УДК 517.95;517.984

ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА ФУРЬЕ В СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С НЕНУЛЕВОЙ НАЧАЛЬНОЙ СКОРОСТЬЮ

А. П. Гуревич[1], В. П. Курдюмов[2], А. П. Хромов[3]

[1]Гуревич Александр Петрович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений и прикладной математики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, GurevichAP@mail.ru

[2]Курдюмов Виталий Павлович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений и прикладной математики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Kurdyumov47@yandex.ru

[3]Хромов Август Петрович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений и прикладной математики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, KhromovAP@info.sgu.ru

В статье методом контурного интегрирования резольвенты оператора, порожденного спектральной задачей, соответствующей смешанной задаче для волнового уравнения с комплексным потенциалом, дается обоснование метода Фурье двух смешанных задач с нулевой начальной функцией и ненулевой начальной скоростью. Краевые условия таковы, что эти две задачи вместе со смешанной задачей с закрепленными концами исчерпывают весь класс смешанных задач с указанными начальными условиями, для которых оператор соответствующей спектральной задачи в методе Фурье имеет регулярные краевые условия. В отличие от работы В. А. Чернятина, предложенный метод не использует уточненной асимптотики собственных значений и никакой информации о собственных функциях. На начальные данные рассматриваемых задач накладываются минимальные требования. Существенно используется прием А. Н. Крылова ускорения сходимости рядов Фурье.

Ключевые слова: метод Фурье, формальное решение, спектральная задача, резольвента.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-1-13-29

ВВЕДЕНИЕ

Традиционно обоснование метода Фурье в задачах математической физики опирается на доказательство равномерной сходимости ряда, представляющего формальное решение задачи, и рядов, получающихся из него почленным дифференцированием нужное число раз. Впервые строгое обоснование метода Фурье, основанное на такой точке зрения, было дано В. А. Стекловым [1, с. 224] и в последующем именно так проводилось обоснование метода Фурье для большинства задач математической физики. Законность указанных операций дифференцирования приводит к завышению требований на исходные данные задачи, не вызванные самой ее постановкой. Выход из этого положения намечен А. Н. Крыловым [2] в его исследованиях по ускорению сходимости рядов Фурье и им подобных. Суть его приема состоит в том, что вопрос о дифференцировании ряда Фурье решается путем разбиения его на два ряда, один из которых точно суммируется (и тем самым в этом случае не надо прибегать к почленному дифференцированию), а второй ряд сходится настолько быстро, что его можно почленно дифференцировать. В. А. Чернятин [3] приемом А. Н. Крылова с применением уточненной асимптотики собственных значений и собственных функций исследовал ряд задач методом Фурье и значительно ослабил условия гладкости, и в ряде случаев эти условия гладкости стали минимально возможными. Переход от формального решения к новому виду, вытекающему из исследований А. Н. Крылова и В. А. Чернятина, есть качественно новый шаг, позволяющий с исчерпывающей полнотой исследовать краевые задачи методом Фурье и ставящий много вопросов и в теории функций.

В [4] А. П. Хромов предложил новый способ использования приема А. Н. Крылова, опирающийся на метод Коши – Пуанкаре интегрирования по спектральному параметру резольвенты оператора, порожденного спектральной задачей по методу Фурье, который получил свое дальнейшее развитие в [5, 6].

В настоящей работе, в отличие от [4–6], где начальные условия смешанных задач для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t)$$

имеют вид

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = 0, \tag{1}$$

мы рассмотрим такие начальные условия:

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = \psi(x). \tag{2}$$

В результате, используя резольвентный подход в методе Фурье, мы получим классические решения двух смешанных задач с начальными условиями (2) при минимальных условиях на $\psi(x)$ и краевыми условиями

$$u'_x(0,t) + \alpha_1 u(0,t) + \beta_1 u(1,t) = u'_x(1,t) + \alpha_2 u(0,t) + \beta_2 u(1,t) = 0 \tag{3}$$

для одной из них и

$$u'_x(0,t) + \beta u_x(1,t) + \alpha_1 u(0,t) + \beta_1 u(1,t) = \alpha u(0,t) + u(1,t) = 0 \tag{4}$$

для другой, притом, что в условиях (4) $1 + \alpha\beta \neq 0$. Эти две задачи вместе со смешанной задачей с условиями (2) и закрепленными концами ($u(0,t) = u(1,t) = 0$) исчерпывают весь класс смешанных задач для волнового уравнения с начальными условиями (2), для которых оператор соответствующей спектральной задачи в методе Фурье имеет регулярные краевые условия. В случае краевых условий $u(0,t) = u(1,t) = 0$, начальных условий (2) и вещественной $q(x)$ классическое решение смешанной задачи при минимальных требованиях на $\psi(x)$ получено в [3]. Для комплекснозначной $q(x)$ оно может быть получено резольвентным методом, приведенном в настоящей статье. Классические решения смешанных задач для волнового уравнения с начальными условиями (1) с краевыми условиями (3), (4) или $u(0,t) = u(l,t) = 0$ при минимальных требованиях на $\varphi(x)$ и комплекснозначной $q(x)$ получены в [4–6].

Исследование смешанных задач с начальными условиями (2) наталкивается на дополнительные, по сравнению с [4–6], трудности, некоторые из которых преодолеваются представлением $\psi(x)$ в виде суммы двух функций, одна из которых обращается в ноль вместе со своей производной в точках 0 и 1, а другая принадлежит области определения оператора, определяющего спектральную задачу в методе Фурье.

1. СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ (3)

Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t), \tag{5}$$

$$u'_x(0,t) + \alpha_1 u(0,t) + \beta_1 u(1,t) = u'_x(1,t) + \alpha_2 u(0,t) + \beta_2 u(1,t) = 0, \tag{6}$$

$$u(x,0) = 0, \qquad u'_t(x,0) = \psi(x), \qquad x \in [0,1], \qquad t \in (-\infty, \infty), \tag{7}$$

где $q(x) \in C[0,1]$ — комплекснозначная функция, α_1, α_2, β_1, β_2 — комплексные числа. Естественные минимальные требования для классического решения здесь такие: $\psi(x) \in C^1[0,1]$ комплекснозначная, причем

$$\psi'(0) + \alpha_1\psi(0) + \beta_1\psi(1) = 0, \quad \psi'(1) + \alpha_2\psi(0) + \beta_2\psi(1) = 0. \tag{8}$$

Задача (5)–(6) с условиями (1) рассмотрена в [5].

Для формирования эталонной смешанной задачи (см. [7]) мы привлекаем оператор L_0: $L_0 y = -y''(x)$, $y'(0) = y'(1) = 0$. Отметим, что оператор L_0 самосопряженный, его собственными значениями являются (см. [8, с. 365]) числа $\lambda_n^0 = n^2\pi^2$, $n = 0, 1, \ldots$, а соответствующими ортонормированными собственными функциями: $\varphi_0(x) = 1$, $\varphi_n(x) = \sqrt{2}\cos n\pi x$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

1.1. Преобразование формального решения

Метод Фурье связан со спектральной задачей для оператора L:

$$Ly = -y''(x) + q(x)y(x),$$
$$U_1(y) = y'(0) + \alpha_1 y(0) + \beta_1 y(1) = 0, \quad U_2(y) = y'(1) + \alpha_2 y(0) + \beta_2 y(1) = 0.$$

Теорема 1. *Собственные значения $\lambda_n = \rho_n^2$ ($\lambda = \rho^2$, $\operatorname{Re}\rho \geqslant 0$) оператора L при достаточно больших n простые и имеют асимптотику $\rho_n = n\pi + \varepsilon_n$, где $n = n_0, n_0+1, \ldots$, $\varepsilon_n = O(1/n)$.*

(Это известный факт, см., например, [9, с. 74].)

Обозначим через $\widetilde{\gamma}_n$ окружности $\widetilde{\gamma}_n = \{\rho | |\rho - n\pi| = \delta\}$, $\delta > 0$ достаточно мало, и через γ_n — образ $\widetilde{\gamma}_n$ в λ-плоскости. Пусть $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$, где E — единичный оператор, λ — спектральный параметр, есть резольвента оператора L. Формальное решение задачи (5)–(7) по методу Фурье представим в виде (см. [10, 11])

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r}(R_\lambda\psi)\frac{\sin\rho t}{\rho}\,d\lambda - \sum_{n\geqslant n_0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_n}(R_\lambda\psi)\frac{\sin\rho t}{\rho}\,d\lambda, \tag{9}$$

где $\gamma_r = \{\lambda \mid |\lambda| = r\}$, $r > 0$ фиксировано и таково, что внутри γ_r находятся все собственные значения оператора L, не попавшие внутрь γ_n при $n \geqslant n_0$, контуры γ_r и γ_{n_0} не пересекаются. Отметим, что теперь в формальном решении не фигурируют явно ни собственные значения, ни собственные функции.

Выполним теперь преобразования ряда (9) с использованием эталонной задачи.

Лемма 1. *Имеет место представление*

$$\psi(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x), \tag{10}$$

где $\psi_1(x) \in C^1[0,1]$, $\psi_1(0) = \psi(1) = \psi_1'(0) = \psi_1'(1) = 0$, $\psi_2(x) \in C^2[0,1]$, $\psi_2(x) \in D_L$ (область определения оператора L).

Доказательство. Имеем $\psi(x) = (\psi(x) - \psi_2(x)) + \psi_2(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x)$, где $\psi_2(x) \in C^2[0,1]$ и удовлетворяет условиям $\psi_2^j(0) = \psi^j(0)$, $\psi_2^j(1) = \psi^j(1)$ $(j = 0, 1)$ (в качестве $\psi_2(x)$ можно взять, например, многочлен третьего порядка, удовлетворяющий этим условиям). Поскольку $\psi(x)$ удовлетворяет условиям (8), то этим условиям удовлетворяет и $\psi_2(x)$ и, следовательно, $\psi_2(x) \in D_L$. □

Лемма 2. *Пусть μ_0 — фиксированное число, не являющееся собственным значением оператора L и γ — один из контуров γ_r, γ_n при $n \geqslant n_0$ (μ_0 вне γ). Тогда*

$$\int\limits_\gamma (R_\lambda\psi_2)\frac{\sin\rho t}{\rho}\,d\lambda = \int\limits_\gamma \frac{1}{\lambda - \mu_0}(R_\lambda g)\frac{\sin\rho t}{\rho}\,d\lambda,$$

где $g = (L - \mu_0 E)\psi_2$.

Доказательство аналогично приведенному в [5, лемма 1].

Теорема 2. *Формальное решение задачи* (5)–(7) *представимо в виде*

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t), \tag{11}$$

где

$$u_0(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{\gamma_r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)(R_\lambda^0\psi_1)\frac{\sin\rho t}{\rho}\,d\lambda, \tag{12}$$

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{\gamma_r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)(R_\lambda\psi_1 - R_\lambda^0\psi_1)\frac{\sin\rho t}{\rho}\,d\lambda,$$

$$u_2(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{\gamma_r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\frac{1}{\lambda-\mu_0}(R_\lambda g)\frac{\sin\rho t}{\rho}\,d\lambda,$$

$R^0_\lambda = (L_0-\lambda E)^{-1}$ — *резольвента оператора* L_0.

Доказательство. По лемме 1 имеем:

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{\gamma_r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)(R_\lambda\psi_1)\frac{\sin\rho t}{\rho}\,d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{\gamma_r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)(R_\lambda\psi_2)\frac{\sin\rho t}{\rho}\,d\lambda. \tag{13}$$

Отсюда, применяя лемму 2 ко второму слагаемому и выполняя очевидные преобразования с первым, получаем (13). □

Замечание. Функция $u_0(x,t)$ есть формальное решение эталонной задачи:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \qquad u(x,0)=0, \qquad u'_t(x,0)=\psi_1(x), \qquad u'_x(0,t)=u'_x(1,t)=0. \tag{14}$$

1.2. Вспомогательные утверждения

Обозначим через $z_1(x,\rho)$ и $z_2(x,\rho)$ решения уравнения $y''-q(x)y+\rho^2 y=0$ с начальными условиями $z_1(0,\rho)=1$, $z_1'(0,\rho)=0$, $z_2(0,\rho)=0$, $z_2'(0,\rho)=1$. Тогда $z_j(x,\rho)$ являются целыми функциями по ρ и даже по λ, где $\lambda=\rho^2$.

Теорема 3. *Для* R_λ *и* R^0_λ *имеют место формулы*

$$\begin{gathered} R_\lambda f = v_1(x,\rho)(f,z_1) + v_2(x,\rho)(f,z_2) + M_\rho f,\\ R^0_\lambda f = v^0_1(x,\rho)(f,z^0_1) + v^0_2(x,\rho)(f,z^0_2) + M^0_\rho f, \end{gathered} \tag{15}$$

где

$$v_j(x,\rho) = \frac{(-1)^j}{\Delta(\rho)}\left\{\left[-\beta_1 z_{3-j}(1,\rho)U_2(z_2) + (z'_{3-j}(1,\rho)+\beta_2 z_{3-j}(1,\rho))U_1(z_2)\right]z_1(x,\rho) + \right.$$
$$\left. + \left[\beta_1 z_{3-j}(1,\rho)U_2(z_1) - \left(z'_{3-j}(1,\rho)+\beta_2 z_{3-j}(1,\rho)\right)U_1(z_1)\right]z_2(x,\rho)\right\}\ (j=1,2),$$

$$\Delta(\rho) = U_1(z_1)U_2(z_2) - U_1(z_2)U_2(z_1), \quad (f,z) = \int\limits_0^1 f(\zeta)z(\zeta)\,d\zeta,$$

$$v^0_1(x,\rho) = -\frac{\cos\rho\cos\rho x}{\rho\sin\rho}, \quad v^0_2(x,\rho) = -\cos\rho x,$$

$$M_\rho f = \int\limits_0^x \begin{vmatrix} z_1(x,\rho) & z_2(x,\rho)\\ z_1(\zeta,\rho) & z_2(\zeta,\rho)\end{vmatrix} f(\zeta)\,d\zeta,$$

$$M^0_\rho f = \int\limits_0^x \begin{vmatrix} z^0_1(x,\rho) & z^0_2(x,\rho)\\ z^0_1(\zeta,\rho) & z^0_2(\zeta,\rho)\end{vmatrix} f(\zeta)\,d\zeta, \qquad z^0_1(x,\rho)=\cos\rho x, \quad z^0_2(x,\rho)=\frac{\sin\rho x}{\rho}.$$

Этот результат, как и следующая лемма, доказаны в [5, теоремы 3, 4, лемма 2].

Лемма 3. *При* $\rho\in\widetilde{\gamma}_n$ *имеют место асимптотические формулы:*

$$v_1^{(j)}(x,\rho) = v_1^{0(j)}(x,\rho) + O(\rho^{j-2}), \qquad v_2^{(j)}(x,\rho) = v_2^{0(j)}(x,\rho) + O(\rho^{j-1}), \qquad j=0,1,2,$$

где $v^{(j)}(x,\rho) = \frac{d^j}{dx^j}v(x,\rho)$ *и оценки* $O(\cdot)$ *равномерны по* $x\in[0,1]$.

Теорема 4. *Для* $z_j(x,\rho)$, $j=1,2$, *имеют место формулы*

$$z_1(x,\rho) = \cos\rho x + \int\limits_0^x K_1(x,\zeta)\cos\rho\zeta\,d\zeta, \tag{16}$$

$$z_2(x,\rho) = \frac{\sin \rho x}{\rho} + \int\limits_0^x K_2(x,\zeta)\frac{\sin \rho\zeta}{\rho}\, d\zeta, \tag{17}$$

где $K_j(x,\zeta)$ *непрерывно дифференцируемы по* x *и* ζ*, причем* $K_2(x,0) \equiv 0$.

Замечание. Формулы (16), (17) хорошо известны как формулы операторов преобразования (см. [12, с. 17, 23]).

Лемма 4. *Имеют место формулы*

$$z_1(x,\rho) = \cos\rho x + \frac{1}{\rho}\int\limits_0^x \sin\rho(x-\zeta)\cos\rho\zeta q(\zeta)\, d\zeta + \frac{1}{\rho^2}\int\limits_0^x \sin\rho(x-\zeta)F_1(\zeta,\rho)\, d\zeta, \tag{18}$$

$$z_2(x,\rho) = \frac{\sin\rho x}{\rho} + \frac{1}{\rho^2}\int\limits_0^x \sin\rho(x-\zeta)\sin\rho\zeta q(\zeta)\, d\zeta + \frac{1}{\rho^3}\int\limits_0^x \sin\rho(x-\zeta)F_2(\zeta,\rho)\, d\zeta, \tag{19}$$

где

$$F_1(\zeta,\rho) = q(\zeta)\left[\sin\rho\zeta K_1(\zeta,\zeta) + \int\limits_0^\zeta \sin\rho\tau K'_{1_\tau}(\zeta,\tau)\, d\tau\right],$$

$$F_2(\zeta,\rho) = q(\zeta)\left[-\cos\rho\zeta K_2(\zeta,\zeta) + \int\limits_0^\zeta \cos\rho\tau K'_{2_\tau}(\zeta,\tau)\, d\tau\right].$$

Доказательство. Докажем формулу (18). Используя метод вариаций произвольных постоянных и формулу (16), получим:

$$z_1(x,\rho) = \cos\rho x + \frac{1}{\rho}\int\limits_0^x \sin\rho(x-\zeta)q(\zeta)z_1(\zeta,\rho)\, d\zeta = \cos\rho x + \frac{1}{\rho}\int\limits_0^x \sin\rho(x-\zeta)q(\zeta)[\cos\rho\zeta +$$

$$+ \int\limits_0^\zeta K_1(\zeta,\tau)\cos\rho\tau\, d\tau]\, d\zeta.$$

Отсюда следует (18). Формула (19) получается аналогично, но с использованием формулы (17). □

Лемма 5. *Имеют место формулы*

$$\left(\psi_1(x), \int\limits_0^x \sin\rho(x-\zeta)\cos\rho\zeta q(\zeta)\, d\zeta\right) = \frac{1}{\rho}(p_1(x), \cos\rho x), \tag{20}$$

$$\left(\psi_1(x), \int\limits_0^x \sin\rho(x-\zeta)\sin\rho\zeta q(\zeta)\, d\zeta\right) = \frac{1}{\rho}(p_2(x), \sin\rho x), \tag{21}$$

где

$$p_j = p_{j1}(x) + p_{j2}(x) + p_{j3}(x), \qquad j = 1,2, \qquad p_{11}(x) = -q(x)\int\limits_x^1 \psi'_1\zeta)\, d\zeta,$$

$$p_{12}(x) = \frac{1}{2}\psi'_1(x)\int\limits_0^x q(\zeta)\, d\zeta, \qquad p_{13}(x) = \frac{1}{4}\int\limits_x^1 \psi'_1(\zeta)\left[q\left(\frac{\zeta-x}{2}\right) + q\left(\frac{\zeta+x}{2}\right)\right]\, d\zeta,$$

$$p_{21}(x) = p_{11}(x), \quad p_{22}(x) = p_{12}(x), \quad p_{23}(x) = \frac{1}{4}\int\limits_x^1 \psi'_1(\zeta)\left[q\left(\frac{\zeta+x}{2}\right) - q\left(\frac{\zeta-x}{2}\right)\right]\, d\zeta.$$

Доказательство. Докажем формулу (20) (формула (21) доказывается аналогично). Так как $\sin\rho(x-\zeta)\cos\rho\zeta = \frac{1}{2}[\sin\rho(x-2\zeta)+\sin\rho x]$ и $\sin\rho(x-2\zeta) = \sin\rho x\cos 2\rho\zeta - \cos\rho x\sin 2\rho\zeta$, то

$$\left(\psi_1(x), \int\limits_0^x \sin\rho(x-\zeta)\cos\rho\zeta q(\zeta)\,d\zeta\right) = \frac{1}{2}\left\{\int\limits_0^1 \psi_1(x)\sin\rho x\left(\int\limits_0^x \cos 2\rho\zeta q(\zeta)\,d\zeta\right)dx - \right.$$

$$\left. - \int\limits_0^1 \psi_1(x)\cos\rho x\left(\int\limits_0^x \sin 2\rho\zeta q(\zeta)\,d\zeta\right)dx + \int\limits_0^1 \psi_1(x)\sin\rho x\left(\int\limits_0^x q(\zeta)\,d\zeta\right)dx\right\}. \tag{22}$$

В каждом из слагаемых в правой части (22) проведем интегрирование по частям и учтем, что $\psi_1(0)=\psi_1(1)=0$. Тогда правая часть (22) будет иметь вид

$$\frac{1}{2\rho}\int\limits_0^1 \psi_1'(x)dx\int\limits_0^x q(\zeta)\cos\rho(x-2\zeta)\,d\zeta - \frac{1}{\rho}\int\limits_0^1 \psi_1'(x)dx\int\limits_0^x q(\zeta)\cos\rho\zeta\,d\zeta +$$

$$+\frac{1}{2\rho}\int\limits_0^1 \psi_1'(x)\cos\rho x dx\int\limits_0^x q(\zeta)\,d\zeta. \tag{23}$$

Так как

$$\int\limits_0^x q(\zeta)\cos\rho(x-2\zeta)\,d\zeta = \frac{1}{2}\int\limits_{-x}^x q\left(\frac{x-\tau}{2}\right)\cos\rho\tau\,d\tau = \frac{1}{2}\left[\int\limits_0^x q\left(\frac{x-\tau}{2}\right)\cos\rho\tau\,d\tau + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{-x}^0 q\left(\frac{x-\zeta}{2}\right)\cos\rho\zeta\,d\zeta\right] = \frac{1}{2}\left[\int\limits_0^x q\left(\frac{x-\tau}{2}\right)\cos\rho\tau\,d\tau + \int\limits_{-x}^0 q\left(\frac{x-\zeta}{2}\right)\cos\rho\zeta\,d\zeta\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^x \left[q\left(\frac{x-\tau}{2}\right) + q\left(\frac{x+\tau}{2}\right)\right]\cos\rho\tau\,d\tau,$$

то для первого слагаемого в (23) получим

$$\frac{1}{2\rho}\int\limits_0^1 \psi_1'(x)dx\int\limits_0^x q(\zeta)\cos\rho(x-2\zeta) = \frac{1}{4\rho}\int\limits_0^1 \psi_1'(x)dx\int\limits_0^x \left[q\left(\frac{x-\tau}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + q\left(\frac{x+\tau}{2}\right)\right]\cos\rho\tau\,d\tau = \frac{1}{4\rho}\int\limits_0^1 \cos\rho x dx\int\limits_x^1 \left[q\left(\frac{\zeta-x}{2}\right) + q\left(\frac{\zeta+x}{2}\right)\right]\,d\zeta = \frac{1}{\rho}\left(p_{13}(x), \cos\rho x\right).$$

отсюда и из (23) следует (20). □

Лемма 6. *При $\rho\in\widetilde{\gamma_n}$ имеют место оценки*

$$\left(\psi_1(x), \int\limits_0^x \sin\rho(x-\zeta)F_j(\zeta,\rho)\,d\zeta\right) = O\left(\frac{1}{\rho}\right), \qquad j=1,2,$$

где $F_j(\zeta,\rho)$ из леммы 4.

Для доказательства следует изменить порядок интегрирования левой части, провести интегрирование по частям во внутреннем интеграле и учесть, что $F_j(\zeta,\rho) = O(1)$ равномерно по $\zeta\in[0,1]$. □

Из лемм 4–6 получаем следующий результат.

Лемма 7. *Если $\rho = n\pi+\mu$ и $\mu\in\tilde{\gamma}_0$, то*

$$\left(\psi_1, z_1 - z_1^0\right) = \frac{1}{(n\pi+\mu)^2}\left[(p_1(\zeta)\cos\mu\zeta, \cos n\pi\zeta) - (p_1(\zeta)\sin\mu\zeta, \sin n\pi\zeta)\right] + O\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

$$\left(\psi_1, z_2 - z_2^0\right) = \frac{1}{(n\pi+\mu)^3}\left[(p_2(\zeta)\cos\mu\zeta, \sin n\pi\zeta) + (p_2(\zeta)\sin\mu\zeta, \cos n\pi\zeta)\right] + O\left(\frac{1}{n^4}\right),$$

где оценки $O(\cdot)$ равномерны по $\mu \in \widetilde{\gamma}_0$.

Лемма 8. *Если $\rho = n\pi + \mu$ и $\mu \in \widetilde{\gamma}_0$, то*

$$(\psi_1, z_1) = \frac{1}{n\pi+\mu}\left[(p_3(\zeta)\cos\mu\zeta, \sin n\pi\zeta) - (p_3(\zeta)\sin\mu\zeta, \cos n\pi\zeta)\right], \tag{24}$$

$$(\psi_1, z_2) = \frac{1}{(n\pi+\mu)^2}\left[(p_4(\zeta)\cos\mu\zeta, \cos n\pi\zeta) - (p_4(\zeta)\sin\mu\zeta, \sin n\pi\zeta)\right], \tag{25}$$

где

$$p_3(\zeta) = -\psi_1'(\zeta) + \psi_1(\zeta)K_1(\zeta,\zeta) - \int_\zeta^1 \psi_1(\tau)K'_{1_\zeta}(\tau,\zeta)\,d\tau,$$

$$p_4(\zeta) = \psi_1'(\zeta) - \psi_1(\zeta)K_2(\zeta,\zeta) + \int_\zeta^1 \psi_1(\tau)K'_{2_\zeta}(\tau,\zeta)\,d\tau.$$

Доказательство. На основании формулы (16) имеем:

$$(\psi_1, z_1) = (\psi_1(\zeta), \cos\rho\zeta) + \left(\psi_1(\zeta), \int_0^\zeta K_1(\zeta,\tau)\cos\rho\tau\,d\tau\right).$$

Проводя интегрирование по частям в первом слагаемом и во втором множителе второго слагаемого, учитывая $\psi_1(0) = \psi_1(1) = 0$, получим:

$$(\psi_1, z_1) = \frac{1}{\rho}\left(p_3(\zeta), \sin\rho\zeta\right).$$

Отсюда следует (24). Формула (25) получается аналогично с использованием формулы (17) и условия $K_2(x,0) \equiv 0$. □

Аналогично леммам 3–5 из [5] доказываются две следующие леммы.

Лемма 9. *Если $g \in C[0,1]$ и $\rho = n\pi + \mu$, то*

$$(g, z_1) = (p_5(\zeta)\cos\mu\zeta, \cos n\pi\zeta) - (p_5(\zeta)\sin\mu\zeta, \sin n\pi\zeta),$$

$$(g, z_2) = \frac{1}{n\pi+\mu}\left[(p_6(\zeta)\cos\mu\zeta, \sin n\pi\zeta) + (p_6(\zeta)\sin\mu\zeta, \cos n\pi\zeta)\right],$$

где $p_5(\zeta) = g(\zeta) + \int_\zeta^1 g(\tau)K_1(\tau,\zeta)\,d\tau$, $p_6(\zeta) = g(\zeta) + \int_\zeta^1 g(\tau)K_2(\tau,\zeta)\,d\tau$.

Лемма 10. *Обозначим через $\theta(x)$ функцию $\cos x$ или $\sin x$. Пусть $f(x) \in L_2[0,1]$ и $f(x,\mu) = f(x)\theta(\mu x)$, где $\mu \in \widetilde{\gamma}_0$ и $\beta_n(\mu) = (f(x,\mu), \theta(n\pi x))$. Тогда справедлива оценка*

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} \frac{1}{n}|\beta_n(\mu)| \leqslant C\sqrt{\sum_{n=n_1}^{n_2}\frac{1}{n^2}},$$

где постоянная C не зависит от n_1, n_2 и $\mu \in \widetilde{\gamma}_0$.

1.3. Исследование $\mathbf{u_0(x,t)}$

Теорема 5. *Функция $u_0(x,t)$ из* (12) *есть классическое решение эталонной задачи* (14).

Доказательство. Из (12) и (15) по теореме вычетов получаем:

$$u_0(x,t) = (\psi_1, 1)t + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi}(\psi_1(\zeta), \cos n\pi\zeta)\cos n\pi x \sin n\pi t,$$

откуда по формуле $2\cos n\pi x \sin n\pi x = \sin n\pi(x+t) - \sin n\pi(x-t) = n\pi \int\limits_{x-t}^{x+t} \cos n\pi\tau\, d\tau$, следует, что

$$u_0(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} \widetilde{\Psi}(\tau)\, d\tau,$$

где

$$\widetilde{\Psi}(x) = (\psi_1, 1) + 2\sum_{n=1}^{\infty}(\psi_1(\zeta), \cos n\pi\zeta)\cos n\pi x. \tag{26}$$

Так как скалярные произведения в (26) имеют оценку α_n/n, где $\sum|\alpha_n|^2 < \infty$, то в силу неравенства Коши – Буняковского ряд в (26) сходится абсолютно и равномерно на всей оси и, следовательно, $\widetilde{\Psi}(x) \in C(-\infty,\infty)$. Покажем, что $\widetilde{\Psi}(x) \in C^1(-\infty,\infty)$. Сначала отметим, что в силу полноты в $L_2[0,1]$ ортонормированной системы 1, $\sqrt{2}\cos n\pi x$, $n = 1,2,\ldots$, ряд (26) сходится к $\psi_1(x)$, поэтому $\widetilde{\Psi}(x) = \psi_1(x)$ при $x \in [0,1]$. Так как $\widetilde{\Psi}(x)$ является четной и 2-периодической, то остается убедиться, что $\widetilde{\Psi}'(x)$ непрерывна в точках 0 и 1, но этот факт следует из условия $\psi_1'(0) = \psi_1'(1) = 0$. Следовательно, $u_0(x,t)$ — решение задачи (14). □

1.4. Исследование $\mathbf{u_1(x,t)}$

По теореме 3, учитывая, что $M_\rho f$ и $M_\rho^0 f$ являются целыми функциями по λ, имеем:

$$-\sum_{n\geqslant n_0} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_n} \left(R_\lambda\psi_1 - R_\lambda^0\psi_1\right)\frac{\sin\rho t}{\rho}\, d\lambda = \sum_{n\geqslant n_0} a_n(x,t),$$

где

$$a_n(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\tilde{\gamma}_n} 2\sin\rho t\,[v_1(x,\rho)(\psi_1,z_1) + v_2(x,\rho)(\psi_1,z_2) -$$
$$-v_1^0(x,\rho)(\psi_1,z_1^0) - v_2^0(x,\rho)(\psi_1,z_2^0)\big]\, d\rho. \tag{27}$$

Лемма 11. *Ряды* $\sum a^{(j)}_{n,x^j}(x,t)$ *и* $\sum a^{(j)}_{n,t^j}(x,t)$ $(j = 0,1,2)$ *сходятся абсолютно и равномерно по* $x \in [0,1]$ *и* $t \in [-T,T]$ *при любом* $T > 0$.

Доказательство. Имеем:

$$J(x,\rho) = J_1(x,\rho) + J_2(x,\rho), \tag{28}$$

где $J(x,\rho)$ — выражение в квадратных скобках в (27),

$$J_1(x,\rho) = (v_1(x,\rho) - v_1^0(x,\rho))(\psi_1,z_1) - (v_2(x,\rho) - v_2^0(x,\rho))(\psi_1,z_2),$$
$$J_2(x,\rho) = v_1^0(x,\rho)(\psi_1, z_1 - z_1^0) + v_2^0(x,\rho)(\psi_1, z_2 - z_2^0).$$

Обозначим через $\beta_n(\mu)$ любой из функционалов

$$\pm(p_j(\zeta)\cos\mu\zeta, \cos n\pi\zeta), \qquad \pm(p_j(\zeta)\cos\mu\zeta, \sin n\pi\zeta),$$
$$\pm(p_j(\zeta)\sin\mu\zeta, \cos n\pi\zeta), \qquad \pm(p_j(\zeta)\sin\mu\zeta, \sin n\pi\zeta), \qquad j = 1,2,3,4.$$

Тогда по лемме 7 и 8 имеем:

$$(\psi_1, z_1) = \frac{1}{n\pi+\mu}\left(\beta_n(\mu) + \beta_n(\mu)\right), \qquad (\psi_1, z_2) = \frac{1}{(n\pi+\mu)^2}\left(\beta_n(\mu) + \beta_n(\mu)\right),$$

$$(\psi_1, z_1 - z_1^0) = \frac{1}{(n\pi+\mu)^2}\,(\beta_n(\mu) + \beta_n(\mu)) + O\left(\frac{1}{n^3}\right),$$
$$(\psi_1, z_2 - z_2^0) = \frac{1}{(n\pi+\mu)^3}\,(\beta_n(\mu) + \beta_n(\mu)) + O\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

Теперь, используя лемму 3 и очевидные оценки

$$v_{1,xj}^{0(j)}(x,\rho) = O(\rho^{j-1}), \qquad v_{2,xj}^{0(j)}(x,\rho) = O(\rho^{j}), \qquad j = 0,1,2,$$

из представления (28) получаем:

$$|J(x,\rho)| = O(n^{j-2})\frac{1}{|n\pi+\mu|}(|\beta_n(\mu)| + |\beta_n(\mu)|) + O(n^{j-1})\frac{1}{|n\pi+\mu|^2}(|\beta_n(\mu)|+$$
$$+|\beta_n(\mu)|) + O(n^{j-1})\left[\frac{1}{|n\pi+\mu|^2}(|\beta_n(\mu)| + |\beta_n(\mu)|) + O(n^{-3})\right] +$$
$$+O(n^{j})\left[\frac{1}{|n\pi+\mu|^3}(|\beta_n(\mu)| + |\beta_n(\mu)|) + O(n^{-4})\right] = O(n^{j-3}\widetilde{\beta}_n(\mu)) + O(n^{j-4}), \tag{29}$$

где $\widetilde{\beta}_n(\mu) = \sum\limits_{n=1}^{32} |\beta_n(\mu)|$ и оценки $O(\cdot)$ равномерны по $x \in [0,1]$ и $\mu \in \widetilde{\gamma}_0$. Отсюда

$$|a_{n,x^j}^{(j)}(x,t)| = \int\limits_{\widetilde{\gamma}_0} O(n^{j-3})\widetilde{\beta}_n(\mu)\,|d\mu| + \int\limits_{\widetilde{\gamma}_0} O(n^{j-4})\,|d\mu|, \qquad j = 0,1,2.$$

Если $j = 0,1$, то отсюда $|a_{n,x^j}^{(j)}(x,t)| = O(n^{-2})$ и тем самым $\sum |a_{n,x^j}^{(j)}(x,t)|$ сходится равномерно по $x \in [0,1]$ и $t \in [-T,T]$.

Далее, из (29) следует оценка

$$|a_{n,x^2}^{(2)}(x,t)| = \int\limits_{\widetilde{\gamma}_0} O(n^{-1})\widetilde{\beta}_n(\mu)\,|d\mu|,$$

и тогда по лемме 10

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} |a_{n,x^2}^{(2)}(x,t)| = \int\limits_{\widetilde{\gamma}_0} \sum_{n=n_1}^{n_2} O(n^{-1})\widetilde{\beta}_n(\mu)\,|d\mu| = \int\limits_{\widetilde{\gamma}_0} O\left(\sqrt{\sum_{n=n_1}^{n_2}\frac{1}{n^2}}\right)|d\mu| = O\left(\sqrt{\sum_{n=n_1}^{n_2}\frac{1}{n^2}}\right),$$

где оценки $O(\cdot)$ равномерны по $x \in [0,1]$ и $t \in [-T,T]$. Тем самым утверждение леммы получено для рядов $\sum a_{n,x^j}^{(j)}(x,t)$. Аналогично (даже проще) исследуются ряды $\sum a_{n,t^j}^{(j)}(x,t)$ $(j = 0,1,2)$. □

Так как

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r}(R_\lambda\psi_1 - R_\lambda^0\psi_1)\frac{\sin\rho t}{\rho}\,d\lambda + \sum_{n\geqslant n_0} a_n(x,t),$$

то из леммы 11 следует

Лемма 12. *Ряд $u_1(x,t)$ допускает почленное дифференцирование дважды по x и t при $x \in [0,1]$ и $t \in (-\infty,\infty)$.*

1.5. Исследование $\mathbf{u_2(x,t)}$

По теореме 3, учитывая, что $M_\rho f$ есть целая по λ, имеем:

$$-\sum_{n\geqslant n_0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_n}\frac{1}{\lambda-\mu_0}(R_\lambda g)\frac{\sin\rho t}{\rho}\,d\lambda = \sum_{n\geqslant n_0} b_n(x,t),$$

где

$$b_n(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\widetilde{\gamma}_n}\frac{2\sin\rho t}{\rho^2-\mu_0}[v_1(x,\rho)(g,z_1) + v_2(x,\rho)(g,z_2)]\,d\rho. \tag{30}$$

Лемма 13. *Ряды* $\sum b^{(j)}_{n,x^j}(x,t)$ *и* $\sum b^{(j)}_{n,t^j}(x,t)$, $j = 0,1,2$, *сходятся абсолютно и равномерно по* $x \in [0,1]$ *и* $t \in [-T,T]$ *при любом* $T > 0$.

Доказательство. Обозначим через $\beta_n(\mu)$ еще и такие функционалы

$$\pm(p_j(\zeta)\cos\mu\zeta, \cos n\pi\zeta), \quad \pm(p_j(\zeta)\sin\mu\zeta, \sin n\pi\zeta), \qquad j = 5,6.$$

Тогда по лемме 9

$$(g,z_1) = \beta_n(\mu) + \beta_n(\mu), \quad (g,z_2) = \frac{1}{n\pi+\mu}(\beta_n(\mu)+\beta_n(\mu)).$$

В силу оценок

$$v_1^{(j)}(x,\rho) = O(\rho^{j-1}), \quad v_2^{(j)}(x,\rho) = O(\rho^j), \quad j = 0,1,2, \tag{31}$$

легко следующих из леммы 3, для квадратной скобки $\widetilde{J}(x,\rho)$ в (30) получаем:

$$\left|\widetilde{J}^{(j)}_{x^j}(x,\rho)\right| = O(n^{j-1})\,[|\beta_n(\mu)| + |\beta_n(\mu)|] + O(n^j)\frac{1}{|n\pi+\mu|}[|\beta_n(\mu)| + |\beta_n(\mu)|] = O\left(n^{j-1}\widetilde{\beta}_n(\mu)\right),$$

где $\widetilde{\beta}_n(\mu) = \sum\limits_1^{40} |\beta_n(\mu)|$ и оценки $O(\cdot)$ равномерны по $x \in [0,1]$ и $\mu \in \widetilde{\gamma}_0$. Отсюда следует оценка

$$\left|b^{(j)}_{n,x^j}(x,t)\right| = \int\limits_{\gamma_n} O\left(n^{j-3}\widetilde{\beta}_n(\mu)\right)\,|d\mu|, \qquad j = 0,1,2.$$

Теперь завершение доказательства проводится так же, как и в лемме 11. □

Таким образом, имеет место

Лемма 14. *Ряд* $u_2(x,t)$ *допускает почленное дифференцирование дважды по* x *и* t *при* $x \in [0,1]$ *и* $t \in (-\infty,\infty)$.

1.6. Классическое решение задачи (5)–(7)

Теорема 6. *Формальное решение* $u(x,t)$ *задачи* (5)–(7) *является классическим решением при* $\psi(x) \in C^1[0,1]$ *и выполнении условий* (8).

Доказательство. Для формального решения (9) по леммам 1 и 2 в силу аналитичности $M_\rho f$ по λ имеем:

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r}(R_\lambda\psi)\frac{\sin\rho t}{\rho}\,d\lambda - \sum_{n\geqslant n_0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_n}[v_1(x,\rho)(\psi_1,z_1) + v_2(x,\rho)(\psi_1,z_2)]\times$$
$$\times\frac{\sin\rho t}{\rho}\,d\lambda - \sum_{n\geqslant n_0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_n}\frac{1}{\lambda-\mu_0}[v_1(x,\rho)(g,z_1) + v_2(x,\rho)(g,z_2)]\frac{\sin\rho t}{\rho}\,d\lambda. \tag{32}$$

На основании оценок (31) по леммам 8–10 получаем, что ряды в (32) и ряды, получающиеся из них почленным дифференцированием один раз по x или по t, сходятся абсолютно и равномерно (для второго слагаемого см. также доказательство леммы 11). Таким образом, процедура ускорения сходимости рядов не требуется. Поэтому $u(x,t)$ удовлетворяет граничным условиям и условию $u(x,0) = 0$. Покажем, что выполняется и условие $u_t(x,0) = \psi(x)$. Почленно дифференцируя в точке $t = 0$ ряд (9), получим:

$$u'_t(x,0) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{\gamma_r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)(R_\lambda\psi)\,d\lambda. \tag{33}$$

Так как ряд (33) сходится равномерно и является разложением функции $\psi(x)$ в ряд Фурье по системе собственных и присоединенных функций (с. п. ф.) оператора L, биоротагональная к которой, в силу регулярности краевых условий оператора L^*, полна в $L_2[0,1]$, то $u_t(x,0) = \psi(x)$. Докажем теперь, что $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (5). По леммам 12 и 14 формальное решение на основании теоремы 2 и теоремы 5 дважды непрерывно дифференцируемо. Обозначим через M оператор $M = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$. Тогда

$$Mu_0(x,t) = 0. \tag{34}$$

Далее имеем:

$$\begin{aligned}
Mu_1(x,t) &= -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{\gamma_r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right) M\left((R_\lambda\psi_1 - R_\lambda^0\psi_1)\frac{\sin\rho t}{\rho}\right) d\lambda = \\
&= \frac{q(x)}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r}(R_\lambda\psi_1)\frac{\sin\rho t}{\rho}\,d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n} M\left((R_\lambda\psi_1 - R_\lambda^0\psi_1)\frac{\sin\rho t}{\rho}\right) d\lambda = \\
&= \frac{q(x)}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r}(R_\lambda\psi_1)\frac{\sin\rho t}{\rho}\,d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n} M\left(J(x,\rho)\frac{\sin\rho t}{\rho}\right) d\lambda,
\end{aligned}$$

где $J(x,\rho)$ определено в (28). Но

$$M\left(v_j(x,\rho)\frac{\sin\rho t}{\rho}\right) = -q(x)v_j(x,\rho)\frac{\sin\rho t}{\rho}, \tag{35}$$

$$M\left(v_j^0(x,\rho)\frac{\sin\rho t}{\rho}\right) = 0.$$

Значит,

$$Mu_1(x,t) = \frac{q(x)}{2\pi i}\left(\int\limits_{\gamma_r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)(R_\lambda\psi_1)\frac{\sin\rho t}{\rho}\,d\lambda. \tag{36}$$

Теперь в силу формулы (35) и леммы 2 имеем:

$$\begin{aligned}
Mu_2(x,t) &= -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{\gamma_r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\frac{1}{\lambda-\mu_0}M\left((R_\lambda g)\frac{\sin\rho t}{\rho}\right) d\lambda = \\
&= -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{\gamma_r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\frac{1}{\lambda-\mu_0}M\left([v_1(x,\rho)(g,z_1) + v_2(x,\rho)(g,z_2)]\,\frac{\sin\rho t}{\rho}\right) d\lambda = \\
&= \frac{q(x)}{2\pi i}\left(\int\limits_{\gamma_r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\frac{1}{\lambda-\mu_0}\,[v_1(x,\rho)(g,z_1) + v_2(x,\rho)(g,z_2)]\,\frac{\sin\rho t}{\rho}\,d\lambda = \\
&= \frac{q(x)}{2\pi i}\left(\int\limits_{\gamma_r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\frac{1}{\lambda-\mu_0}(R_\lambda g)\frac{\sin\rho t}{\rho}\,d\lambda = \frac{q(x)}{2\pi i}\left(\int\limits_{\gamma_r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)(R_\lambda\psi_2)\frac{\sin\rho t}{\rho}\,d\lambda.
\end{aligned}$$

Отсюда и из (34) и (36) следует $Mu(x,t) = -q(x)u(x,t)$. □

2. СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ (4)

Рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t), \quad x\in[0,1], \qquad t\in(-\infty,\infty), \tag{37}$$

$$u_x'(0,t) + \beta u_x'(1,t) + \alpha_1 u(0,t) + \beta_1 u(1,t) = 0, \tag{38}$$

$$\alpha u(0,t) + u(1,t) = 0, \tag{39}$$

$$u(x,0) = 0, \qquad u_t'(x,0) = \psi(x), \tag{40}$$

где $q(x)\in C[0,1]$ — комплекснозначная функция. Естественные минимальные требования для классического решения следующие:

$$\psi(x)\in C^1[0,1], \quad \psi'(0) + \beta\psi'(1) + \alpha_1\psi(0) + \beta_1\psi(1) = \alpha\psi(0) + \psi(1) = 0. \tag{41}$$

Задача (37)–(39) с начальными условиями (1) рассмотрена в [6].

При применении метода Фурье здесь, по сравнению с задачей (5)–(7), возникают новые трудности из-за возможной кратности собственных значений, которые преодолеваются резольвентным методом.

2.1. Вспомогательные утверждения

По методу Фурье с задачей (37)–(40) связывается спектральная задача для оператора L:

$$Ly = -y''(x) + q(x)y(x), \tag{42}$$

$$U_1(y) = y'(0) + \beta y'(1) + \alpha_1 y(0) + \beta_1 y(1) = 0, \quad U_2(y) = \alpha y(0) + y(1) = 0. \tag{43}$$

Будем изучать задачу (37)–(40) при дополнительном условии: $1 + \alpha\beta \neq 0$. Это условие необходимо и достаточно для регулярности краевых условий оператора L (см. [9, с. 73]).

Теорема 7. *Собственные значения оператора L образуют две последовательности:* $\lambda_n = {\rho_n}^2$ *и* $\lambda'_n = {\rho'_n}^2$ $(\lambda = \rho^2,\ \operatorname{Re}\rho \geqslant 0)$ *и имеют асимптотику:* $\rho_n = 2n\pi + \zeta_1 + \varepsilon_n$, $\rho'_n = 2n\pi + \zeta_2 + \varepsilon'_n$ $(n = n_0, n_0+1, \ldots)$, *где* $\zeta_{1,2} = -i\ln(d \pm \sqrt{d^2-1})$,

$$d = -\frac{(\alpha+\beta)}{1+\alpha\beta}, \qquad \varepsilon_n = O(1), \qquad \varepsilon'_n = O(1).$$

(Это известный факт, см., например, [9, с. 74].)

Мы привлекаем еще спектральную задачу для оператора L_0:

$$L_0 = -y''(x), \tag{44}$$

$$U_1^0(y) = y'(0) + \beta y'(1) = 0, \qquad U_2^0(y) = \alpha y(0) + y(1), \tag{45}$$

который участвует в формировании эталонной смешанной задачи.

Теорема 8. *Для резольвенты* R_λ *оператора L, определенного в* (42), (43), *и резольвенты* R_λ^0 *оператора* L_0, *определенного в* (44), (45), *имеют место формулы*

$$R_\lambda f = v_1(x,\rho)(f, z_1) + v_2(x,\rho)(f,z_2) + (M_\rho f)(x), \tag{46}$$
$$R_\lambda^0 f = v_1^0(x,\rho)(f, z_1^0) + v_2^0(x,\rho)(f,z_2^0) + (M_\rho^0 f)(x),$$

где

$$v_1(x,\rho) = \frac{1}{\Delta(\rho)}\{[U_2(z_2)\,(\beta z_2'(1,\rho) + \beta_1 z_2(1,\rho)) - U_1(z_2)z_2(1,\rho)]\,z_1(x,\rho) +$$
$$+ [U_1(z_1)z_2(1,\rho) - U_2(z_1)\,(\beta z_2'(1,\rho) + \beta_1 z_1(1,\rho))]\,z_2(x,\rho)\},$$
$$v_2(x,\rho) = \frac{1}{\Delta(\rho)}\{[-U_2(z_2)\,(\beta z_1'(1,\rho) + \beta_1 z_1(1,\rho)) + U_1(z_2)z_1(1,\rho)]\,z_1(x,\rho) +$$
$$+ [-U_1(z_1)z_1(1,\rho) + U_2(z_1)\,(\beta z_1'(1,\rho) + \beta_1 z_1(1,\rho))]\,z_2(x,\rho)\},$$

$\Delta(\rho) = U_1(z_1)U_2(z_2) - U_1(z_2)U_2(z_1)$, $\Delta(\rho) \neq 0$, v_1^0, v_2^0 *— те же, что и* v_1, v_2, *но взяты для оператора* L_0; z_1, z_2, M_ρ, z_1^0, z_2^0, M_ρ^0 *— те же, что и в п. 1; для* $\Delta_0(\rho)$ *из определения* $v_j^0(x,\rho)$ *справедлива формула* $\Delta_0(\rho) = U_1^0(z_1^0)U_2^0(z_2^0) - U_1^0(z_2^0)U_2^0(z_1^0) = -[\alpha + \beta + (1+\alpha\beta)\cos\rho]$, $\Delta_0(\rho) \neq 0$, $\lambda = \rho^2$, $\operatorname{Re}\rho \geqslant 0$. *Этот результат приведен в теоремах 3, 4 из [6].*

Обозначим теперь через $\widetilde{\gamma}_n$ объединение двух непересекающихся окружностей $\{\rho||\rho - (2n\pi + \zeta_j)| = \delta\}$ $(j = 1,2)$, если $\zeta_1 \neq \zeta_2$, или один такой контур, если $\zeta_1 = \zeta_2$, $\delta > 0$ достаточно мало, через γ_n обозначим образ $\widetilde{\gamma}_n$ в λ — плоскости, число n_0 (см. теорему 7) и $r > 0$ таковы, что контуры γ_r и γ_n $(n \geqslant n_0)$ удовлетворяют аналогичным условиям из п. 1 с той лишь разницей, что теперь при $n \geqslant n_0$ внутри γ_n находятся λ_n и λ'_n (которые могут совпадать).

Нам потребуются некоторые результаты, аналогичные доказанным в п. 1. Лемма 1 имеет место и для $\psi(x)$, удовлетворяющей условиям (41), и в ее формулировке $\psi_2(x) \in D_L$, где теперь L — оператор, определенный в (42), (43); дословно, уже для резольвенты оператора L из (42), (43) доказывается и лемма 2. Сохраняется также и лемма 3 — этот результат доказан в [6, лемма 2]. Леммы 7–9 имеют место и для случая, когда $\rho = 2n\pi + \mu$ ($\mu \in \widetilde{\gamma}_0$ — объединение двух окружностей). В этом случае все равенства в формулировках сохранятся, а доказательства дословно повторяются, если в них параметр n заменить на $2n$. Именно так в этом пункте мы понимаем формулировки этих лемм. Лемма 10 имеет место и для функционалов $\eta_n(\mu) = (f(x,\mu), \theta(2n\pi x))$, где $\mu \in \widetilde{\gamma}_0$. Этот результат доказан в [6, лемма 5]. Леммы 11, 13 также сохраняются, а их доказательства дословно повторяются с использованием лемм 7–10 (в новой редакции), если теперь в леммах 11, 13 под $\widetilde{\gamma}_n$, $v_j(x,\rho)$, $v_j^0(x,\rho)$ понимать величины, определенные в этом пункте (функционалы $\beta_n(\mu)$ в доказательствах этих лемм определяются аналогично с той лишь разницей, что в них параметр n из $\sin n\pi\zeta$, $\cos n\pi\zeta$ заменяется на $2n$). Для формального решения сохраняется формула (9) и представление (11), т. е. $u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t)$; $u_0(x,t)$ есть формальное решение задачи

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \qquad u(x,0) = 0, \qquad u_t'(x,0) = \psi_1(x), \tag{47}$$

$$u_x'(0,t) + \beta u_x'(1,t) = \alpha u(0,t) + u(1,t) = 0; \tag{48}$$

для $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ в силу лемм 11 и 13 имеют место леммы 12 и 14.

Лемма 15. *Если $\rho = 2n\pi + \mu$, то*

$$(\psi_1, z_1^0) = -\frac{1}{2n\pi + \mu}\left[(\psi_1'(\zeta)\cos\mu\zeta, \sin 2n\pi\zeta) + (\psi_1'(\zeta)\sin\mu\zeta, \cos 2n\pi\zeta)\right],$$

$$(\psi_1, z_2^0) = \frac{1}{(2n\pi + \mu)^2}\left[(\psi_1'(\zeta)\cos\mu\zeta, \cos 2n\pi\zeta) - (\psi_1'(\zeta)\sin\mu\zeta, \sin 2n\pi\zeta)\right].$$

Для доказательства следует провести интегрирование по частям в (ψ_1, z_j^0). □

2.2. Исследование $\mathbf{u_0(x,t)}$

Положим $\Omega_\rho(\psi_1)(x) = v_1^0(x,\rho)(\psi_1, z_1^0) + v_2^0(x,\rho)(\psi_1, z_2^0)$.

Лемма 16. *Имеют место формулы*

$$\int\limits_\gamma (R_\lambda^0\psi_1)(x)\,d\lambda = \int\limits_\gamma \Omega_\rho(\psi_1)(x)\,d\lambda, \tag{49}$$

$$\int\limits_\gamma (R_\lambda^0\psi_1)(x)\frac{\sin\rho t}{\rho}\,d\lambda = \int\limits_\gamma \Omega_\rho(\psi_1)(x)\frac{\sin\rho t}{\rho}\,d\lambda, \tag{50}$$

где γ есть либо γ_r, либо γ_n при $n \geqslant n_0$.

Эта лемма очевидна, поскольку $(M_\rho^0\psi_1)(x)$ — целая по λ. □

Обозначим

$$\omega_n(x) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_n} \Omega_\rho(\psi_1)(x)\,d\lambda, \quad \omega(x) = \sum_{n\geqslant n_0}\omega_n(x).$$

Лемма 17. *Ряд $\sum\limits_{n\geqslant n_0}\omega_n(x)$ сходится абсолютно и равномерно на любом отрезке из $(-\infty,\infty)$.*

Доказательство. Обозначим через $\eta_n(\mu)$ любой из функционалов:

$$\pm(\psi_1'(\zeta)\cos\mu\zeta, \sin 2n\pi\zeta), \qquad \pm(\psi_1'(\zeta)\sin\mu\zeta, \cos 2n\pi\zeta),$$
$$\pm(\psi_1'(\zeta)\cos\mu\zeta, \cos 2n\pi\zeta), \qquad \pm(\psi_1'(\zeta)\sin\mu\zeta, \sin 2n\pi\zeta).$$

Тогда при $\rho = 2n\pi + \mu$ по лемме 15 для $\mu \in \widetilde{\gamma}_0$ имеем:

$$(\psi_1, z_1^0) = \frac{1}{2n\pi + \mu}(\eta_n(\mu) + \eta_n(\mu)), \quad (\psi_1, z_2^0) = \frac{1}{(2n\pi + \mu)^2}(\eta_n(\mu) + \eta_n(\mu)).$$

Поэтому на основании очевидных оценок: $v_1^0(x,\rho) = O\left(\frac{1}{\rho}\right)$, $v_2^0(x,\rho) = O(1)$ получаем

$$\left|\int\limits_{\gamma_n} \Omega_\rho(\psi_1)(x)\,d\lambda\right| = \int\limits_{\widetilde{\gamma}_0} O\left(\frac{1}{n}\widetilde{\eta}_n(\mu)\right)\,|d\mu|,$$

где $\widetilde{\eta}_n(\mu) = \sum\limits_1^8 |\eta_n(\mu)|$. Значит, по лемме 10 (в которой функционалы обозначены через $\eta_n(\mu)$, т. е. $\eta_n(\mu) = (f(x,\mu), \theta(2n\pi x))$),

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} \left| \int\limits_{\gamma_n} \Omega_\rho(\psi_1)(x)\, d\lambda \right| = O\left(\sqrt{\sum_{n=n_1}^{n_2} \frac{1}{n}} \right) \int\limits_{\widetilde{\gamma}_0} |d\mu| = O\left(\sqrt{\sum_{n=n_1}^{n_2} \frac{1}{n^2}} \right).$$

Отсюда следует абсолютная и равномерная сходимость ряда $\sum\limits_{n\geqslant n_0} \int\limits_{\gamma_n} \Omega_\rho(\psi_1)(x)\, d\lambda$. □

Обозначим

$$\widetilde{\Psi}_1(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_r} \Omega_\rho(\psi_1)(x)\, d\lambda + \omega(x).$$

Лемма 18. *Функция* $\widetilde{\Psi}_1(x) \in C(-\infty,\infty)$ *и* $\widetilde{\Psi}_1(x) = \psi_1(x)$ *при* $x \in [0,1]$.

Доказательство. По лемме 17 $\widetilde{\Psi}_1(x) \in (-\infty,\infty)$. Пусть $x \in [0,1]$. На основании формулы (49) получаем:

$$\widetilde{\Psi}_1(x) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int\limits_{\gamma_r} + \sum_{n\geqslant n_0} \int\limits_{\gamma_n} \right) (R_\lambda^0 \psi_1)(x)\, d\lambda.$$

Так как этот ряд сходится равномерно (см. доказательство леммы 17), то в силу полноты в $L_2[0,1]$ системы с.п.ф. оператора L_0^* (оператор L_0 определен в (44), (45)) $\widetilde{\Psi}_1(x) = \psi_1(x)$. □

Лемма 19. *Имеет место формула*

$$\Omega_\rho(\psi_1)(x) \frac{\sin \rho t}{\rho} = \frac{1}{2} \int\limits_{x-t}^{x+t} \Omega_\rho(\psi_1)(\zeta)\, d\zeta. \tag{51}$$

Доказательство. Имеем:

$$\cos \rho x \frac{\sin \rho t}{\rho} = \frac{1}{2\rho} \left[\sin \rho(x+t) - \sin \rho(x-t) \right], \qquad \frac{\sin \rho x}{\rho} \frac{\sin \rho t}{\rho} = \frac{1}{2\rho^2} [\cos \rho(x-t) - \cos \rho(x+t)].$$

Обозначим через $v_1(\rho)$ первую квадратную скобку из определения $v_1(x,\rho)$ и через $v_2(\rho)$ — вторую. И пусть $F(\zeta,\rho) = \dfrac{1}{2\Delta_0(\rho)} \left(v_1(\rho) \dfrac{\sin \rho\zeta}{\rho} - v_2(\rho) \dfrac{\cos \rho\zeta}{\rho^2} \right)$.

Легко получаем

$$v_1^0(x,\rho) \frac{\sin \rho t}{\rho} = F(x+t,\rho) - F(x-t,\rho) = \int\limits_{x-t}^{x+t} F'_\zeta(\zeta,\rho)\, d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\Delta_0(\rho)} \int\limits_{x-t}^{x+t} \left(v_1(\rho) \cos \rho\zeta + v_2(\rho) \frac{\sin \rho\zeta}{\rho} \right) d\zeta = \frac{1}{2} \int\limits_{x-t}^{x+t} v_1^0(\zeta,\rho)\, d\zeta. \tag{52}$$

Аналогично получается $v_2^0(x,\rho) \dfrac{\sin \rho t}{\rho} = \dfrac{1}{2} \int\limits_{x-t}^{x+t} v_2^0(\zeta,\rho)\, d\zeta$.

Отсюда и из (52) следует (51). □

Аналогично лемме 10 из [6] докажем следующий результат.

Лемма 20. *Имеют место формулы*

$$\widetilde{\Psi}_1(-x) = \frac{1}{1+\alpha\beta} \left[(1-\alpha\beta) \widetilde{\Psi}_1(x) - 2\beta \widetilde{\Psi}_1(1-x) \right], \tag{53}$$

$$\widetilde{\Psi}_1(1+x) = \frac{1}{1+\alpha\beta} \left[-2\alpha \widetilde{\Psi}_1(x) + (\alpha\beta - 1) \widetilde{\Psi}_1(1-x) \right]. \tag{54}$$

Доказательство. По формуле (50) и лемме 19 получаем:

$$\int_\gamma (R^0_\lambda \psi_1) \frac{\sin \rho t}{\rho}\, d\lambda = \int_\gamma \Omega_\rho(\psi_1)(x) \frac{\sin \rho t}{\rho}\, d\lambda = \frac{1}{2} \int_\gamma \int_{x-t}^{x+t} \Omega_\rho(\psi_1)(\zeta)\, d\zeta\, d\lambda,$$

где γ есть либо γ_r, либо γ_n ($n \geqslant n_0$). Тогда

$$u_0(x,t) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2\pi i}\right) \left(\int_{\gamma_r} + \sum_{n \geqslant n_0} \int_{\gamma_n}\right) \int_{x-t}^{x+t} \Omega_\rho(\psi_1)(\zeta)\, d\zeta\, d\lambda. \tag{55}$$

На основании леммы 17 ряд в (55) и ряд, полученный из него почленным дифференцированием один раз, сходится абсолютно и равномерно по $x \in [0,1]$ и $t \in [-T,T]$ для любого $T > 0$, и, кроме того,

$$u_0(x,t) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \left(-\frac{1}{2\pi i}\right) \left(\int_{\gamma_r} + \sum_{n \geqslant n_0} \int_{\gamma_n}\right) \Omega_\rho(\psi_1)(\zeta)\, d\lambda\, d\zeta = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \widetilde{\Psi}_1(\zeta)\, d\zeta. \tag{56}$$

Отсюда в силу (48) получим:

$$\widetilde{\Psi}_1(t) - \widetilde{\Psi}_1(-t) + \beta \left(\widetilde{\Psi}_1(1+t) - \widetilde{\Psi}_1(1-t)\right) = 0, \tag{57}$$

$$\alpha \int_{-t}^{t} \widetilde{\Psi}_1(\zeta)\, d\zeta + \int_{1-t}^{1+t} \widetilde{\Psi}_1(\zeta)\, d\zeta = 0. \tag{58}$$

Дифференцируя (58), найдем $\alpha\left(\widetilde{\Psi}_1(t) + \widetilde{\Psi}_1(-t)\right) + \widetilde{\Psi}_1(1+t) + \widetilde{\Psi}_1(1-t) = 0$. Отсюда и из (57) получаем (53) и (54). □

Лемма 21. *Функция* $\widetilde{\Psi}_1(x) \in C^1(-\infty, \infty)$.

Доказательство. Формулы (53) и (54) дают однозначное продолжение $\widetilde{\Psi}_1(x)$ на всю ось с ее значений на $[0,1]$. По лемме 18 $\widetilde{\Psi}_1(x) \in C^1[0,1]$. Тогда по лемме 20 $\widetilde{\Psi}_1(x)$ непрерывно дифференцируема всюду, кроме, быть может, точек $x = n$, где n — целое. Для доказательства непрерывности $\widetilde{\Psi'}_1(x)$ в целых точках продифференцируем (53) и (54):

$$-\widetilde{\Psi'}_1(-x) = \frac{1}{1+\alpha\beta} \left[(1-\alpha\beta)\widetilde{\Psi'}_1(x) + 2\beta\widetilde{\Psi'}_1(1-x)\right], \tag{59}$$

$$\widetilde{\Psi'}_1(1+x) = \frac{1}{1+\alpha\beta} \left[-2\alpha\widetilde{\Psi'}_1(x) + (1-\alpha\beta)\widetilde{\Psi'}_1(1-x)\right]. \tag{60}$$

Так как по лемме 18 $\widetilde{\Psi}_1(x) = \psi_1(x)$ при $x \in [0,1]$ и $\psi'(0) = \psi'(1) = 0$, то из (59), (60) следует, что $\widetilde{\Psi'}_1(x)$ непрерывна в точках 0 и 1. Теперь, предполагая, что этот факт имеет место и для всех $x = -n, -n+1, \ldots, n+1$, по индукции из равенства (59), записанного для $x = (n+1) \pm 0$, получаем непрерывность $\widetilde{\Psi'}_1(x)$ при $x = -(n+1)$, а из (60), записанного в этих точках,– непрерывность $\widetilde{\Psi'}_1(x)$ при $x = n+2$. □

Теорема 9. *Функция $u_0(x,t)$ есть классическое решение эталонной задачи, определенной условиями* (47)*,* (48).

Доказательство. Из (56) по лемме 21 следует, что $u_0(x,t)$ удовлетворяет уравнению струны. Далее из (56) следует, что $u_0(x,0) = 0$, $u'_{0_t}(x,0) = \psi_1(x)$ при $x \in [0,1]$. Наконец, из (58) следует, что $\alpha u_0(0,t) + u_0(1,t) = 0$ и из (57) следует, что $u'_{0_x}(0,t) + \beta u'_{0_x}(1,t) = 0$. □

2.3. Классическое решение задачи (37)–(40)

Теорема 10. *Формальное решение $u(x,t)$ задачи* (37)–(40) *является классическим решением при $\psi(x) \in C^1[0,1]$ и выполнении условий* (41).

Доказательство. Для формального решения в силу формул (13) и (46) имеем представление (32), т. е.

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r}(R_\lambda\psi)\frac{\sin\rho t}{\rho}\,d\lambda - \sum_{n\geqslant n_0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_n}[v_1(x,\rho)(\psi_1,z_1)+v_2(x,\rho)(\psi_1,z_2)]\frac{\sin\rho t}{\rho}\,d\lambda-$$
$$-\sum_{n\geqslant n_0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_n}\frac{1}{\lambda-\mu_0}[v_1(x,\rho)(g,z_1)+v_2(x,\rho)(g,z_2)]\frac{\sin\rho t}{\rho}\,d\lambda. \qquad (61)$$

В силу оценок $v^{(j)}_{1,x^j}(x,\rho) = O(\rho^{j-1})$, $v^{(j)}_{2,x^j}(x,t) = O(\rho^j)$ $(j = 0,1)$, следующих из леммы 3, по леммам 8–10 получаем, что ряды в (61) и ряды, получающиеся из них почленным дифференцированием один раз по x и t, сходятся абсолютно и равномерно. Поэтому $u(x,t)$ удовлетворяет граничным условиям и условию $u(x,0) = 0$. Проверка условия $u'_t(x,0) = \psi(x)$ проводится так же, как и в доказательстве теоремы 6, учитывая при этом полноту системы с.п.ф. оператора L^*. Так же, как и в теореме 6, доказывается для $u(x,t)$ справедливость уравнения (37). □

Результаты В. П. Курдюмова получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект № 1.1520.2014K), результаты А. П. Хромова получены при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00238).

Библиографический список

1. *Стеклов В. А.* Основные задачи математической физики. М. : Наука, 1983. 432 с.
2. *Крылов А. Н.* О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах. М. ; Л. : ГИТТЛ, 1950. 368 с.
3. *Чернятин В. А.* Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1991. 112 с.
4. *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Резольвентный подход для волнового уравнения // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55, № 2. С. 51–63. DOI: 10.7868/S0044466915020052.
5. *Корнев В. В., Хромов А. П.* Резольвентный подход к методу Фурье в одной смешанной задаче для волнового уравнения // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55, № 4. С. 621–630. DOI: 10.7868/S0044466915040079.
6. *Корнев В. В., Хромов А. П.* Резольвентный подход в методе Фурье для волнового уравнения в несамосопряженном случае // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55, № 7. С. 1156–1167.
7. *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Смешанные задачи для гиперболических уравнений первого порядка с инволюцией // Докл. АН. 2011. Т. 441, № 2. С. 151–154.
8. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М. : Наука, 1971. 538 с.
9. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М. : Наука, 1969. 528 с.
10. *Расулов М. Л.* Метод контурного интеграла. М. : Наука, 1964. 462 с.
11. *Вагабов А. И.* Введение в спектральную теорию дифференциальных операторов. Ростов н/Д : Изд-во Рост. ун-та, 1994. 160 с.
12. *Марченко В. А.* Операторы Штурма – Лиувиля и их приложения. Киев : Наук. думка, 1977. 392 с.

Justification of Fourier Method in a Mixed Problem for Wave Equation with Non-zero Velocity

A. P. Gurevich[1], **V. P. Kurdyumov**[2], **A. P. Khromov**[3]

[1]Gurevich Alexandr Petrovich, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., Saratov, Russia, 410012, GurevichAP@mail.ru

[2]Kurdyumov Vitalii Pavlovich, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., Saratov, Russia, 410012, Kurdyumov47@yandex.ru

[3]Khromov Avgust Petrovich, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., Saratov, Russia, 410012, KhromovAP@info.sgu.ru

In the paper, using contour integration of the resolvent of the corresponding spectral problem operator, justification of Fourier method in two mixed problems for wave equation with trivial initial function and non-zero velocity is given. The boundary conditions of these problems, together with fixed endpoint conditions, embrace all cases of mixed problems with the same initial conditions for which the corresponding spectral operators in Fourier method have regular boundary conditions. The problems are considered under minimal requirements on initial data. A. N. Krylov's idea of accelerating Fourier series convergence is essentially employed.

Key words: Fourier method, formal solution, spectral problem, resolvent.

The results by V. P. Kurdyumov have been obtained in the framework of the national task of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (project no. 1.1520.2014K), the results by A. P. Khromov have been supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 13-01-00238).

References

1. Steklov V. A. *Osnovnye zadachi matematicheskoi fiziki* [The main tasks of mathematical physics]. Moscow, Nauka, 1983, 432 p. (in Russian).
2. Krylov A. N. *O nekotorykh differentsial'nykh uravneniiakh matematicheskoi fiziki, imeiushchikh prilozheniia v tekhnicheskikh voprosakh* [On some differential equations of mathematical physics with applications in technical matters]. Leningrad, GITTL, 1950, 368 p. (in Russian).
3. Chernyatin V. A. *Obosnovanie metoda Fur'e v smeshannoi zadache dlya uravnenii v chastnykh proizvodnykh* [Justification of the Fourier method in a mixed problem for partial differential equations]. Moscow, Moscow Univ. Press, 1991, 112 p. (in Russian).
4. Burlutskaya M. Sh., Khromov A. P. The resolvent approach for the wave equation. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2015, vol. 55, iss. 2, pp. 227–239. DOI: 10.1134/S0965542515020050.
5. Kornev V. V., Khromov A. P. Resolvent approach to the Fourier method in a mixed problem for the wave equation. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2015, vol. 55, iss. 4, pp. 618–627. DOI: 10.1134/S0965542515040077.
6. Kornev V. V., Khromov A. P. A resolvent approach in the Fourier method for the wave equation: The non-selfadjoint case. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2015, vol. 55, iss. 7, pp. 1138–1149. DOI: 10.1134/S0965542515070088.
7. Burlutskaya M. Sh., Khromov A. P. Initial-boundary value problems for first-order hyperbolic equations with involution. *Doklady Math.*, 2011, vol. 84, no. 3, pp. 783–786.
8. Kamke E. *Spravochnik po obyknovennym differentsial'nym uravneniiam* [Handbook of Ordinary Differential Equations]. Moscow, Nauka, 1971, 538 p. (in Russian).
9. Naimark M. A. *Linear Differential Operators*. New York, Ungar, 1967; Moscow, Nauka, 1969, 828 p.
10. Rasulov M. L. *Metod konturnogo integrala* [The method of the contour integral]. Moscow, Nauka, 1964, 462 p. (in Russian).
11. Vagabov A. I. *Vvedenie v spektral'nuiu teoriiu differentsial'nykh operatorov* [Introduction to the spectral theory of differential operators]. Rostov-on-Don, Rostov Univ. Press, 1994, 106 p. (in Russian).
12. Marchenko V. A. *Sturm – Liouville Operators and Applications*. Kiev, Naukova Dumka, 1977, 332 p. (in Russian).

УДК 517.54

О НОВОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА С УСЛОВИЕМ НА ЛУЧЕ В СЛУЧАЕ БЕСКОНЕЧНОГО ИНДЕКСА

Р. Б. Салимов

Салимов Расих Бахтигареевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики, Казанский государственный архитектурно-строительный университет, salimov.rsb@gmail.com

Для решения однородной краевой задачи Римана с бесконечным индексом и условием на луче предлагается новый подход, основанный на приведении рассматриваемой задачи к соответствующей задаче с условием на действительной оси и конечным индексом. Требуется определить функцию $\Phi(z)$, аналитическую и ограниченную в комплексной плоскости z, разрезанной по положительной действительной полуоси L^+, если выполняется краевое условие $\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t), t \in L^+$, где $\Phi^+(t)$, $\Phi^-(t)$ – предельные значения функции $\Phi(z)$, при $z \to t$ соответственно слева и справа, коэффициент $G(t)$ – заданная функция, для аргумента которой справедливо представление $\arg G(t) = \nu^- t^\rho + \nu(t)$, $t \in L^+$, здесь ν^-, ρ — заданные числа, $\nu^- > 0$, $1/2 < \rho < 1$, причём $\ln|G(t)|$, $\nu(t)$ — функции, удовлетворяющие условию Гёльдера. Принимается, что $G(t) = 1$ при $t \in (-\infty, 0)$. Для устранения бесконечного разрыва $\arg G(t)$ используются функции $E^+(z) = e^{(\alpha+i\beta)z^\rho}$, $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi$, $E^-(z) = e^{(\alpha-i\beta)z^\rho}$, $-\pi \leqslant \arg z \leqslant 0$, путём соответствующего подбора действительных чисел α, β.

Ключевые слова: краевая задача Римана, аналитическая функция, бесконечный индекс.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-1-29-33

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть D — область в плоскости комплексного переменного, границей которой служит L^+ — положительная часть действительной оси. Требуется определить функцию $\Phi(z)$, аналитическую и