-1}s_0s_1 \dots s_{l_i} = eaf,$$
$$s_{-n'} \dots s_{-1}s_0s_1 \dots s_{m'} = s_{-k_i'} \dots s_{-1}s_0s_1 \dots s_{l_i'} = e'a'f',$$
$$x = s_{l_i+1} \dots s_{l_{i+1}'}, \quad y = s_{l_i'+1} \dots s_{l_{i+1}}, \quad u = s_{-k_{i+1}} \dots s_{-k_i'-1}, \quad v = s_{-k_i'} \dots s_{-k_i-1},$$
$$e = uv, f = xy, e' = vu, f' = yx, a = ua'y, a' = vax.$$

Доказательство. По теореме 1.2 бесконечные произведения $s_{-n} \dots s_{-1}s_0s_1 \dots s_m$ и $s_{-n'} \dots s_{-1}s_0s_1 \dots s_{m'}$

имеют конечные представления (e,a,f) и (e',a',f') соответственно. Это означает, что существуют такие последовательности натуральных чисел

$$k_1 < k_2 < \dots ,\ l_1 < l_2 < \dots,\ k'_1 < k'_2 < \dots ,\ l'_1 < l'_2 < \dots,$$

что для любых значений $i \in \boldsymbol{N}$ выполняются следующие равенства:

$$s_{-n}\dots s_{-1}s_0s_1\dots s_m = s_{-k_i}\dots s_{-1}s_0s_1\dots s_{l_i} = eaf,$$

$$s_{-n'}\dots s_{-1}s_0s_1\dots s_{m'} = s_{-k'_i}\dots s_{-1}s_0s_1\dots s_{l'_i} = e'a'f',$$

$$e = s_{-k_{i+1}}\dots s_{-k_i-1},\ f = s_{l_i+1}\dots s_{l_{i+1}},$$

$$e' = s_{-k'_{i+1}}\dots s_{-k'_i-1},\ f' = s_{l'_i+1}\dots s_{l'_{i+1}}.$$

Так как элементы e, f, e', f' являются идемпотентами полугруппы S, то без нарушения общности можно считать, что при любых значениях $i \in \boldsymbol{N}$ выполняются условия

$$k_1 < k'_1 < k_2 < k'_2 < \dots \text{ и } l_1 < l'_1 < l_2 < l'_2 < \dots .$$

Рассмотрим полный граф G с множеством вершин $\boldsymbol{N}$ и для всех $i,j \in \boldsymbol{N}$, удовлетворяющих условию $i < j$, ребро, соединяющее вершины i и j, пометим упорядоченной последовательностью $(g_1,\dots,g_8)$ из следующих восьми элементов:

$$g_1 = s_{l_i+1}\dots s_{l_j},\ g_2 = s_{l'_i+1}\dots s_{l'_j},\ g_3 = s_{l_i+1}\dots s_{l'_i},\ g_4 = s_{l'_i+1}\dots s_{l_j},$$

$$g_5 = s_{-k_j}\dots s_{-k_i-1},\ g_6 = s_{-k'_j}\dots s_{-k'_i-1},\ g_7 = s_{-k_j}\dots s_{-k'_i-1},\ g_8 = s_{-k'_i}\dots s_{-k_i-1}.$$

Так как мощность множества $|S^2| = r$ конечна, то в результате получаем реберную r-раскраску графа G. По бесконечной версии теоремы Рамсея (см., например, [11]), граф G имеет в качестве подграфа свою монохроматическую копию G', каждое ребро которой помечено одним и тем же элементом $(\overline{f}, \overline{f}', x, y, \overline{e}, \overline{e}', u, v)$ конечного множества S^8 . Легко видеть, что выполняются следующие равенства:

$$f = \overline{f},\ f' = \overline{f}',\ e = \overline{e},\ e' = \overline{e}'.$$

Не нарушая общности, для простоты рассуждений можно предполагать, что таким монохроматическим графом является сам исходный граф G. Тогда для любых натуральных чисел $i, j \in \boldsymbol{N}$, удовлетворяющих условию $i < j$, выполняются следующие равенства:

$$f = s_{l_i+1}\dots s_{l_j},\ \ f' = s_{l'_i+1}\dots s_{l'_j},\ x = s_{l_i+1}\dots s_{l'_i},\ \ y = s_{l'_i+1}\dots s_{l_j},$$

$$e = s_{-k_j}\dots s_{-k_i-1},\ \ e' = s_{-k'_j}\dots s_{-k'_i-1},\ \ u = s_{-k_j}\dots s_{-k'_i-1},\ \ v = s_{-k'_i}\dots s_{-k_i-1}.$$

Отсюда следует, что выполняются равенства:

$$f = s_{l_i+1}\dots s_{l_j} = (s_{l_i+1}\dots s_{l'_i})(s_{l'_i+1}\dots s_{l_j}) = xy,$$

$$f' = s_{l'_i+1}\dots s_{l'_j} = (s_{l'_i+1}\dots s_{l_j})(s_{l_j+1}\dots s_{l'_j}) = yx,$$

$$e = s_{-k_j}\dots s_{-k_i-1} = (s_{-k_j}\dots s_{-k'_i-1})(s_{-k'_i}\dots s_{-k_i-1}) = uv,$$

$$e' = s_{-k'_j}\dots s_{-k'_i-1} = (s_{-k'_j}\dots s_{-k_j-1})(s_{-k_j}\dots s_{-k'_i-1}) = vu.$$

Всюду далее для произвольной полугруппы S символом E_S будем обозначать множество всех идемпотентов этой полугруппы.

Лемма 1.5. Пусть S – конечная полугруппа и $(e,a,f) \in E_S \times S \times E_S$. Тогда равенство $eaf = a$ выполняется в том и только в том случае, если существует такая последовательность $s \in S^Z$, что (e,a,f) есть конечное представление бесконечного в обе стороны произведения $s_{-n}\dots s_{-1}s_0s_1\dots s_m$ для некоторых $m,n \approx +\infty$.

Доказательство. Достаточность утверждения леммы следует из теоремы 1.2. Для доказательства необходимости рассмотрим последовательность $s \in S^Z$, определенную по правилу

$$s_0 = a \text{ и } s_{-n} = e\ ,\ s_n = f \text{ для любых } n \in N.$$

Легко видеть, что в этом случае упорядоченная тройка (e,a,f) является конечным представлением бесконечного в обе стороны произведения $s_{-n}\ldots s_{-1}s_0s_1\ldots s_m$ для любых $m,n \approx +\infty$.

Для произвольных подмножеств A,B,C полугруппы S символом $A\dot{\times}B\dot{\times}C$ обозначим следующее множество:

$$A\dot{\times}B\dot{\times}C = \{(a,b,c) \in A \times B \times C : abc = b\}.$$

Лемма 1.6. Пусть S – конечная полугруппа и (e,a,f), (e',a',f') – элементы множества $E_S\dot{\times}S\dot{\times}E_S$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) найдутся такие элементы $s \in S^Z$ и $m,n,m',n' \approx +\infty$, что упорядоченные тройки (e,a,f) и (e',a',f') являются конечными представлениями бесконечных в обе стороны произведений

$$s_{-n}\ldots s_{-1}s_0s_1\ldots s_m \text{ и } s_{-n'}\ldots s_{-1}s_0s_1\ldots s_{m'},$$

соответственно;

2) найдутся элементы $u,v,x,y \in S$, удовлетворяющие следующим равенствам:

$$e = uv,\ e' = vu,\ f = xy,\ f' = yx \text{ и } a' = vax.$$

Доказательство этого результата следует из теоремы 1.4 и леммы 1.5.

Из результатов работы [7] следует, что для канонического расширения произвольного отображения φ конечного множества A в конечную полугруппу S на множество всех слов над алфавитом A необходимо сначала канонически продолжить [16] это отображение φ до гомоморфизма $\varphi: W_{fin}(A) \to S$, который нестандартно расширяется до гомоморфизма $^*\varphi : {}^*W_{fin}(A) \to S$, и затем (исходя из принципа продолжения гомоморфизма φ по непрерывности) необходимо для всех бесконечно близких слов $w_1,w_2 \in {}^*W_{fin}(A)$ отождествить их образы $^*\varphi(w_1)$, $^*\varphi(w_2)$, которые по лемме 1 [7] и теореме 1.4 являются бесконечными в обе стороны произведениями членов одной и той же стандартной последовательности элементов полугруппы S. С этой целью ввиду леммы 1.6 для полугруппы S введем следующее отношение эквивалентности $\equiv_S$ на множестве $E_S\dot{\times}S\dot{\times}E_S$:

$$(e,a,f) \equiv_S (e',a',f') \Leftrightarrow (\exists\, u,v,x,y \in S)\ (e = uv \wedge e' = vu \wedge f = xy \wedge f' = yx \wedge a' = vax).$$

Другими словами, упорядоченные тройки (e,a,f),(e',a',f') в том и только том случае будут $\equiv_S$-эквивалентны, если найдется такая последовательность $s \in S^Z$, что эти тройки для некоторых $m,n,m',n' \approx +\infty$ являются конечными представлениями бесконечных в обе стороны произведений $s_{-n}\ldots s_{-1}s_0s_1\ldots s_m$ и $s_{-n'}\ldots s_{-1}s_0s_1\ldots s_{m'}$ соответственно.

Для упорядоченной тройки $(e,a,f) \in E_S\dot{\times}S\dot{\times}E_S$ обозначим символом $<e,a,f>_S$ (кратко, $<e,a,f>$) класс отношения эквивалентности $\equiv_S$, содержащий элемент (e,a,f).

Лемма 1.7. Пусть S,T – конечные полугруппы и $\varphi : S \to T$ – гомоморфизм. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) для любых (e,a,f), $(e',a',f') \in E_S\dot{\times}S\dot{\times}E_S$ выполняется свойство

$$(e,a,f) \equiv_S (e',a',f') \Rightarrow (\varphi(e), \varphi(a), \varphi(f))\ _T\ (\varphi(e'), \varphi(a'), \varphi(f'));$$

2) отображение φ канонически расширяется до отображения $\tilde{\varphi}$ фактор-множества $E_S\dot{\times}S\dot{\times}E_S/\equiv_S$ в фактор-множество $E_T\dot{\times}T\dot{\times}E_T\ /\ _T$, значение которого для элементов $(e,a,f) \in E_S\dot{\times}S\dot{\times}E_S$ определяется по формуле

$$\tilde{\varphi}(<e,a,f>_S) = <\varphi(e), \varphi(a), \varphi(f)>_T .$$

Доказательство этого результата следует из свойств гомоморфизма и определения для конечной полугруппы S отношения эквивалентности $\equiv_S$.

2. БЕСКОНЕЧНЫЕ КОМПОНЕНТЫ КОНЕЧНЫХ ПОЛУГРУПП

В этом разделе показывается, как произвольная конечная полугруппа S может быть канонически расширена до четырехсортной алгебры , в которой вычисляются не только конечные, но и бесконечные степени элементов исходной полугруппы. Более того, из результатов предыдущего раздела следует, что в алгебре могут также вычисляться бесконечные произведения элементов исходной полугруппы.

Для произвольной полугруппы S обозначим символом $S^1 = S \cup \{1\}$ моноид с внешне присоединенной единицей 1 и рассмотрим множество $S' = E_{S^1} \dot{\times} S^1 \dot{\times} E_{S^1} \setminus \{(1,1,1)\}$. Введем также следующие обозначения:

$$S_1' = \{1\} \dot{\times} S \dot{\times} \{1\},\quad S_2' = E_S \dot{\times} S \dot{\times} \{1\},\quad S_3' = \{1\} \dot{\times} S \dot{\times} E_S,\quad S_4' = E_S \dot{\times} S \dot{\times} E_S.$$

Легко видеть, что эти множества не пересекаются и при объединении дают множество S'. Поэтому множество S' можно рассматривать как четырехсортное множество $S' = (S_1', S_2', S_3', S_4')$ с четырьмя компонентами S_1', S_2', S_3', S_4'.

Рассмотрим на множестве S' частичную бинарную операцию, которая для элементов (e,a,f), $(e',a',f') \in E_{S^1} \dot{\times} S^1 \dot{\times} E_{S^1}$ определяется по формуле

$$(e,a,f)(e',a',f') = (e,aa',f') \text{ в том и только том случае, если } f = e' = 1.$$

Легко видеть, что множество S' является частичным ассоциативным группоидом, т.е. в алгебре S' выполняется равенство $(xy)z = x(yz)$, если определено произведение хотя бы в одной из сторон этого равенства. В результате проведенных рассуждений получаем следующие результаты.

Лемма 2.1. Для любой конечной полугруппы S частичная операция группоида S' индуцирует следующие четыре операции на четырехсортном множестве $S' = (S_1', S_2', S_3', S_4')$:

1) бинарное умножение на множестве S_1', которое для любых $(1,a,1),(1,b,1) \in S_1'$ определяется по формуле $(1,a,1)(1,b,1) = (1,ab,1)$;

2) смешанное умножение $S_2' \times S_1' \to S_2'$, которое для любых $(e,a,1) \in S_2'$, $(1,b,1) \in S_1'$ определяется по формуле $(e,a,1)(1,b,1) = (e,ab,1)$;

3) смешанное умножение $S_1' \times S_3' \to S_3'$, которое для любых $(1,a,1) \in S_1'$, $(1,b,f) \in S_3'$ определяется по формуле $(1,a,1)(1,b,f) = (1,ab,f)$;

4) смешанное умножение $S_2' \times S_3' \to S_4'$, которое для любых $(e,a,1) \in S_2'$, $(1,b,f) \in S_3'$ определяется по формуле $(e,a,1)(1,b,f) = (e,ab,f)$.

При этом в четырехсортной алгебре S' для любых элементов $a,b,c \in S_1'$, $x \in S_2'$ и $y \in S_3'$ выполняются следующие равенства:

$$a(bc) = (ab)c,\ x(ab) = (xa)b,\ (ab)y = a(by),\ (xa)y = x(ay).$$

Лемма 2.2. Пусть S – конечная полугруппа, и $\equiv_{S^1}$ – определенное в предыдущем разделе отношение эквивалентности на моноиде S^1 . Тогда выполняются следующие свойства:

1) если $(1,a',1) \in S_1'$ и $(e,a,f) \in S'$, то условие $(1,a',1) \equiv_{S^1} (e,a,f)$ выполняется в том и только том случае, если $(1,a',1) = (e,a,f)$;

2) если $(e',a',1) \in S_2'$ и $(e,a,f) \in S'$, то условие $(e',a',1) \equiv_{S^1} (e,a,f)$ выполняется в том и только том случае, если $f=1$ и существуют такие элементы $u,v \in S$, что $e = uv$, $e' = vu$, $a' = va$;

3) если $(1,a',f') \in S_3'$ и $(e,a,f) \in S'$, то условие $(1,a',f') \equiv_{S^1} (e,a,f)$ выполняется в том и только том случае, если $e = 1$ и существуют такие элементы $x,y \in S$, что $f = xy$, $f' = yx$, $a' = ax$;

4) отношение $\equiv_{S^1}$ индуцирует на четырехсортной алгебре S' четырехсортное отношение эквивалентности $\equiv_{S'} = (\equiv^1_{S'}, \equiv^2_{S'}, \equiv^3_{S'}, \equiv^4_{S'})$, компоненты которого $\equiv_{S'}$ $(i = \overline{1,4})$ равны ограничениям отношения $\equiv_{S^1}$ на соответствующих компонентах S_i' алгебры S'.

Таким образом, все компоненты четырехсортной алгебры S' насыщены относительно отношения эквивалентности $\equiv_{S^1}$. Из пункта 1) леммы 2.2 следует, что ограничение отношения эквивалентности $\equiv_{S^1}$ на компоненте S_i' является тождественным отношением. Это позволяет отождествить фактор-множество $S_1'/\equiv^1_{S'}$ с множеством S. Фактор-множества остальных компонент алгебры S' будем называть *бесконечными компонентами полугруппы* S и обозначать их следующими символами:

$$S_2'/\equiv^2_{S'} = S^{\leftarrow},\ S_3'/\equiv^3_{S'} = S^{\rightarrow},\ S_4'/\equiv^4_{S'} = S^{\leftrightarrow}.$$

Пусть $W = (W_1, W_2, W_3, W_4)$ – четырехсортная алгебра, на которой заданы шесть операций: одно бинарное умножение на множестве W_1, три смешанных бинарных умножения

$$W_2 \times W_1 \to W_2,\ W_1 \times W_3 \to W_3,\ W_2 \times W_3 \to W_4$$

и две унарные операции $W_1 \to W_3$, $W_1 \to W_2$ (обозначаемые символами $a \mapsto a^{+\omega}$, $a \mapsto a^{-\omega}$). Следуя работе [10], алгебру W будем называть *алгеброй Уилки*, если при любых $a,b,c \in W_1$, $x \in W_2$, $y \in W_3$ и $n \in N$ она удовлетворяет следующим равенствам:

$$a(bc) = (ab)c,\ x(ab) = (xa)b,\ (ab)y = a(by),\ (xa)y = x(ay),$$

$$a(ba)^{+\omega} = (ab)^{+\omega},\ (a^n)^{+\omega} = a^{+\omega},\ (ba)^{-\omega} = (ab)^{-\omega},\ (a^n)^{-\omega} = a^{-\omega}.$$

При этом алгебра Уилки $W = (W_1, W_2, W_3, W_4)$ называется полной, если выполняются равенства:

$$W_2 = W_1^{-\omega} W_1,\ W_3 = W_1 W_1^{+\omega},\ W_4 = W_2 W_3\ .$$

Теорема 2.3. Для любой конечной полугруппы S частичная операция на группоиде S' индуцирует следующие шесть операций на четырехсортной алгебре $= (S, S^{\leftarrow}, S^{\rightarrow}, S^{\leftrightarrow})$:

1) ассоциативное умножение на множестве S;

2) смешанное умножение $S^{\leftarrow} \times S \to S^{\leftarrow}$, которое для любых элементов $(e,a,1) \in E_S \dot{\times} S \dot{\times} \{1\}$, $b \in S$ определяется по формуле

$$<e,a,1>b = <e,ab,1>;$$

3) смешанное умножение $S \times S^{\rightarrow} \to S^{\rightarrow}$, которое для любых элементов $a \in S$, $(1,b,f) \in \{1\} \dot{\times} S \dot{\times} E_S$ определяется по формуле

$$a<1,b,f> = <1,ab,f>;$$

4) смешанное умножение $S^{\leftarrow} \times S^{\rightarrow} \to S^{\leftrightarrow}$, которое для любых элементов $(e,a,1) \in E_S \dot{\times} S \dot{\times} \{1\}$, $(1,b,f) \in \{1\} \dot{\times} S \dot{\times} E_S$ определяется по формуле: $<e,a,1><1,b,f> = <e,ab,f>$;

5) унарная операция $S \to S^{\rightarrow}$, результат действия которой на любой элемент $a \in S$ обозначается символом $a^{+\omega}$ и определяется с помощью произвольного числа $k \approx +\infty$ по формуле $a^{+\omega} = < 1, a^{k!}, a^{k!}>$;

6) унарная операция $S \to S^{\leftarrow}$, результат действия которой на любой элемент $a \in S$ обозначается символом $a^{-\omega}$ и определяется с помощью произвольного числа $k \approx +\infty$ по формуле $a^{-\omega} = < a^{k!}, a^{k!}, 1>$.

При этом является полной алгеброй Уилки.

Доказательство. Покажем, что четырехсортное отношение эквивалентности $\equiv_{S'} = (\equiv^1_{S'}, \equiv^2_{S'}, \equiv^3_{S'}, \equiv^4_{S'})$ является конгруэнцией на четырехсортной алгебре S', т.е. согласовано со всеми операциями этой алгебры.

Если для элементов $(e,a,1),(e',a',1) \in S'_2$ выполняется условие $(e,a,1) \equiv^2_{S'} (e',a',1)$, то по лемме 2.2 найдутся такие элементы $u,v \in S$, что выполняются следующие равенства: $e = uv$, $e' = vu$ и $a' = va$. Отсюда следует, что для любого элемента $b \in S$ справедливы следующие утверждения:

$$a'b = vab,\ (e,ab,1) \equiv^2_{S'} (e',a'b,1) \text{ и } <e,ab,1> = <e',a'b,1>.$$

Значит, эквивалентность $\equiv_S$ согласована с операцией $S^{\leftarrow} \times S \to S^{\leftarrow}$.

Аналогично доказывается, что эквивалентность $\equiv_S$ согласована с операцией $S \times S^{\rightarrow} \to S^{\rightarrow}$.

Пусть для элементов $(e,a,1),(e',a',1) \in S'_2$; $(1,b,f),(1,b',f') \in S'_3$ выполняются условия $(e,a,1) \equiv^2_{S'} (e',a',1)$, $(1,b,f) \equiv^3_{S'} (1,b',f')$. Тогда по лемме 2.2 найдутся такие элементы $u,v,x,y \in S$, что выполняются следующие равенства:

$$e = uv,\ e' = vu,\ f = xy,\ f' = yx,\ a' = va,\ b' = bx.$$

Отсюда следует справедливость следующих утверждений:

$$a'b' = vabx,\ (e,ab,f) \equiv^4_{S'} (e',a'b',f') \text{ и } <e,ab,f> = <e',a'b',f'>.$$

Значит, эквивалентность $\equiv_S$ согласована с операцией $S^{\leftarrow} \times S^{\rightarrow} \to S^{\leftrightarrow}$.

Таким образом, четырехсортная алгебра является фактор-алгеброй четырехсортной алгебры S' и выполняются первые четыре утверждения теоремы. В силу того что гомоморфизмы сохраняют тождества [17], фактор-алгебра при любых значениях $a,b,c \in S$, $x \in S^{\leftarrow}$ и $y \in S^{\rightarrow}$ удовлетворяет следующим равенствам:

$$a(bc) = (ab)c,\ x(ab) = (xa)b,\ (ab)y = a(by),\ (xa)y = x(ay).$$

Рассмотрим теперь произвольные элементы $a \in S$ и $k \approx +\infty$. Так как полугруппа S конечна, то найдется такое натуральное число $m \in \boldsymbol{N}$, для которого элемент $e = a^m$ является идемпотентом полугруппы S. Следовательно, справедливы равенства:

$$a^{k!} = (a^m)^{k!/m} = e^{k!/m} = e \text{ и } (a^n)^{k!} = (a^{k!})^n = a^{k!}.$$

Отсюда следует, что $< 1, a^{k!}, a^{k!} > \in S^{\rightarrow}$ и для любого натурального числа $n \in \boldsymbol{N}$ выполняются следующие равенства:

$$(a^n)^{+\omega} = < 1, (a^n)^{k!}, (a^n)^{k!} > = < 1, a^{k!}, a^{k!} > = a^{+\omega}.$$

Аналогично показывается, что $< a^{k!}, a^{k!}, 1 > \in S^{\leftarrow}$ и для любого натурального числа $n \in \boldsymbol{N}$ выполняется равенство $(a^n)^{-\omega} = a^{-\omega}$. Отсюда следует справедливость утверждений 5),6) теоремы.

Более того, для любых элементов $a,b \in S$ упорядоченные тройки $(1, (ab)^{k!}, (ab)^{k!})$, $(1, a(ba)^{k!}, (ba)^{k!})$ по лемме 2.2 $\equiv_{S^1}$-эквивалентны, так как элементы $x = a$, $y = b(ab)^{k!-1}$ удовлетворяют следующим условиям:

$$xy = ab(ab)^{k!-1} = (ab)^{k!},\ yx = b(ab)^{k!-1}a = (ba)^{k!},\ (ab)^{k!}x = (ab)^{k!}a = a(ba)^{k!}.$$

Это означает, что выполняются следующие равенства:

$$a(ba)^{+\omega} = a < 1, (ba)^{k!}, (ba)^{k!} > = <1, a(ba)^{k!}, (ba)^{k!}> = <1, (ab)^{k!}, (ab)^{k!}> = (ab)^{+\omega}.$$

Аналогично доказывается справедливость равенства: $(ba)^{-\omega} b = (ab)^{-\omega}$.

Легко убедиться в справедливости следующих результатов.

Лемма 2.4. Пусть S,T – конечные полугруппы. Тогда любой гомоморфизм $\varphi : S \to T$ имеет однозначно определенное продолжение до гомоморфизма $\bar{\varphi}$ алгебры в алгебру $\overline{T}$, ограничение которого $\bar{\varphi}|_S$ на множестве S совпадает с гомоморфизмом φ.

Лемма 2.5. Пусть S – конечная полугруппа, $W = (W_1,W_2,W_3,W_4)$ – конечная алгебра Уилки и φ – гомоморфизм полугруппы S в полугруппу W_1. Тогда существует такой однозначно определенный гомоморфизм $\Phi :\ \to W$, ограничение которого $\Phi|_S$ на множестве S совпадает с гомоморфизмом φ.

Лемма 2.6. Пусть ***Sg*** – категория конечных полугрупп (с гомоморфизмами полугрупп), ***K*** – категория конечных алгебр Уилки (с гомоморфизмами четырехсортных алгебр) и для любых $S \in \mathrm{Obj}\ \boldsymbol{Sg}$, $W \in \mathrm{Obj}\ \boldsymbol{K}$ множество $F(S,W)$ состоит из всех гомоморфизмов полугруппы S в полугруппу W_1. Тогда пара отображений

$$S \mapsto \overline{S}, \varphi \mapsto \bar{\varphi} \text{ (где } S \in \mathrm{Obj}\ \boldsymbol{Sg},\ \varphi \in \mathrm{Hom}\ \boldsymbol{Sg})$$

определяет универсальный функтор представления F категории ***Sg*** в категории ***K*** (см. терминологию в [17]).

3. ЯЗЫКИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ СЛОВ НА КОНЕЧНЫХ ПОЛУГРУППАХ

В этом разделе приводятся приложения полученных выше результатов к теории распознавания языков произвольных слов конечными полугруппами.

Пусть A – конечное множество, $W_{fin}(A)$ – полугруппа слов над алфавитом A, $W^{\rightarrow}(A)$ (соответственно $W^{\leftarrow}(A)$) – множество бесконечных вправо (соответственно влево) слов, $W^{\leftrightarrow}(A)$ – множество бесконечных в обе стороны слов и $W(A) = W_{fin}(A) \cup W^{\rightarrow}(A) \cup W^{\leftarrow}(A) \cup W^{\leftrightarrow}(A)$ – множество всех слов над алфавитом A. Подмножества $W(A)$ называются языками произвольных слов (кратко – языками) над алфавитом A.

Ясно, что $W(A)$ можно рассматривать как четырехсортную алгебру

$$W(A) = (W_{fin}(A), W^{\leftarrow}(A), W^{\rightarrow}(A), W^{\leftrightarrow}(A))$$

с шестью операциями: умножение (операция конкатенации) в полугруппе $W_{fin}(A)$, смешанные умножения $W^{\leftarrow}(A) \times W_{fin}(A) \to W^{\leftarrow}(A)$, $W_{fin}(A) \times W^{\rightarrow}(A) \to W^{\rightarrow}(A)$, $W^{\leftarrow}(A) \times W^{\rightarrow}(A) \to W^{\leftrightarrow}(A)$ и две унарные операции $W_{fin}(A) \to W^{\rightarrow}(A)$, $W_{fin}(A) \to W^{\leftarrow}(A)$, которые для любого слова $u \in W_{fin}(A)$ определяются по формулам $u^{+\omega} = uu\ldots$, $u^{-\omega} = \ldots uu$. При этом для любых $x,y,z \in W_{fin}(A)$, $u \in W^{\leftarrow}(A)$, $v \in W^{\rightarrow}(A)$ и $n \in \boldsymbol{N}$ выполняются свойства:

$$(xy)z = x(yz),\ u(xy) = (ux)y,\ (xy)v = x(yv),\ (ux)v = u(xv),$$
$$x(yx)^{+\omega} = (xy)^{+\omega},\ (x^n)^{+\omega} = x^{+\omega},\ (yx)^{-\omega}y = (xy)^{-\omega},\ (x^n)^{-\omega} = x^{-\omega}.$$

Следовательно, алгебра $W(A)$ является алгеброй Уилки. Легко видеть, что эта алгебра неполная.

Результаты предыдущего раздела позволяют нам канонически продолжить любое отображение φ множества A в конечную полугруппу S до гомоморфизма $\bar{\varphi} : W(A) \to$, в результате чего каждое слово $w \in W(A)$ может интерпретироваться элементом $\bar{\varphi}(w)$ алгебры .

Теорема 3.1. Пусть A – конечный алфавит и S – конечная полугруппа. Тогда для любого отображения $\varphi : A \to S$ существует такой однозначно определенный гомоморфизм $\bar{\varphi} : W(A) \to$, ограничение которого $\bar{\varphi}|_A$ на множестве A совпадает с гомоморфизмом φ.

Доказательство. Как уже отмечалось выше в примере 4, любое отображение φ множества A в конечную полугруппу S в силу [16] канонически расширяется до гомоморфизма φ: $W_{fin}(A) \to S$, который по принципу переноса расширяется до гомоморфизма $^*\varphi : {}^*W_{fin}(A) \to S$. Так как по лемме 1 [14] образы $^*\varphi(w_1), {}^*\varphi(w_2)$ любых бесконечно близких слов $w_1, w_2 \in {}^*W_{fin}(A)$ являются бесконечными произведениями членов одной и той же стандартной последовательности элементов полугруппы S, то для продолжения по непрерывности гомоморфизма φ на множество всех слов над алфавитом A необходимо отождествить такие образы. Следовательно, в силу теоремы 1.2 и следствия 1.3 расширение отображения φ до отображения $\bar{\varphi} : W(A) \to$ канонически реализуется по следующему правилу:

1) $\bar{\varphi}(w) = \varphi(a_1) \ldots \varphi(a_k)$, если $w = a_1 \ldots a_k$ – конечное слово;

2) $\bar{\varphi}(w) = \langle e, a, 1\rangle$, если $w = \ldots a_{-2}\, a_{-1}$ и $(e, a, 1)$ – конечное представление бесконечного влево произведения $\varphi(a_{-n}) \ldots \varphi(a_{-1})$ для некоторого $n \approx +\infty$;

3) $\bar{\varphi}(w) = \langle 1, a, f\rangle$, если $w = a_1\, a_2 \ldots$ и $(1, a, f)$ – конечное представление бесконечного вправо произведения $\varphi(a_1) \ldots \varphi(a_n)$ для некоторого $n \approx +\infty$;

4) $\bar{\varphi}(w) = \langle e, a, f\rangle$, если $w = \ldots a_{-1}\, a_0\, a_1 \ldots$ и (e, a, f) – конечное представление бесконечного в обе стороны произведения $\varphi(a_{-n}) \ldots \varphi(a_m)$ для некоторых $m, n \approx +\infty$.

Корректность этого определения следует из леммы 1.6. Для доказательства того, что $\bar{\varphi}$ является гомоморфизмом алгебры $W(A)$ в алгебру рассмотрим произвольный элемент $w \in W_{fin}(A)$. Предположим, что $w = a_1 \ldots a_k$ и обозначим $s = \bar{\varphi}(w)$. Тогда найдется такое натуральное число $m \in \mathbf{N}$, для которого значение $e = s^m$ является идемпотентом полугруппы S. Так как для любого значения $n \approx +\infty$ выполняется равенство $\bar{\varphi}(w)^{nm} = e$, то по определению $\bar{\varphi}(w^{-\omega}) = \langle e, e, 1\rangle$. С другой стороны, по определению операций в алгебре выполняются следующие равенства:

$$\bar{\varphi}(w)^{-\omega} = s^{-\omega} = \langle s^{k!}, s^{k!}, 1\rangle = \langle e, e, 1\rangle.$$

Значит, справедливо равенство: $\bar{\varphi}(w^{-\omega}) = \bar{\varphi}(w)^{-\omega}$.

По аналогии легко доказать, что также выполняется равенство: $\bar{\varphi}(w^{+\omega}) = \bar{\varphi}(w)^{+\omega}$. Следовательно, отображение $\bar{\varphi}$ сохраняет унарные операции $^{-\omega}$ и $^{+\omega}$.

Пусть теперь $u = \ldots a_{-2}a_{-1}$ и $w = a_{-m} \ldots a_{-1}$, $v = \ldots a_{-m-2}a_{-m-1}$ для некоторого $m \in \mathbf{N}$. Тогда $u = vw$ и $\bar{\varphi}(w) = t$ для некоторого $t \in S$. По следствию 1.3 для любого значения $n \approx +\infty$ бесконечное влево произведение $\varphi(a_{-n}) \ldots \varphi(a_{-m-1})$ имеет конечное представление $(e, s, 1)$. Так как

$$\varphi(a_{-n}) \ldots \varphi(a_{-1}) = (\varphi(a_{-n}) \ldots \varphi(a_{-m-1}))(\varphi(a_{-m}) \ldots \varphi(a_{-1})) = (es)t = e(st),$$

то упорядоченная тройка $(e, st, 1)$ является конечным представлением бесконечного влево произведения $\varphi(a_{-n}) \ldots \varphi(a_{-1})$. Следовательно, справедливы условия:

$$\bar{\varphi}(v) = \langle e, s, 1\rangle \text{ и } \bar{\varphi}(u) = \langle e, st, 1\rangle.$$

Отсюда следует, что выполняются следующие равенства:

$$\bar{\varphi}(vw) = \bar{\varphi}(u) = \langle e, st, 1\rangle = \langle e, s, 1\rangle\, t = \bar{\varphi}(v)\ \bar{\varphi}(w).$$

По аналогии легко доказать, что при любом значении $m \in \mathbf{N}$ для любых слов $u = a_1 a_2 \ldots$, $w = a_1 \ldots a_m$ и $v = a_{m+1}a_{m+2} \ldots$ справедливо равенство:

$$\bar{\varphi}(wv) = \bar{\varphi}(w)\ \bar{\varphi}(v)\ .$$

Рассмотрим теперь следующие бесконечные слова:

$$w = \ldots a_{-1}a_0a_1 \ldots,\ u = \ldots a_{-2}a_{-1} \text{ и } v = a_0a_1 \ldots .$$

В этом случае очевидно, что $w = uv$, и по следствию 1.3 для любого значения $n \approx +\infty$ бесконечные произведения

$$\varphi(a_{-n})\ldots\varphi(a_{-1}),\ \varphi(a_0)\varphi(a_1)\ldots\varphi(a_n)$$

имеют конечные представления $(e,s,1)$, $(1,t,f)$ соответственно. Так как выполняются равенства:

$$\varphi(a_{-n})\ldots\varphi(a_{-1})\varphi(a_0)\varphi(a_1)\ldots\varphi(a_n) =$$
$$= (\varphi(a_{-n})\ldots\varphi(a_{-1}))(\varphi(a_0)\varphi(a_1)\ldots\varphi(a_n)) = (es)(tf) = e(st)f,$$

то по определению упорядоченная тройка (e,st,f) является конечным представлением бесконечного в обе стороны произведения $\varphi(a_{-n})\ldots\varphi(a_n)$. Следовательно, справедливы следующие условия:

$$\bar{\varphi}(u) = < e,\ s,\ 1 >,\ \bar{\varphi}(v) = < 1, t, f > \text{ и } \bar{\varphi}(w) = < e,\ st, f > .$$

Отсюда следует, что выполняются равенства:

$$\bar{\varphi}(uv) = \bar{\varphi}(w) = < e,\ st, f > = < e,\ s,\ 1 > < 1,\ t, f > = \bar{\varphi}(u)\ \bar{\varphi}(v) .$$

Последний результат дает возможность ввести следующее понятие языка, распознаваемого на конечной полугруппе. Пусть $L \subset W(A)$ – язык произвольных слов над конечным алфавитом A, S – конечная полугруппа и φ – отображение множества A в полугруппу S. Будем говорить, что отображение *φ распознает язык L*, если существует такое (четырехсортное) подмножество $P \subset$, что для канонического гомоморфизма $\bar{\varphi} : W(A) \to$. выполняется следующее равенство:

$$L = \{\ x \in W(A) :\ \bar{\varphi} \in P\ \}.$$

Язык $L \subset W(A)$ будем называть *распознаваемым конечной полугруппой*, если для некоторой конечной полугруппы S найдется такое отображение $\varphi : A \to S$, которое распознает язык L.

Основной результат работы [12] утверждает, что язык произвольных слов $L \subset W(A)$ в том и только том случае распознаваем конечным автоматом Буши, если он *обобщенно рационален*, т.е. этот язык L принадлежит наименьшему множеству языков произвольных слов над алфавитом A, которое содержит конечные языки конечных слов и замкнуто относительно трех специальных операций (объединение, тернарное произведение и бесконечная итерация). С помощью полученных выше результатов можно доказать следующий принципиально важный факт.

Теорема 3.2. Любой обобщенно рациональный язык $L \subset W(A)$ распознаваем конечной полугруппой.

Полученные результаты позволяют описать класс всех языков произвольных слов, распознаваемых конечными полугруппами.

Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS (проект 99-1224).

Библиографический список

1. *Pin J.E.* Finite semigroups and recognizable languages: an introduction // Semigroups, Formal Languages and Groups, NATO ASI Series C: Mathematical and Physical Sciences, 1993. Vol. 466. P. 1–32.

2. *Хомский Н.* Синтаксические структуры: Новое в лингвистике. М.: Прогресс, 1962. Вып. 2. С. 412–527.

3. *Гинзбург С.* Математическая теория контекстно-свободных языков. М.: Мир, 1970.

4. *Eilenberg S., Schützenberger P.* On pseudovarieties// Advances in Math. 1976. Vol. 19, № 3. P. 413–418.

5. *Eilenberg S.* Automata, Languages and Machines. Academic Press. N.Y., 1976. Vol. B.

6. *Kleene S.C.* Representation of events in nerve nets and finite automata, in "Automata Studies" / Eds C. E. Shannon, J. McCarthy. Princeton University Press. Princeton; New Jersey, 1956. P. 3–42.

7. *Perrin D., Pin J.E.* Semigroups and automata on infinite words // Semigroups, Formal Languages and Groups, NATO ASI Series C: Mathematical and Physical Sciences, 1993. Vol. 466. P. 49–72.

8. *Büchi J.R.* On a decision method in restricted second-order arithmetic, in Proc. 1960 Int. Congr. For Logic, Methodology and Philosophy of Science, Stanford Univ. Press. Stanford, 1962. P. 1–11.

9. *McNaughton R.* Testing and generating infinite sequences by a finite automaton// Information and Control. 1966. Vol. 9. P. 521–530.

10. *Wilke T.* An algebraic theory for regular languages of finite and infinite words// Inter. J. of Algebra and Computation. 1993. Vol. 3. P. 447–489.

11. *Ramsey F.D.* On a problem of formal logic// Proc. London Math. Soc. 1929. Vol.30. P. 338–384.

12. *Molchanov V.A.* Nonstandard approach to general rational languages // Contributions to General Algebra 13, Proceedings of the Dresden Conference 2000 (AAA60) and the Summer School 1999, Verlag Johannes Heyn, Klagenfurt. 2001. P. 233–244.

13. *Альбеверио С., Фенстад Й., Хеэг-Крон Р., Линдстрем Т.* Нестандартные методы в стохастическом анализе и математической физике. М.: Мир, 1990. 616 с.

14. *Молчанов В.А.* О естественном продолжении теории рациональных языков на языки произвольных слов // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2004. Вып. 6. С. 90–93.

15. *Молчанов В.А.* Нестандартные сходимости в пространствах отображений // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 33, № 6. С. 141–153.

16. *Лаллеман Ж.* Полугруппы и комбинаторные приложения. М.: Мир, 1985.

17. *Кон П.* Универсальная алгебра. М.: Мир, 1968.

УДК 681.322:681.5

ПОСТРОЕНИЕ ДИАГНОСТИЧЕСКИХ ЭКСПЕРТНЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

В. М. Соловьев

Саратовский государственный университет,
кафедра математической кибернетики и компьютерных наук
E-mail: SolovyevVM@info.sgu.ru

В работе рассмотрены вопросы построения диагностических экспертных систем (ДЭС) на основе нейронных сетей (НС) с латеральным торможением. Предложены методы обучения таких сетей. Проанализированы вопросы получения диагностической информации в гетерогенной вычислительной сети и использования априорной информации о значимости диагностических признаков. Результаты работы могут быть использованы при построении нейросетевых диагностических систем (кластеризаторов).

Construction of Diagnostic Expert Systems on the Basis of Neural Networks

V.M. Solovyev

In work questions of construction of diagnostic expert systems (DES) on the basis of neural networks (NN) with lateral braking are considered. Methods of training of such networks are offered. Questions of reception of the diagnostic information in the heterogeneous computer network and uses of the aprioristic information on the importance of diagnostic attributes are analyses. Results of work can be used at construction NN diagnostic systems (clustering).

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Традиционно для определения технического состояния сложных систем применяются статистические и эвристические методы диагностирования. В них используется небольшое число диагностических параметров, большие размеры выборок значений параметров (генеральные совокупности), техническое состояние легко определяется только по этим параметрам [7]. Если же техническое состояние трудно определимо и число диагностических параметров становится большим, то применяются диагностические экспертные системы (ДЭС). Однако если размеры выборок значений параметров малы, то ДЭС на основе статистических и эвристических методов не позволяют решить задачу определения технического состояния с достаточной достоверностью [4]. Обладая лишь информацией о симптомах дефекта по нескольким случайно выбранным диагностическим параметрам, невозможно построить приемлемую диагностическую модель. Поэтому возникла необходимость в построении новых ДЭС, использующих технологию добычи знаний (*Data Mining)* из больших массивов диагностических данных по малым выборкам. Необходимо разработать методы построения таких ДЭС на основе интеллектуальной технологии *Data Mining*, используемой для нахождения диагностических моделей и отношений, скрытых в сетевых базах диагностических данных.

Современные диагностические средства гетерогенных вычислительных сетей для определения технического состояния используют отобранные из базы диагностических данных X ограниченные выборки параметров вычислительной сети $\{x^S\} \in X$. При этом техническое состояние сети состоит из m категории $A = A(M, g, v)$ и характеризуется конечным числом симптомов S, определяемым по значениям диагностических параметров . Необходимо найти оператор (установить диагноз), удовлет-