УДК 501.1

О МНОГООБРАЗИИ ПОЛУГРУПП ОТНОШЕНИЙ С ОПЕРАЦИЕЙ РЕФЛЕКСИВНОЙ ДВОЙНОЙ ЦИЛИНДРОФИКАЦИИ

Д. А. Бредихин[1], **А. В. Попович**[2]

[1]Доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики и моделирования, Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю. А., bredikhin@mail.ru

[2]Аспирант кафедры математики и моделирования, Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю. А., popovich_al@mail.ru

В работе находится базис тождеств многообразия, порожденного классом полугрупп бинарных отношений с дополнительной операцией двойной рефлексивной цилиндрофикации.

Ключевые слова: алгебры отношений, многообразия, базис тождеств, операция двойной рефлексивной цилиндрофикации.

ВВЕДЕНИЕ

Множество $Rel(U)$ всех бинарных отношений, заданных на U, относительно операции умножения отношений $\circ$ образует полугруппу отношений и всякая полугруппа изоморфно вкладывается в полугруппу отношений $(Rel(U), \circ)$. Вместе с операцией умножения отношений на множестве $Rel(U)$ могут быть рассмотрены и другие операции, несущие дополнительную информацию об указанной полугруппе. Возникающие при этом алгебраические структуры могут быть рассмотрены в рамках теории алгебр отношений. В общем случае под *алгеброй отношений* над данным множеством мы понимаем пару (Φ, Ω), где Ω — некоторая совокупность операций над отношениями и Φ — множество отношений, замкнутое относительно операций из Ω. Обозначим $R\{\Omega\}$ класс алгебр, изоморфных алгебрам отношений над всевозможными множествами с операциями из Ω.

Исследование операций над отношениями восходит к работам Де Моргана, Пирса, Фреге и Шредера. Тарским был предложен аксиоматический подход к изучению алгебр отношений [1]. Им был рассмотрен класс алгебр отношений, в число операций которых наряду с булевыми операциями входят операции умножения $\circ$ и обращения ${}^{-1}$ отношений. Имеется также ряд других операций над отношениями, играющих важную роль в приложениях теории алгебр отношений в различных областях алгебры и логики, в частности в теории полугрупп; рассмотрению различных классов алгебр отношений посвящен обзор [2].

Как правило, операции над отношениями задаются с помощью формул логики предикатов. Такие операции называются *логическими*. Всякая формула $\phi(z_0, z_1, r_1, \ldots, r_m)$ логики предикатов первого порядка, содержащая m бинарных предикатных символов $r_1, \ldots, r_m$, две свободные индивидуальные переменные z_0, z_1 и какие-либо связанные индивидуальные переменные z_i (при $i \geq 2$), определяет m-арную операцию F_φ на $Rel(U)$:

$$F_\varphi(\rho_1, \ldots, \rho_m) = \{(u, v) \in U \times U : \varphi(u, v, \rho_1, \ldots, \rho_m)\},$$

где $\varphi(u, v, \rho_1, \ldots, \rho_m)$ означает, что формула φ выполняется, если z_0, z_1 интерпретируются как u, v и $r_1, \ldots, r_m$ интерпретируются как отношения $\rho_1, \ldots, \rho_m$ из $Rel(U)$.

Логические операции могут быть классифицированы по виду задающих их формул. Важным классом операций над отношениями является класс диофантовых операций. Операция называется *диофантовой*[1] [3, 4] (в другой терминологии — *примитивно-позитивной* [5]), если она может быть задана с помощью формулы, которая в своей предваренной нормальной форме содержит лишь операцию конъюнкции и кванторы существования. К числу диофантовых, в частности, относится упомянутые выше операции умножения и обращения отношений.

Диофантовы операции могут быть описаны с помощью графов [3–5]. Пусть N — множество всех натуральных чисел и $[1, n] = \{k \in N : 1 \leq k \leq n\}$. *Помеченным графом* назовём пару $(V,\ E)$, где V — конечное множество, называемое *множеством вершин*, и $E \subseteq V \times N \times V$ — тернарное отношение.

[1]Термин «диофантова операция» был предложен первому из авторов Л. Н. Шевриным.

Тройку $(u, k, v) \in E$ будем называть *ребром графа*, идущим из вершины u в вершину v, помеченным меткой k, и графически изображать следующим образом: $u \cdot \xrightarrow{k} \cdot v$. Мы также будем говорить, что вершины u и v инцидентны ребру (u, k, v).

Под *двухполюсником* мы понимаем помеченный граф с парой выделенных вершин, т. е. систему вида $G = (V, E, in, out)$, где (V, E) — помеченный граф; in и out — две выделенные вершины, называемые *входом* и *выходом двухполюсника* соответственно.

Пусть $F = F_\varphi$ — диофантова операция, задаваемая формулой φ. С этой операцией может быть ассоциирован двухполюсник $G = G(\varphi)$, определяемый следующим образом [5]: $G = (V, E, in, out)$, где V — множество всех индексов индивидуальных переменных z_i, входящих в формулу φ; $in = 0$, $out = 1$; $(i, k, j) \in E$ тогда и только тогда, когда атомарная формула $r_k(z_i, z_j)$ входит в φ.

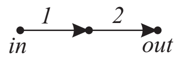
Обратно, всякий двухполюсник $G = (V, E, in, out)$, где $V = \{v_0, \ldots, v_n\}$, $in = v_0$, $out = v_1$, задаёт диофантову формулу $\varphi(G)$ с двумя свободными переменными z_0 и z_1, какими-либо связанными индивидуальными переменными z_i (при $i \geq 2$) и бинарными предикатными символами $r_1, \ldots, r_m$, определяемую следующим образом:

$$\varphi(G) = (\exists z_2, \ldots, z_m) \bigwedge_{(u_i, k, v_j) \in E} r_k(z_i, z_j).$$

Диофантову операцию, задаваемую формулой $\varphi(G)$, обозначим F_G. Так операции умножения отношений, задаваемой формулой

$$\rho \circ \sigma = \{(u, v) : (\exists\, w)(u, w) \in \rho \wedge (w, v) \in \rho\},$$

соответствует двухполюсник следующего вида:



Назовём диофантову операцию *атомарной*, если она задаётся формулой, не содержащей операцию конъюнкции. Ясно, что такая формула может содержать лишь одну атомарную подформулу, и, следовательно, соответствующая операция над отношениями будет унарной. Далее при рассмотрении операций над бинарными отношениями предполагается, что это отношения на фиксированном множестве U, что в большинстве случаев явно не оговаривается. Существует девять различных атомарных диофантовых операций (отличных от тождественной $F_0(\rho) = \rho$): F_1 — *операция обращения* $^{-1}$; F_2 и F_3 — *операции цилиндрофикации* [6]; F_4 — *операция двойной цилиндрофикации*; F_5 и F_6 — *домино операции* [7, 8]; F_7 и F_8 — *операции рефлексивной цилиндрофикации* [8]; F_9 — *операция двойной рефлексивной цилиндрофикации*. Ниже приводятся формулы и двухполюсники G_k $(k = 1, \ldots, 9)$, задающие соответствующие операции:

$F_1(\rho) = \{(u, v) : (v, u) \in \rho\}$, G_1:

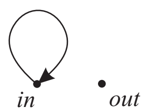

$F_2(\rho) = \{(u, v) : (\exists w)(u, w) \in \rho\}$, G_2:

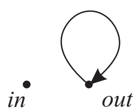

$F_3(\rho) = \{(u, v) : (\exists w)(w, v) \in \rho\}$, G_3:

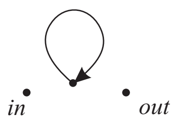

$F_4(\rho) = \{(u, v) : (\exists w, z)(w, z) \in \rho\}$, G_4:


$F_5(\rho) = \{(u, v) : (\exists w)(w, u) \in \rho\}$, G_5:


$F_6(\rho) = \{(u, v) : (\exists w)(v, w) \in \rho\}$, G_6:


$F_7(\rho) = \{(u, v) : (u, u) \in \rho\}$, G_7:


$F_8(\rho) = \{(u, v) : (v, v) \in \rho\}$, G_8:


$F_9(\rho) = \{(u, v) : (\exists w)(w, w) \in \rho\}$, G_9:


Рассмотрение алгебр отношений в рамках аксиоматического подхода предполагает изучение их свойств, выразимых на языке логики предикатов первого порядка и, в частности, на языке тождеств. Это приводит к необходимости изучения многообразий $Var\{\Omega\}$, порождённых различными классами $R\{\Omega\}$ алгебр отношений [9].

Базис тождеств многообразия $Var\{\circ, {}^{-1}\}$ найден в [10], а многообразий $Var\{\circ, F_3\}$ и $Var\{\circ, F_4\}$ в [11]. Целью этой работы является подробное доказательство результата, анонсированного в работе [12], в котором находится базис тождеств многообразия $R\{\circ, F_9\}$ алгебр отношений с операциями умножения отношений и двойной рефлексивной цилиндрофикации.

ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Сосредоточим внимание на операции произведения отношений $\circ$ и унарной операции рефлексивной двойной цилиндрофикации:

$$\nabla(\rho) = F_9(\rho) = \{(u, v) : (\exists\ w)(w, w) \in \rho\}.$$

Заметим, что эту операцию можно рассматривать как операцию-индикатор существования неподвижных точек для бинарных отношений. Действительно, $\nabla(\rho) = U \times U$, если ρ содержит пару вида (w, w), и $\nabla(\rho) = \varnothing$ — в противном случае.

В следующей теореме находится базис тождеств для многообразия $Var\{\circ, \nabla\}$.

Теорема 1. *Алгебра $(A, \cdot, {}^*)$ типа (2,1) принадлежит многообразию $Var\{\circ, \nabla\}$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет следующим тождествам:*

1) $(xy)z = x(yz)$, 2) $(x^*)^2 = x^*$, 3) $x^*xx^* = x^*$, 4) $(x^*y)^2 = x^*y$, 5) $(xy^*)^2 = xy^*$,
6) $(xy)^* = (yx)^*$, 7) $x^*yz^* = z^*yx^*$, 8) $(xy^*z)^* = y^*zxy^*$, 9) $x^*yx^*zx^* = x^*zx^*yx^*$,
10) $x^*(x^p)^* = x^*$ для любого простого числа p.

Найденный в теореме 1 базис тождеств является бесконечным. Естественно возникает вопрос о конечной базируемости этого многообразия.

Теорема 2. *Многообразие $Var\{\circ, \nabla\}$ не является конечно базируемым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Разобъем доказательство теоремы 1 на ряд последовательных шагов.

Шаг 1. Доказательство базируется на результате работы [13], дающем описание эквациональных теорий алгебр отношений с диофантовыми операциями. Приведём ряд определений и обозначений, необходимых для формулировки этого результата и используемых в дальнейшем изложении.

Пусть $G = (V, E, in, out)$ и $G_k = (V_k, E_k, in_k, out_k)$ $(k = 1, \ldots, m)$ — двухполюсники с попарно непересекающимися множествами вершин. Назовём *композицией* этих двухполюсников новый двухполюсник $G(G_1, \ldots, G_m)$, который определяется следующим образом [5]: возьмём двухполюсник G и заменим каждое его ребро $(u, k, v) \in E$ на двухполюсник G_k, отождествляя при этом вершину in_k с вершиной u и вершину out_k с вершиной v.

Рассмотрим множество диофантовых операций над отношениями $\Omega = \{F_{\varphi_1}, \ldots, F_{\varphi_n}\}$ и пусть $A = (A, f_1, \ldots, f_n)$ — универсальная алгебра соответствующего типа. Положим $G_1 = G(\varphi_1)$, $\ldots$, $G_n = G(\varphi_n)$.

Для всякого терма p алгебры A определим следующим индуктивным образом двухполюсник $G_p = (V_p, E_p, in(p), out(p))$:

а) если $p = x_k$, то $G(p)$ представляет собой двухполюсник вида $in\cdot \stackrel{k}{\to} \cdot out$;

б) если $p = f_k(p_1, \ldots, p_m)$, то $G(p)$ есть композиция $G_k(G(p_1), \ldots, G(p_m))$.

Обозначим через $pr(E)$ множество всех рёбер, инцидентных некоторой вершине помеченного графа (V, E). Пусть даны два помеченных графа (V_1, E_1) и (V_2, E_2), отображение $f : pr(E_2) \to pr(E_1)$ называется гомоморфизмом из E_2 в E_1, если $(f(u), k, f(v)) \in E_1$ для всякого ребра $(u, k, v) \in E_2$.

Пусть $G_1 = (V_1, E_1, in_1, out_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2, in_2, out_2)$ — двухполюсники. Отображение $f : V_2 \to V_1$ называется гомоморфизмом G_2 в G_1, если $f(in_2) = in_1$, $f(out_2) = out_1$ и $(f(u), k, f(v)) \in E_1$ для всякого ребра $(u, k, v) \in E_2$.

Мы будем писать $E_1 \prec E_2$ $(G_1 \prec G_2)$, если существует гомоморфизм E_2 в E_1 (G_2 в G_1), и $E_1 \cong E_2$ $(G_1 \cong G_2)$, если $E_1 \prec E_2$ и $E_2 \prec E_1$ $(G_1 \prec G_2$ и $G_2 \prec G_1)$.

Обозначим через $Eq\{\Omega\}$ эквациональную теорию класса $R\{\Omega\}$. Теперь мы готовы сформулировать основной результат работы [12].

Теорема 3. *Тождество $p = q$ принадлежит эквациональной теории $Eq\{\Omega\}$ тогда и только тогда, когда $G(p) \cong G(q)$.*

Шаг 2. Докажем дополнительные тождества, необходимые нам в дальнейшем. Если при доказательстве используется тождество с номером k), то мы будем использовать символ $\overset{k}{=}$.

Лемма 1. *Пусть алгебра $(A, \cdot, ^*)$ типа $(2, 1)$ удовлетворяет тождествам 1)–10). Тогда она также удовлетворяет тождествам:*
11) $x^*y^* = y^*x^*$, 12) $(x^*yz^*)^* = x^*yz^*$, 13) $xyz^* = xyz^*xz^*$, 13′) $x^*yz = x^*zx^*yz$,
14) $(xy)^* = (xy)^*x(xy)^*$, 15) $x^*yz^* = z^*x^*yz^*$, 16) $x^*(x^n)^* = x^*$, где $n \in N$.

Доказательство. Докажем тождество 11):

$$x^*y^* \overset{2}{=} x^*x^*y^* \overset{7}{=} y^*x^*x^* \overset{2}{=} y^*x^*.$$

Покажем, что тождество 12) справедливо:

$$(x^*yz^*)^* \overset{3}{=} (x^*xx^*yz^*)^* = ((x^*x)x^*(yz^*))^* \overset{8}{=} x^*(yz^*)(x^*x)x^* = x^*yz^*x^*xx^* \overset{3}{=} x^*yz^*x^* \overset{7}{=}$$
$$= z^*yx^*x^* \overset{2}{=} z^*yx^* \overset{7}{=} x^*yz^*.$$

Докажем тождество 13):

$$xyz^* \overset{5}{=} xyz^*xyz^* \overset{4}{=} xyz^*xz^*xyz^* \overset{9}{=} xyz^*xyz^*xz^* \overset{5}{=} xyz^*xz^*.$$

Докажем тождество 13′):

$$x^*yz \overset{4}{=} x^*yzx^*yz \overset{5}{=} x^*yzx^*zx^*yz \overset{9}{=} x^*zx^*yzx^*yz \overset{4}{=} x^*zx^*yz.$$

Докажем теперь справедливость тождества 14):

$$(xy)^* \overset{3}{=} (xy)^*xy(xy)^* \overset{13}{=} (xy)^*xy(xy)^*x(xy)^* \overset{3}{=} (xy)^*x(xy)^*.$$

Докажем тождество 15):

$$x^*yz^* \overset{7}{=} z^*yx^* \overset{2}{=} z^*z^*yx^* \overset{7}{=} z^*x^*yz^*.$$

Тождество 10) справедливо для любого простого числа p. Покажем что оно справедливо и для любого натурального числа n. Число n можно представить в виде $n = p_1^{k_1} \ldots p_m^{k_m}$, где $p_1, \ldots, p_m$ — простые числа. Отсюда:

$$x^* \overset{10}{=} x^*(x^{p_1})^* \overset{10}{=} x^*(x^{p_1})^*((x^{p_1})^{p_1})^* = x^*(x^{p_1})^*(x^{{p_1}^2})^* \overset{10}{=} \ldots \overset{10}{=} x^*(x^{p_1})^*(x^{{p_1}^2})^* \ldots (x^{{p_1}^{k_1}})^* \overset{10}{=}$$
$$= x^*(x^{p_1})^* \ldots (x^{{p_1}^{k_1}})^*((x^{{p_1}^{k_1}})^{p_2})^* \overset{10}{=} x^*(x^{p_1})^* \ldots (x^{{p_1}^{k_1}})^*((x^{{p_1}^{k_1}})^{p_2})^*((x^{{p_1}^{k_1}p_2})^{p_2})^* \overset{10}{=} \ldots \overset{10}{=}$$
$$= x^*(x^{p_1})^* \ldots (x^{{p_1}^{k_1}})^*((x^{{p_1}^{k_1}})^{p_2})^* \ldots (x^{{p_1}^{k_1}{p_2}^{k_2}})^* \overset{10}{=} \ldots \overset{10}{=} x^*(x^{p_1})^* \ldots (x^{{p_1}^{k_1} \ldots {p_m}^{k_m}})^* \overset{10}{=} \ldots \overset{10}{=}$$
$$= x^*(x^{{p_1}^{k_1} \ldots {p_m}^{k_m}})^* = x^*(x^n)^*.$$

Мы доказали тождество 16). □

Шаг 3. Введём некоторые обозначения. Пусть Σ — эквациональная теория алгебр, удовлетворяющих тождествам 1)–10). Для алгебры $(A, \cdot, ^*)$ типа $(2, 1)$ обозначим через Ξ множество всех термов указанной сигнатуры. Для любых двух термов $p, q \in \Xi$ мы пишем $p \cong q$, если тождество $p = q$ принадлежит Σ. Пусть Λ — множество слов над алфавитом $\{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ и $\tilde{\Lambda} = \Lambda \cup \{\odot\}$, где $\odot$ — пустое слово.

Если при установке эквивалентности термов используется тождество с номером (k), то мы будем писать $p_1 \overset{k}{\cong} p_2$. Ссылки на тождество ассоциативности 1) будут опускаться.

Слово β является подсловом слова α, если $\alpha = \alpha_1\beta\alpha_2$ для некоторых $\alpha_1, \alpha_2 \in \tilde{\Lambda}$. В том случае, когда $\alpha_1 = \odot$ $(\alpha_2 = \odot)$, назовём β *начальным (конечным) подсловом* слова α.

Лемма 2. *Для любого терма $p \in \Xi$ существуют такие $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \tilde{\Lambda}$, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \Lambda$ $(n \geqslant 0)$, что $p \cong \alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \beta_2^* \alpha_2 \ldots \beta_n^* \alpha_n$.*

Доказательство. Доказательство проводится индукцией, согласно определению терма p. Утверждение очевидно для $p = x_k$. Далее предположим, что $p \cong \alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \beta_2^* \alpha_2 \ldots \beta_n^* \alpha_n$. Тогда по тождеству 8) получаем:

$$(p)^* = (\alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \beta_2^* \alpha_2 \ldots \beta_n^* \alpha_n)^* \cong \beta_1^* \alpha_1 \beta_2^* \alpha_2 \ldots \beta_n^* \alpha_n \alpha_0 \beta_1^*.$$

Пусть $p \cong \alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \beta_2^* \alpha_2 \ldots \beta_n^* \alpha_n$ и $q \cong \tilde{\alpha}_0 \tilde{\beta}_1^* \tilde{\alpha}_1 \tilde{\beta}_2^* \tilde{\alpha}_2 \ldots \tilde{\beta}_m^* \tilde{\alpha}_m$, тогда

$$pq = \alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \beta_2^* \alpha_2 \ldots \beta_n^* \alpha_n \tilde{\alpha}_0 \tilde{\beta}_1^* \tilde{\alpha}_1 \tilde{\beta}_2^* \tilde{\alpha}_2 \ldots \tilde{\beta}_m^* \tilde{\alpha}_m.$$

□

Лемма 3. *Любой терм $p \cong \alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \beta_2^* \alpha_2 \ldots \beta_n^* \alpha_n$, где $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \tilde{\Lambda}$, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \Lambda$ $(n \geqslant 0)$, можно представить в виде*

$$p \cong \alpha_0 (\beta_n^* \alpha_1 \beta_n^*)^* (\beta_n^* \alpha_2 \beta_n^*)^* \ldots (\beta_n^* \alpha_{n-1} \beta_n^*)^* \beta_1^* \ldots \beta_n^* \alpha_n.$$

Доказательство. Имеем

$$p \cong \alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \ldots \beta_{n-1}^* \alpha_{n-1} \beta_n^* \alpha_n \overset{15}{\cong} \alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \ldots \beta_n^* \beta_{n-1}^* \alpha_{n-1} \beta_n^* \alpha_n \overset{2}{\cong}$$
$$\cong \alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \ldots \beta_n^* \beta_{n-1}^* \alpha_{n-1} \beta_n^* \beta_n^* \alpha_n \overset{7}{\cong} \alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \ldots \beta_n^* \beta_n^* \alpha_{n-1} \beta_{n-1}^* \beta_n^* \alpha_n \cong \ldots \cong$$
$$\cong \alpha_0 \beta_n^* \beta_n^* \alpha_1 \beta_n^* \beta_n^* \ldots \alpha_{n-2} \beta_n^* \beta_n^* \alpha_{n-1} \beta_1^* \ldots \beta_n^* \alpha_n \overset{2}{\cong} \alpha_0 \beta_n^* \alpha_1 \beta_n^* \beta_n^* \ldots \alpha_{n-2} \beta_n^* \beta_n^* \alpha_{n-1} \beta_1^* \ldots \beta_n^* \beta_n^* \alpha_n \overset{11}{\cong}$$
$$\cong \alpha_0 \beta_n^* \alpha_1 \beta_n^* \beta_n^* \ldots \alpha_{n-2} \beta_n^* \beta_n^* \alpha_{n-1} \beta_n^* \beta_1^* \ldots \beta_n^* \alpha_n \overset{12}{\cong} \alpha_0 (\beta_n^* \alpha_1 \beta_n^*)^* \ldots (\beta_n^* \alpha_{n-1} \beta_n^*)^* \beta_1^* \ldots \beta_n^* \alpha_n.$$

□

Шаг 4. Согласно определению граф $G(p) = (V_p, E_p, in(p), out(p))$ для p может быть построен следующим образом.

Положим $p = \alpha = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n}$ $(n \geqslant 1)$, тогда $V_p = V_\alpha = \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$, $E_p = E_\alpha = \{(v_{k-1}, i_k, v_k) : k \in [1, n]\}$ и $in(p) = in(\alpha) = v_0$, $out(p) = out(\alpha) = v_n$. Соответствующий данному терму граф будет иметь вид:

$$in(\alpha) = v_0 \cdot \xrightarrow{i_1} \cdot \xrightarrow{i_2} \cdot \ldots \cdot \xrightarrow{i_n} v_n = out(\alpha).$$

Если $p = \alpha = \odot$, то положим по определению $V_p = V_\alpha = \{v_0\}$, $E_p = E_\alpha = \varnothing$, $in(p) = in(\alpha) = out(p) = out(\alpha) = v_0$.

Пусть $p = (\beta)^*$, где $\beta = x_{j_1} x_{j_2} \ldots x_{j_m}$, тогда $V_p = V_{\beta^*} = \{u_0, u_1, \ldots, u_{m+1}\}$, $E_p = E_{\beta^*} = \{(u_k, i_k, u_{k+1}) : k \in [1, m-1]\} \cup \{(u_m, i_m, u_1)\}$, $in(p) = in(\beta^*) = u_0$, $out(p) = out(\beta^*) = u_{m+1}$. Соответствующий граф будет иметь вид как на рис. 1.

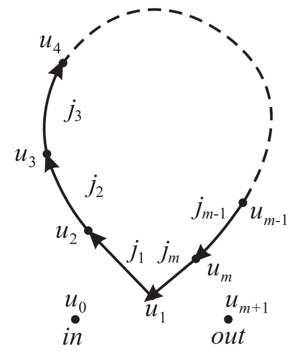


Рис. 1. Граф, соответствующий терму $p = (\beta)^*$

Пусть теперь $p = \alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \beta_2^* \alpha_2 \ldots \beta_n^* \alpha_n$ и $n > 1$. Будем предполагать, что множества $V_{\alpha_0}, V_{\beta_1^*}, V_{\alpha_1}, \ldots, V_{\beta_n^*}, V_{\alpha_n}$ попарно не пересекаются. Тогда $V_p = V_{\alpha_0} \cup pr(E_{\beta_1^*}) \cup V_{\alpha_1} \cup \cdots \cup pr(E_{\beta_n^*}) \cup V_{\alpha_n}$, $E_p = E_{\alpha_0} \cup E_{\beta_1^*} \cup \cdots \cup E_{\beta_n^*} \cup E_{\alpha_n}$, $in(p) = in(\alpha_0)$, $out(p) = out(\alpha_n)$. Схематично соответствующий граф изображен на рис. 2.

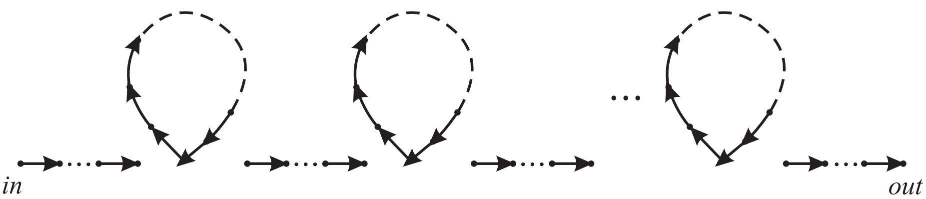


Рис. 2. Граф, соответствующий терму $p = \alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \beta_2^* \alpha_2 \ldots \beta_n^* \alpha_n$

Если $n = 0$, то граф будет связным. В общем случае число компонент связности данного графа будет $n + k$, где k — это число слов α_i, отличных от пустого слова.

Лемма 4. *Если $E_\alpha \prec E_\beta$, где $\alpha, \beta \in \tilde{\Lambda}$, то найдутся такие $\beta_1, \beta_2 \in \tilde{\Lambda}$, что $\alpha = \beta_1 \beta \beta_2$.*

Доказательство. Пусть $\alpha = x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}$ и $\beta = x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_m}$, $V_\alpha = \{v_0,\ldots,v_n\}$, $V_\beta = \{v'_0,\ldots,v'_m\}$. Очевидно, что $n \geqslant m$. Пусть f — гомоморфизм из E_β в E_α, т. е. $(f(u),k,f(v)) \in E_\alpha$ для всякого ребра $(u,k,v) \in E_\beta$. Предположим, что $f(v'_0) = v_k$, тогда $f(v'_r) = v_t$ и $x_{j_r} = x_{i_t}$, где $t = k+r$ и $r = 1,\ldots,m$. Положим $\beta_1 = x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}$ ($\beta_1 = \odot$, если $k = 0$); $\beta_2 = x_{i_s}x_{i_{s+1}}\cdots x_{i_n}$ ($\beta_2 = \odot$, если $k+m = n$), где $s = k+m+1$. Тогда $\alpha = \beta_1\beta\beta_2$ (рис. 3).

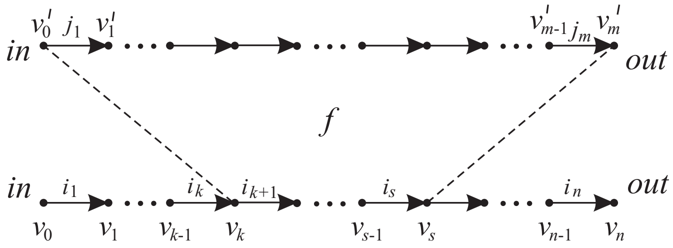


Рис. 3. Гомоморфизм f из E_β в E_α

$\square$

Из леммы 4 непосредственно вытекает следующая лемма.

Лемма 5. *Если $E_\alpha \cong E_\beta$, то $\alpha = \beta$.*

В дальнейшем $|X|$ обозначает число элементов множества X.

Лемма 6. *Если $E_{\beta^*} \prec E_{\tilde\beta^*}$ и f — гомоморфизм из $E_{\tilde\beta^*}$ в E_{β^*}, где $\beta,\tilde\beta \in \Lambda$, то существуют такие $\lambda,\mu \in \tilde\Lambda$, что $\beta = \lambda\mu$ и $\tilde\beta = (\mu\lambda)^k$ для некоторого натурального $k \geqslant 1$ и для каждой вершины $v \in pr(E_{\beta^*})$ выполняется условие $|f^{-1}(v)| = k$.*

Доказательство. Пусть $\beta = x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}$, $\tilde\beta = x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_m}$, $pr(E_{\beta^*}) = \{v_1,\ldots,v_n\}$, $pr(E_{\tilde\beta^*}) = \{v'_1,\ldots,v'_m\}$. Очевидно, что $n \leqslant m$. Предположим, что $f(v'_1) = v_l$. Тогда $f(v'_2) = v_{l+1}$ и $x_{j_1} = x_{i_l}$, $f(v'_{n+1}) = v_{l-1}$ и $x_{j_n} = x_{i_{l-1}}$. Если $n = m$, то $\beta = \lambda\mu$, $\tilde\beta = \mu\lambda$ и $|f^{-1}(v)| = 1$, где $\lambda = x_{i_1}\cdots x_{i_{l-1}}$, $\mu = x_{i_l}\cdots x_{i_n}$. Если $m > n$, то $f(v'_{n+2}) = v_{l+1}$ и $x_{j_{n+1}} = x_{i_l},\ldots,f(v'_m) = v_l$ и $x_{j_m} = x_{i_{l-1}}$. Отсюда следует, что $m = kn$, $|f^{-1}(v)| = k$ для некоторого натурального k, и $\beta = \lambda\mu$, $\tilde\beta = (\mu\lambda)^k$, где $\lambda = x_{i_1}\cdots x_{i_{l-1}}$, $\mu = x_{i_l}\cdots x_{i_n}$. $\square$

Лемма 7. *Если $E_{\beta^*} \prec E_\alpha$, где $\alpha \in \tilde\Lambda$ и $\beta \in \Lambda$, то существуют такие $\lambda,\mu,\gamma \in \tilde\Lambda$, что $\beta = \lambda\mu$, $\alpha\gamma = (\mu\lambda)^{k+1}$ для некоторого натурального $k \geqslant 0$.*

Доказательство. Пусть $\alpha = x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}$, $\beta = x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_m}$, $V_\alpha = \{v_0,v_1,\ldots,v_n\}$, $pr(E_{\beta^*}) = \{v'_1,\ldots,v'_m\}$ и f — гомоморфизм из E_α в E_{β^*}. Предположим, что $f(v_0) = v'_l$. Положим $\lambda = x_{j_1}\cdots x_{j_{l-1}}$, $\mu = x_{j_l}\cdots x_{j_m}$, тогда $\beta = \lambda\mu$. Пусть $n = km + r$, где $r < m$. Тогда α является начальным подсловом слова $(\mu\lambda)^{k+1}$, т. е. существует такое γ, что $\alpha\gamma = (\mu\lambda)^{k+1}$. $\square$

Лемма 8. *Если $E_{\beta^*} \prec E_{\tilde\beta^*}$, где $\beta,\tilde\beta \in \Lambda$, то $\beta^* \cong \beta^*\tilde\beta^*$.*

Доказательство. Согласно лемме 6 имеем $\beta = \lambda\mu$ и $\tilde\beta = (\mu\lambda)^k$ для некоторого натурального $k \geqslant 1$. Отсюда получаем $\beta^* \overset{16}{\cong} \beta^*(\beta^k)^* \cong \beta^*((\lambda\mu)^k)^* \overset{6}{\cong} \beta^*((\mu\lambda)^k)^* \cong \beta^*\tilde\beta^*$. $\square$

Лемма 9. *Если $E_{\beta^*} \prec E_\alpha$, где $\alpha \in \tilde\Lambda$ и $\beta \in \Lambda$, то $\beta^* \cong \beta^*\alpha\beta^*$.*

Доказательство. По лемме 7 имеем $\beta = \lambda\mu$, $\alpha\gamma = (\mu\lambda)^{k+1}$ для некоторого натурального $k \geqslant 0$. Отсюда получаем

$$\beta^*\alpha\beta^* \overset{16}{\cong} \beta^*(\beta^{k+1})^*\alpha\beta^* \cong \beta^*((\lambda\mu)^{k+1})^*\alpha\beta^* \overset{6}{\cong} \beta^*((\mu\lambda)^{k+1})^*\alpha\beta^* \cong \beta^*(\alpha\gamma)^*\alpha\beta^* \overset{7}{\cong}$$

$$\cong \beta^*\beta^*\alpha(\alpha\gamma)^* \overset{16}{\cong} \beta^*\beta^*(\beta^{k+1})^*\alpha(\alpha\gamma)^* \cong (\beta^*)^2(\alpha\gamma)^*\alpha(\alpha\gamma)^* \overset{2}{\cong} \beta^*((\alpha\gamma)^*\alpha(\alpha\gamma)^*) \overset{14}{\cong} \beta^*(\alpha\gamma)^* \cong$$

$$\cong \beta^*((\mu\lambda)^{k+1})^* \overset{6}{\cong} \beta^*((\lambda\mu)^{k+1})^* \cong \beta^*(\beta^{k+1})^* \overset{16}{\cong} \beta^*.$$ $\square$

Лемма 10. *Если $p \cong \alpha_0\beta_1^*\alpha_1\beta_2^*\alpha_2\ldots\beta_n^*\alpha_n$, $q \cong \lambda$ и $E_p \prec E_q$, где $\lambda \in \tilde\Lambda$, то*

$$p \cong \alpha_0\beta_1^*\alpha_1\beta_2^*\alpha_2\ldots\beta_n^*\lambda\beta_n^*\alpha_n.$$

Доказательство. Так как при гомоморфизме компоненты связности графа переходят в компоненты связности, то возможны два случая: $E_{\alpha_{i-1}} \prec E_\lambda$ для некоторого $i = 2, \ldots, n$; $E_{\beta_i^*} \prec E_\lambda$ для некоторого $i = 1, \ldots, n$.

Предположим, что $E_{\alpha_{i-1}} \prec E_\lambda$. Тогда по лемме 4 имеем $\alpha_{i-1} = \gamma_1\lambda\gamma_2$. Отсюда для $i = 2, \ldots, n$ получаем:

$$p \cong \alpha_0\beta_1^*\alpha_1\beta_2^*\alpha_2\ldots\beta_{i-1}^*\alpha_{i-1}\beta_i^*\ldots\beta_n^*\alpha_n \cong \alpha_0\beta_1^*\alpha_1\beta_2^*\alpha_2\ldots\beta_{i-1}^*\gamma_1\lambda\gamma_2\beta_i^*\ldots\beta_n^*\alpha_n \cong$$
$$\alpha_0\beta_1^*\alpha_1\beta_2^*\alpha_2\ldots\beta_{i-1}^*\gamma_1(\lambda\gamma_2\beta_i^*)\ldots\beta_n^*\alpha_n \overset{13}{\cong} \alpha_0\beta_1^*\alpha_1\beta_2^*\alpha_2\ldots\beta_{i-1}^*\gamma_1\lambda\gamma_2\beta_i^*\lambda\beta_i^*\ldots\beta_n^*\alpha_n \cong$$
$$\alpha_0\beta_1^*\alpha_1\ldots\beta_{i-1}^*\alpha_{i-1}\beta_i^*\lambda\beta_i^*\alpha_i\beta_{i+1}^*\ldots\beta_n^*\alpha_n.$$

Далее по лемме 3 получаем:

$$\alpha_0\beta_1^*\alpha_1\ldots\beta_{i-1}^*\alpha_{i-1}\beta_i^*\lambda\beta_i^*\alpha_i\beta_{i+1}^*\ldots\beta_n^*\alpha_n \cong$$
$$\cong \alpha_0(\beta_n^*\alpha_1\beta_n^*)^*\ldots(\beta_n^*\alpha_{i-1}\beta_n^*)^*(\beta_n^*\lambda\beta_n^*)^*\ldots(\beta_n^*\alpha_{n-1}\beta_n^*)^*\beta_1^*\ldots\beta_n^*\alpha_n \overset{11}{\cong}$$
$$\cong \alpha_0(\beta_n^*\alpha_1\beta_n^*)^*\ldots(\beta_n^*\alpha_{n-1}\beta_n^*)^*(\beta_n^*\lambda\beta_n^*)^*\beta_1^*\ldots\beta_n^*\alpha_n \cong \alpha_0\beta_1^*\alpha_1\ldots\beta_n^*\lambda\beta_n^*\alpha_n.$$

Для случая $i = n+1$ получаем:

$$p \cong \alpha_0\beta_1^*\alpha_1\beta_2^*\alpha_2\ldots\beta_n^*\alpha_n \cong$$
$$\cong \alpha_0\beta_1^*\alpha_1\beta_2^*\alpha_2\ldots\beta_n^*\gamma_1\lambda\gamma_2 \overset{13'}{\cong} \alpha_0\beta_1^*\alpha_1\beta_2^*\alpha_2\ldots\beta_n^*\lambda\beta_n^*\gamma_1\lambda\gamma_2 \cong \alpha_0\beta_1^*\alpha_1\beta_2^*\alpha_2\ldots\beta_n^*\lambda\beta_n^*\alpha_n.$$

Пусть теперь $E_{\beta_i} \prec E_\lambda$, тогда по лемме 9 имеем $\beta_i^* \cong \beta_i^*\lambda\beta_i^*$. Отсюда получаем:

$$p \cong \alpha_0\beta_1^*\alpha_1\beta_2^*\alpha_2\ldots\beta_{i-1}^*\alpha_{i-1}\beta_i^*\ldots\beta_n^*\alpha_n \cong \alpha_0\beta_1^*\alpha_1\ldots\beta_{i-1}^*\alpha_{i-1}\beta_i^*\lambda\beta_i^*\alpha_i\beta_{i+1}^*\ldots\beta_n^*\alpha_n.$$

Далее, используя лемму 3, получаем:

$$\alpha_0\beta_1^*\alpha_1\ldots\beta_{i-1}^*\alpha_{i-1}\beta_i^*\lambda\beta_i^*\alpha_i\beta_{i+1}^*\ldots\beta_n^*\alpha_n \cong$$
$$\alpha_0(\beta_n^*\alpha_1\beta_n^*)^*\ldots(\beta_n * \alpha_{i-1}\beta_n^*)^*(\beta_n^*\lambda\beta_n^*)^*\ldots(\beta_n^*\alpha_{n-1}\beta_n^*)^*\beta_1^*\ldots\beta_n^*\alpha_n \overset{11}{\cong}$$
$$\alpha_0(\beta_n^*\alpha_1\beta_n^*)^*\ldots(\beta_n^*\alpha_{n-1}\beta_n^*)^*(\beta_n^*\lambda\beta_n^*)^*\beta_1^*\ldots\beta_n^*\alpha_n \cong \alpha_0\beta_1^*\alpha_1\ldots\beta_n^*\lambda\beta_n^*\alpha_n. \qquad \square$$

Лемма 11. *Если* $p \cong \alpha_0\beta_1^*\alpha_1\ldots\beta_n^*\alpha_n$, $q \cong \gamma^*$ *и* $E_p \prec E_q$, *где* $\gamma \in \Lambda$, *то*

$$p \cong \alpha_0\beta_1^*\alpha_1\beta_2^*\alpha_2\ldots\beta_n^*\gamma^*\beta_n^*\alpha_n.$$

Доказательство. Так как при гомоморфизме компоненты связности графа переходят в компоненты связности, имеем $E_{\beta_i^*} \prec E_{\gamma^*}$ для некоторого $i = 1, \ldots, n$. Отсюда по лемме 8 получаем $\beta^* \cong \beta^*\gamma^*$. Таким образом,

$$p \cong \alpha_0\beta_1^*\alpha_1\ldots\beta_i^*\alpha_i\beta_{i+1}^*\ldots\beta_n^*\alpha_n \cong \alpha_0\beta_1^*\alpha_1\ldots\beta_i^*\gamma^*\alpha_i\beta_{i+1}^*\ldots\beta_n^*\alpha_n \overset{2}{\cong}$$
$$\cong \alpha_0\beta_1^*\alpha_1\ldots\beta_i^*\gamma^*\alpha_i\beta_{i+1}^*\beta_{i+1}^*\ldots\beta_n^*\alpha_n \overset{7}{\cong} \alpha_0\beta_1^*\alpha_1\ldots\beta_i^*\beta_{i+1}^*\alpha_i\gamma^*\beta_{i+1}^*\ldots\beta_n^*\alpha_n \overset{11}{\cong}$$
$$\cong \alpha_0\beta_1^*\alpha_1\ldots\beta_{i+1}^*\beta_i^*\alpha_i\beta_{i+1}^*\gamma^*\ldots\beta_n^*\alpha_n \overset{7}{\cong} \alpha_0\beta_1^*\alpha_1\ldots\beta_{i+1}^*\beta_{i+1}^*\alpha_i\beta_i^*\gamma^*\ldots\beta_n^*\alpha_n \overset{2}{\cong}$$
$$\cong \alpha_0\beta_1^*\alpha_1\ldots\beta_{i+1}^*\alpha_i\beta_i^*\gamma^*\ldots\beta_n^*\alpha_n \overset{7}{\cong} \alpha_0\beta_1^*\alpha_1\ldots\beta_i^*\alpha_i\beta_{i+1}^*\gamma^*\ldots\beta_n^*\alpha_n \cong \ldots \cong \alpha_0\beta_1^*\alpha_1\ldots\beta_n^*\gamma^*\alpha_n. \qquad \square$$

Шаг 5. Непосредственной проверкой убеждаемся, что операции $\circ$ и ∇ удовлетворяют тождествам 1)–10), т. е. $\Sigma \subset Eq\{\circ, \nabla\}$. Таким образом, для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что $Eq\{\circ, \nabla\} \subset \Sigma$.

Предположим, что тождество $p = q$ принадлежит $Eq\{\circ, \nabla\}$. Согласно сформулированной ранее теореме 3 из [12] имеем $G(p) \cong G(q)$, т. е. $G(p) \prec G(q)$ и $G(q) \prec G(p)$. Это означает, что существуют гомоморфизмы f_1 из $G(q)$ в $G(p)$ и f_2 из $G(p)$ в $G(q)$. Согласно лемме 1, не нарушая общности, можно предположить, что $p \cong \alpha_0\beta_1^*\alpha_1\beta_2^*\alpha_2\ldots\beta_n^*\alpha_n$ и $q \cong \tilde{\alpha}_0\tilde{\beta}_1^*\tilde{\alpha}_1\tilde{\beta}_2^*\tilde{\alpha}_2\ldots\tilde{\beta}_m^*\tilde{\alpha}_m$.

Предположим, что $\alpha_0 \neq \odot$. Тогда существует ребро в $G(p)$, выходящее из вершины $in(p)$. Отсюда следует, что существует ребро в $G(q)$, выходящее из вершины $f_2(in(p)) = in(q)$, значит, $\tilde{\alpha}_0 \neq \odot$. Аналогично, $\tilde{\alpha}_0 \neq \odot$ влечет $\alpha_0 \neq \odot$.

Аналогично показываем, что $\alpha_n \neq \odot$ влечет $\tilde{\alpha}_m \neq \odot$ и $\tilde{\alpha}_m \neq \odot$ влечет $\alpha_n \neq \odot$.

Предположим, что $\alpha_0 \neq \odot$ и $\tilde{\alpha}_0 \neq \odot$. Так как $f_1(out(q)) = f_1(out(\tilde{\alpha}_0)) = out(p) = out(\alpha_0)$ и $f_2(out(p)) = f_2(out(\alpha_0)) = out(q) = out(\tilde{\alpha}_0)$, то $f_1(V_{\tilde{\alpha}_0}) \subset V_{\alpha_0}$ и $f_2(V_{\alpha_0}) \subset V_{\tilde{\alpha}_0}$. Отсюда по лемме 5 получаем, что $\alpha_0 = \tilde{\alpha}_0$. Аналогично показываем, что $\alpha_n \neq \odot$ и $\tilde{\alpha}_m \neq \odot$ влечет $\alpha_n = \tilde{\alpha}_m$.

Таким образом, нами показано, что $\alpha_0 = \tilde{\alpha}_0$ и $\alpha_n = \tilde{\alpha}_m$.

Далее рассмотрим все возможные случаи значений m и n.

Пусть $n = 0$, т. е. $p = \alpha_0$. Тогда согласно структуре графа $G(\alpha_0)$ существует путь в $G(p)$ из $in(p)$ в $out(p)$. Следовательно, существует путь в $G(q)$ из $f_2(in(p)) = in(q)$ в $f_2(out(p)) = out(q)$ $G(q)$, что возможно лишь в случае $m = 0$. Следовательно, $n = 0$ влечет $m = 0$. Аналогично, $m = 0$ влечёт $n = 0$.

Пусть $m = n = 0$, тогда $p = \alpha_0 = \tilde{\alpha}_0 = q$. Предположим теперь, что $n, m > 0$. Учитывая, что $\alpha_0 = \tilde{\alpha}_0$ и $\alpha_n = \tilde{\alpha}_m$, получаем:

$$p \cong \tilde{\alpha}_0 \beta_1^* \alpha_1 \beta_2^* \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1} \beta_n^* \tilde{\alpha}_m.$$

Так как $G(p) \prec G(q)$, имеем $E_p \prec E_{\tilde{\alpha}_1}$. Отсюда по лемме 10 получаем:

$$p \cong \tilde{\alpha}_0 \beta_1^* \alpha_1 \beta_2^* \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1} \beta_n^* \tilde{\alpha}_1 \beta_n^* \tilde{\alpha}_m.$$

Проделывая это для всех $\tilde{\alpha}_k$ $(k = 1, \ldots, m-1)$, мы получим:

$$p \cong \tilde{\alpha}_0 \beta_1^* \alpha_1 \beta_2^* \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1} \beta_n^* \tilde{\alpha}_1 \beta_n^* \tilde{\alpha}_2 \ldots \beta_n^* \tilde{\alpha}_{m-1} \beta_n^* \tilde{\alpha}_m.$$

Аналогично, используя лемму 11, получаем:

$$p \cong \tilde{\alpha}_0 \beta_1^* \alpha_1 \beta_2^* \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1} \beta_n^* \tilde{\alpha}_1 \beta_n^* \tilde{\alpha}_2 \ldots \beta_n^* \tilde{\alpha}_{m-1} \beta_n^* \tilde{\beta}_1 \tilde{\alpha}_m.$$

Проделывая эти действия для всех $\tilde{\beta}_k^*$ $(k = 1, \ldots, m)$, имеем

$$p \cong \tilde{\alpha}_0 \beta_1^* \alpha_1 \beta_2^* \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1} \beta_n^* \tilde{\alpha}_1 \beta_n^* \tilde{\alpha}_2 \ldots \beta_n^* \tilde{\alpha}_{m-1} \beta_n^* \tilde{\beta}_1 \ldots \tilde{\beta}_m^* \tilde{\alpha}_m.$$

По лемме 3 мы можем представить терм p в виде

$$p \cong \tilde{\alpha}_0 (\beta_n^* \alpha_1 \beta_n^*)^* \ldots (\beta_n^* \alpha_{n-1} \beta_n^*)^* (\beta_n^* \tilde{\alpha}_1 \beta_n^*)^* \ldots (\beta_n^* \tilde{\alpha}_{m-1} \beta_n^*)^* \beta_1^* \ldots \beta_n^* \tilde{\beta}_1^* \ldots \tilde{\beta}_m^* \tilde{\alpha}_m.$$

Аналогичным образом представляем терм q в следующем виде:

$$q \cong \tilde{\alpha}_0 \tilde{\beta}_1^* \tilde{\alpha}_1 \tilde{\beta}_2^* \tilde{\alpha}_2 \ldots \tilde{\alpha}_{m-1} \tilde{\beta}_m^* \alpha_1 \tilde{\beta}_m^* \alpha_2 \ldots \tilde{\beta}_m^* \alpha_{n-1} \tilde{\beta}_m^* \beta_1 \ldots \beta_n^* \tilde{\alpha}_m.$$

Отсюда, используя лемму 3, получаем:

$$\begin{gathered}
q \cong \tilde{\alpha}_0 \tilde{\beta}_1^* \tilde{\alpha}_1 \tilde{\beta}_2^* \tilde{\alpha}_2 \ldots \tilde{\alpha}_{m-1} \tilde{\beta}_m^* \alpha_1 \tilde{\beta}_m^* \alpha_2 \ldots \tilde{\beta}_m^* \alpha_{n-1} \tilde{\beta}_m^* \beta_1^* \ldots \beta_n^* \tilde{\alpha}_m \overset{2}{\cong} \\
\cong \tilde{\alpha}_0 \tilde{\beta}_1^* \tilde{\alpha}_1 \tilde{\beta}_2^* \tilde{\alpha}_2 \ldots \tilde{\alpha}_{m-1} \tilde{\beta}_m^* \alpha_1 \tilde{\beta}_m^* \alpha_2 \ldots \tilde{\beta}_m^* \alpha_{n-1} \tilde{\beta}_m^* \beta_1^* \ldots \beta_n^* \beta_n^* \tilde{\alpha}_m \overset{11}{\cong} \\
\cong \tilde{\alpha}_0 \tilde{\beta}_1^* \tilde{\alpha}_1 \tilde{\beta}_2^* \tilde{\alpha}_2 \ldots \tilde{\alpha}_{m-1} \tilde{\beta}_m^* \alpha_1 \tilde{\beta}_m^* \alpha_2 \ldots \tilde{\beta}_m^* \alpha_{n-1} \beta_n^* \tilde{\beta}_m^* \beta_1^* \ldots \beta_n^* \tilde{\alpha}_m \cong \\
\cong \tilde{\alpha}_0 (\tilde{\beta}_n^* \tilde{\alpha}_1 \tilde{\beta}_n^*)^* \ldots (\tilde{\beta}_n^* \tilde{\alpha}_{m-1} \tilde{\beta}_n^*)^* (\beta_n^* \alpha_1 \beta_n^*)^* \ldots (\beta_n^* \alpha_{n-1} \beta_n^*)^* \beta_n^* \tilde{\beta}_1^* \ldots \tilde{\beta}_m^* \tilde{\beta}_m^* \beta_1^* \ldots \beta_n^* \tilde{\alpha}_m \overset{11}{\cong} \\
\cong \tilde{\alpha}_0 (\beta_n^* \tilde{\alpha}_1 \beta_n^*)^* \ldots (\beta_n^* \tilde{\alpha}_{m-1} \beta_n^*)^* (\beta_n^* \alpha_1 \beta_n^*)^* \ldots (\beta_n^* \alpha_{n-1} \beta_n^*)^* \tilde{\beta}_1^* \ldots \tilde{\beta}_m^* \tilde{\beta}_m^* \beta_1^* \ldots \beta_n^* \beta_n^* \tilde{\alpha}_m \overset{2}{\cong} \\
\cong \tilde{\alpha}_0 (\beta_n^* \tilde{\alpha}_1 \beta_n^*)^* \ldots (\beta_n^* \tilde{\alpha}_{m-1} \tilde{\beta}_n^*)^* (\beta_n^* \alpha_1 \beta_n^*)^* \ldots (\beta_n^* \alpha_{n-1} \beta_n^*)^* \tilde{\beta}_1^* \ldots \tilde{\beta}_m^* \beta_1^* \ldots \beta_n^* \tilde{\alpha}_m.
\end{gathered}$$

Таким образом, используя тождество 11), получаем $p \cong q$, следовательно, тождество $p = q$ принадлежит эквациональной теории Σ, т. е. $Eq\{\circ, \nabla\} \subset \Sigma$. Теорема 1 доказана.

Переходим к доказательству теоремы 2. Напомним, что двухполюсники $G_\circ = (V_\circ, E_\circ, in_\circ, out_\circ)$ и $G_\nabla = (V_\nabla, E_\nabla, in_\nabla, out_\nabla)$, соответствующие операции умножения отношений $\circ$ и операции ∇, задаются следующим образом: $V_\circ = \{v_1, v_2, v_3\}$, $E_\circ = \{(v_1, 1, v_2), (v_2, 2, v_3)\}$, $in_\circ = v_1, out_\circ = v_3$ и $V_\nabla = \{v_0, v_1, v_2\}$, $E_\nabla = \{(v_1, 1, v_1)\}$, $in_\nabla = v_0$, $out_\nabla = v_2$.

Пусть Θ — множество всех двухполюсников $G(p)$, где $p \cong \alpha_0\beta_1^*\alpha_1\beta_2^*\alpha_2\ldots\beta_n^*\alpha_n$ для некоторых $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \tilde{\Lambda}$ $(n \geqslant 0)$, $\beta_1^*,\beta_2^*,\ldots,\beta_n^* \in \Lambda$. Определим две операции на Θ арности 2 и 1 как следующую композицию графов. Для заданных $G,Q \in \Theta$, положим $G\cdot Q = G_\circ(G,Q)$ и $G^* = G_\nabla(G)$, где $G_\circ$ и G_∇ — двухполюсники, соответствующие операциям $\circ$ и ∇ над отношениями.

Будем писать $G \overset{k}{\prec} Q$ $(k \geq 2)$, если существует гомоморфизм f из Q в G, удовлетворяющий условию: для любой вершины v из G $\mid f^{-1}(v) \mid \leq k$. Далее, будем писать $G \overset{K}{\prec} Q$, если $G = G_1 \overset{k}{\prec} G_2 \overset{k}{\prec} \ldots \overset{k}{\prec} G_n = Q$ для некоторых $G_1,G_2,\ldots,G_n \in \Theta$, и $G \overset{K}{\cong} Q$, если $G \overset{K}{\prec} Q$ и $Q \overset{K}{\prec} G$. Легко проверить, что отношение $\overset{K}{\cong}$ является конгруэнтностью алгебры $(\Theta,\cdot,^*)$ и фактор-алгебра $A_k = (\Theta,\cdot,^*)/\overset{K}{\cong}$ удовлетворяет тождествам 1)–9).

Обозначим через Pr множество всех простых чисел, $Pr[1,n] = PR \cap [1,n]$ и $Pr(n)$ — множество всех простых делителей n.

Лемма 12. *Если* $G(\beta^*) \overset{K}{\prec} G((\beta^l)^*)$, *то* $Pr(l) \subset Pr[1,k]$.

Доказательство. Предположим, что $G(\beta^*) \overset{K}{\prec} G((\beta^l)^*)$, т. е.

$$G(\beta^*) = G_1 \overset{k}{\prec} G_2 \overset{k}{\prec} \ldots \overset{k}{\prec} G_{n-1} \overset{k}{\prec} G_n = G((\beta^l)^*)$$

для некоторых $G_1,G_2,\ldots,G_{n-1},G_n \in \Theta$, и f_i — соответствующий гомоморфизм из G_i в G_{i-1} $(i = 2,\ldots,n)$.

Положим $\tilde{G}_{n-1} = f_n(G_n), \tilde{G}_{n-2} = f_{n-1}(\tilde{G}_{n-1}),\ldots,\tilde{G}_1 = f_2(\tilde{G}_2)$.

Легко видеть, что $G(\beta^*) \overset{k}{\prec} \tilde{G}_1 \overset{k}{\prec} \tilde{G}_2 \overset{k}{\prec} \ldots \overset{k}{\prec} \tilde{G}_{n-1} \overset{k}{\prec} G_n = G((\beta^l)^*)$. Пусть f композиция гомоморфизмов $f_n, f_{n-1},\ldots,f_2$. Согласно лемме 6 имеем $f_i^{-1}(v) = k_i \leq k$ для всякой вершины $v \in V(\tilde{G}_{i-1})$ такой, что $v \neq in(\tilde{G}_{i-1}) = out(\tilde{G}_{i-1})$. Отсюда следует, что $f^{-1}(v) = k_2k_3\ldots k_n$ для всякой вершины $v \in V(G(\beta^*))$ такой, что $v \neq in(G(\beta^*)) = out(G(\beta^*))$. Таким образом, согласно лемме 6 имеем $l = k_2k_3\ldots k_n$, следовательно, $Pr(l) \subset Pr[1,k]$. □

Пусть l — простое число такое, что $l \notin Pr[1,k]$. Предположим, что $G(\beta^*) \circ G((\beta^*)^l \overset{K}{\cong} G(\beta^*)$, тогда $G(\beta^*) \overset{K}{\prec} G((\beta^*)^l)$, следовательно, по лемме 12 $l \in Pr[1,k]$, что противоречит сделанному предположению. Таким образом, система тождеств 1)–10) не эквивалентна никакой своей подсистеме, следовательно, многообразие $Var\{\circ,\nabla\}$ не является конечно базируемым. Теорема 2 доказана.

Библиографический список

1. *Tarski A.* On the calculus of relations // J. Symbolic Logic. 1941. № 4. С. 73–89.
2. *Schein B. M.* Relation algebras and function semigroups // Semigroup Forum. 1970. Vol. 1, № 1. P. 1–62.
3. *Бредихин Д. А.* Об алгебрах отношений с диофантовыми операциями // Докл. АН. 1998. Т. 360. С. 594–595.
4. *Бредихин Д. А.* О квазитождествах алгебр отношений с диофантовыми операциями // Сиб. матем. журн. 1997. № 38. С. 29–41.
5. *Böner P., Pöschel F. R.* Clones of operations on binary relations // Contributions to general algebras. 1991. Vol. 7. P. 50–70.
6. *Henkin L., Monk J. D., Tarski A.* Cylindric Algebras. Amsterdam, North-Holland, 1971.
7. *Kuhn S.* The domino relations : flattening a two-dimensional logic // J. Philosophical Logic. 1989. Vol. 18. P. 173–195.
8. *Venema Y.* Many-dimansional modal logic. Amsterdam, Universiteit van Amsterdam, 1989.
9. *Jónsson B.* Varieties of relation algebras // Algebra Univers. 1982. Vol. 54. P. 273–299.
10. *Schein B. M.* Representation of involuted semigroups by binary relations // Fundamenta Math. 1974. Vol. 82, № 2. P. 121–141.
11. *Bredikhin D. A.* On varieties of semigroups of relations with operations of cylindrification // Contributions to General Algebra. 2005. Vol. 16. P. 1–6.
12. *Бредихин Д. А., Попович А. В.* Тождества полугрупп отношений с операцией рефлексивной двойной цилиндрофикации // Изв. вузов. Матем. 2014. № 8. С. 90–95.
13. *Бредихин Д. А.* Эквациональная теория алгебр отношений с позитивными операциями // Изв. вузов. Матем. 1993. № 3. С. 23–30.

On Variety of Semigroups of Reletions with Operation of Reflexive Double Cylindrification

D. A. Bredikhin, A. V. Popovich

Saratov State Technical University, 77, Politekhnicheskaja str., Saratov, 410054, Russia, bredikhin@mail.ru, popovich_al@mail.ru

In the paper, the basis of identities for the variety generated by semigroups of relations with the operation of reflexive double cylindrification is found.

Key words: algebras of relations, varieties, basis of identities, operation of reflexive double cylindrification.

References

1. Tarski A. On the calculus of relations. *J. Symbolic Logic*, 1941, iss. 4, pp. 73–89.
2. Schein B. M. Relation algebras and function semigroups. *Semigroup Forum*, 1970, vol. 1, iss. 1, pp. 1–62.
3. Bredikhin D. A. Relation algebras with diophantine operations. *Doklady Math.*, 1998, vol. 57, no. 3, pp. 435–436.
4. Bredikhin D. A. On quasi-identities of relation algebras with diophantine operations. *Siberian Math. J.*, 1997, vol. 38, iss. 1, pp. 23–33. DOI: 10.1007/BF02674896.
5. Böner P., Pöschel F. R. Clones of operations on binary relations. *Contributions to general algebras*, 1991, vol. 7, pp. 50–70.
6. Henkin L., Monk J. D., Tarski A. *Cylindric Algebras*. Amsterdam, North-Holland, 1971.
7. Kuhn S. The domino relations : flattening a two-dimensional logic. *J. Philosophical Logic*, 1989, vol. 18, pp. 173–195.
8. Venema Y. *Many-dimansional modal logic*. Amsterdam, Universiteit van Amsterdam, 1989.
9. Jónsson B. Varieties of relation algebras. *Algebra Univers.*, 1982, vol. 54, pp. 273–299.
10. Schein B. M. Representation of involuted semigroups by binary relations. *Fundamenta Math.*, 1974, vol. 82, iss. 2, pp. 121–141.
11. Bredikhin D. A. On varieties of semigroups of relations with operations of cylindrification. *Contributions to General Algebra*, 2005, vol. 16, pp. 1–6.
12. Bredikhin D. A. Popovich A. V. Identities of semigroups of relations with an operator of reflexive double cylindrification. *Russian Math.* [Izvestiya VUZ. Matematika], 2014, vol. 58, iss. 8. pp. 74–77. DOI: 10.3103/S1066369X14080106.
13. Bredikhin D. A. The equational theory of algebras of relations with positive operations. *Russian Math.* [Izvestiya VUZ. Matematika], 1993, vol. 37, iss. 3. pp. 21–28.

УДК 519.81

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ЭТАЛОНОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИСКРЕТНОЙ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

А. А. Будаева

Кандидат технических наук, доцент кафедры автоматизированной обработки информации, Северо-Кавказский горно-металлургический институт (государственный технологический университет), Владикавказ, budalina@yandex.ru

Результаты исследований задач планирования и управления показывают, что в реальной постановке эти задачи являются многокритериальными. Для эффективного решения такой задачи необходимо в первую очередь построить многокритериальную математическую модель, которую затем нужно оптимизировать, предварительно выбрав наиболее подходящий для этого метод. Предлагается подход к решению задач дискретной многокритериальной оптимизации, в основе которого лежат понятия эталона и расстояния, и рассматривается многокритериальная задача дискретной оптимизации, которая решается с помощью этого метода.

Ключевые слова: многокритериальные задачи, дискретная оптимизация, эталон, расстояние, вектор идеального значения целевой функции, экспертные оценки.

ВВЕДЕНИЕ

Проблемы принятия оптимальных проектных решений, возникающие в различных областях науки и техники, часто могут быть сформулированы как задачи дискретной оптимизации. Отличительная особенность задач дискретной оптимизации состоит в наличии конечного множества допустимых решений, которые теоретически можно перебрать и выбрать наилучшее (дающее минимум или максимум целевой функции).