УДК 622.4:536.21

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТЕПЛА В БЕСКОНЕЧНОМ ТВЕРДОМ ТЕЛЕ ОТ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ ПРИ КОНВЕКТИВНОМ ТЕПЛООБМЕНЕ

М. А. Осипенко, О. И. Дударь, Е. С. Дударь

Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
кафедра теоретической механики
E-mail: olegdudar@yandex.ru

Методом функций Грина в сочетании с преобразованием Лапласа получено решение задачи о распространении тепла в бесконечном твердом теле от движущегося в цилиндрической полости газа.

Ключевые слова: цилиндрическая полость, нестационарная теплопроводность, конвективный теплообмен, функция Грина, преобразование Лапласа, функции Бесселя и Неймана.

The Heat Conductivity in the Infinite Solid of the Convection in a Cylindrical Cavity

M. A. Osipenko, O. I. Dudar, E. S. Dudar

Perm National Research Politechnical University,
Department of Theoretical Mechanics
E-mail: olegdudar@yandex.ru

The problem of heat conductivity in the infinite solid from gas moving in a cylindrical cavity is solved by the combination of the Green function method and the Laplace transformation.

Key words: cylindrical cavity, nonstationary heat conductivity, convective heat transfer, Green's function, Laplace transformation, Bessel's and Neumann's functions.

ВВЕДЕНИЕ

Задача распространения тепла в бесконечном пространстве от движущегося в цилиндрической полости газа является одной из основных в горной теплофизике и теплофизике подземных сооружений. Ее решение позволяет рассчитывать тепловой режим горных выработок, тоннелей, метрополитенов и других подземных сооружений. H. S. Carslaw [1], А. Н. Щербань и О. А. Кремнев [2] получили решение данной задачи с помощью преобразования Лапласа для случая неизменной во времени температуры движущегося в полости газа. В работах А. С. Галицына и А. Н. Жуковского [3], а также А. С. Галицына [4] для получения решения использовалось модифицированное преобразование Вебера при произвольном законе изменения температуры движущегося в полости газа и произвольном начальном условии. А. Ф. Галкин и Ю. А. Хохолов [5] задачу решали численно в сопряженной постановке, то есть одновременно для твердой и газовой фаз.

В настоящей статье задача решена для случая произвольного изменения температуры движущегося в полости газа и произвольного начального условия, то есть в той же постановке, что и в работах [3, 4]. Однако для решения применялся метод функций Грина в сочетании с преобразованием Лапласа. Найденное решение позволило выявить допущенную в работе [4] неточность.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу передачи тепла от газа (воздуха), движущегося в цилиндрической полости, окружающему её бесконечному однородному изотропному твердому телу (горному массиву). Полагаем, что влияние осевой координаты отсутствует, поэтому изменение температуры в горном массиве описывается нестационарным уравнением теплопроводности, записанным в полярной системе координат:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right), \qquad r > r_0, \qquad t > 0, \tag{1}$$

где T — температура, a — коэффициент температуропроводности горного массива, r_0 — радиус полости.

Будем полагать, что в начальный момент времени температура в массиве с полостью является произвольной функцией радиуса

$$T|_{t=0} = T_0(r), \qquad r > r_0, \tag{2}$$

но при этом на бесконечности как в начальный, так и в любой другой момент времени она равна T_∞:

$$T_0|_{r\to\infty} = T_\infty, \qquad T|_{r\to\infty} = T_\infty, \tag{3}$$

где T_∞ — естественная температура горных пород, то есть температура пород при отсутствующей полости.

В качестве граничных условий примем условие конвективного теплообмена на стенке полости

$$\left(-\frac{\partial T}{\partial r}+h(T-T_a(t))\right)\Big|_{r=r_0}=0, \tag{4}$$

где $h=\alpha/\lambda$, α — коэффициент теплоотдачи, λ — коэффициент теплопроводности горного массива, $T_a(t)$ — закон изменения температуры воздуха в полости.

По аналогии с работами [1, 6, 7] решение задачи (1)–(4) можно записать с использованием функции Грина $g(r',r,t)$:

$$T(r,t)=T_\infty+ahr_0\int\limits_0^t g(r_0,r,t-\tau)[T_a(\tau)-T_\infty]d\tau+\int\limits_{r_0}^{\infty} g(r',r,t)[T_0(r')-T_\infty]r'dr'. \tag{5}$$

Тогда решение исходной задачи сводится к определению функции Грина, которая может быть найдена из решения следующей сопряженной задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial t}=a\dfrac{1}{r'}\dfrac{\partial}{\partial r'}\left(r'\dfrac{\partial g}{\partial r'}\right)+\dfrac{1}{r}\delta(r'-r)\delta(t), \quad r'>r_0,\ t\ge 0,\\ g|_{t=0}=0,\\ \left(-\dfrac{\partial g}{\partial r'}+hg\right)\Big|_{r'=r_0}=0,\\ g|_{r'\to\infty}=0, \end{cases} \tag{6}$$

здесь через δ обозначена дельта-функция Дирака.

Решение задачи в такой постановке позволяет не конкретизировать вид функций $T_0(r)$ и $T_a(t)$, входящих в начальное и граничное условия.

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИЗОБРАЖЕНИЯ ФУНКЦИИ ГРИНА

Применив к (6) преобразование Лапласа [8] по переменной t, получаем следующую задачу для изображения функции Грина $G(r',r,p)$:

$$\begin{cases} pG=a\dfrac{1}{r'}\dfrac{\partial}{\partial r'}\left(r'\dfrac{\partial G}{\partial r'}\right)+\dfrac{1}{r}\delta(r'-r), \quad r'>r_0,\\ \left(-\dfrac{\partial G}{\partial r'}+hG\right)\Big|_{r'=r_0}=0,\\ G|_{r'\to\infty}=0, \end{cases} \tag{7}$$

где p — комплексный параметр.

Вводя новые переменные

$$x=sr, \qquad x'=sr', \qquad x_0=sr_0, \qquad s=\sqrt{p/a}, \tag{8}$$

и учитывая в (7) дельта-функцию «явно», приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} x'^2\dfrac{\partial^2 G}{\partial x'^2}+x'\dfrac{\partial G}{\partial x'}-x'^2G=0, \quad |x_0|<|x'|<|x|,\ |x'|>|x|,\\ G|_{x'=x+0}-G|_{x'=x-0}=0,\\ \dfrac{\partial G}{\partial x'}\Big|_{x'=x+0}-\dfrac{\partial G}{\partial x'}\Big|_{x'=x-0}=-\dfrac{1}{ax},\\ \left(-\dfrac{\partial G}{\partial x'}+\dfrac{1}{s}hG\right)\Big|_{x'=x_0}=0,\\ G|_{x'\to\infty}=0. \end{cases} \tag{9}$$

Первое уравнение в системе (9) — это модифицированное уравнение Бесселя с индексом нуль. Его решение имеет вид [9, 10]:

$$G = \begin{cases} AI_0(x') + BK_0(x'), & |x_0| < |x'| < |x|, \\ CI_0(x') + DK_0(x'), & x'| > |x|, \end{cases}$$

где I_0, K_0 — функции нулевого порядка: модифицированная Бесселя и Макдональда соответственно.

Так как $I_0(x') \to \infty$ при $x' \to \infty$ [7], то из последнего уравнения системы (9) сразу следует, что $C = 0$. Далее, используя известные свойства рассматриваемых цилиндрических функций [11, 12]

$$I_0'(x) = I_1(x), \qquad K_0'(x) = -K_1(x),$$

где I_1, K_1 — функции первого порядка: модифицированная Бесселя и Макдональда соответственно, приходим к следующей системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных A, B, D:

$$\begin{cases} -AI_0(x) - BK_0(x) + DK_0(x) = 0, \\ -AI_1(x) + BK_1(x) - DK_1(x) = -\dfrac{1}{ax}, \\ A\left[-I_1(x_0) + (h/s)I_0(x_0)\right] + B\left[K_1(x_0) + (h/s)K_0(x_0)\right] = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Учитывая значение определителя Вронского [10]

$$I_0(x)K_1(x) + I_1(x)K_0(x) = \frac{1}{x},$$

решение системы (10) можем записать в виде

$$A = \frac{K_0(x)}{a}, \qquad B = A\frac{I_1(x_0) - (h/s)I_0(x_0)}{K_1(x_0) + (h/s)K_0(x_0)}, \qquad D = \frac{I_0(x)}{a} + B.$$

Возвращаясь к старым переменным, получим следующее решение для изображения функции Грина:

$$G(r', r, s) = \begin{cases} \dfrac{K_0(sr)[I_0(sr')K(sr_0) - K_0(sr')I(sr_0)]}{aK(sr_0)}, & r_0 < r' < r, \\ \dfrac{K_0(sr')[I_0(sr)K(sr_0) - K_0(sr)I(sr_0)]}{aK(sr_0)}, & r < r', \end{cases}$$

где $K(sr_0) = sK_1(sr_0) + hK_0(sr_0)$, $I(sr_0) = -sI_1(sr_0) + hI_0(sr_0)$. Если принять обозначения: $m = \min(r', r)$, $M = \max(r', r)$, то решение можно записать одной формулой

$$G(r', r, s) = \frac{K_0(sM)[I_0(sm)K(sr_0) - K_0(sm)I(sr_0)]}{aK(sr_0)}. \tag{11}$$

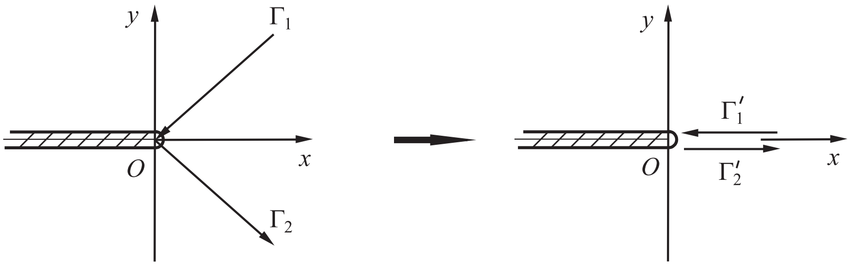
4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ФУНКЦИИ ГРИНА

Для определения оригинала по изображению (11) воспользуемся формулой обращения преобразования Лапласа [8]:

$$g(r', r, t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty} G(r', r, p)e^{pt}\,dp. \tag{12}$$

Функция $G(r', r, p)$ содержит корень и логарифм комплексного числа p. Следовательно, функция $G(r', r, p)$ многозначна и для нее выбираем такую ветвь, для которой при вещественных положительных p корень будет положителен, а логарифм вещественен.

В формуле (12) интеграл берется по мнимой оси. Чтобы привести его к более удобному виду, не содержащему комплексных чисел, перейдем к новой переменной интегрирования $\xi = \mp is = \mp i\sqrt{p/a}$, где нижний знак относится к нижней мнимой полуоси, а верхний — к верхней. При этом для переменной ξ нижняя полуось перейдет в полуось Γ_1, а верхняя — в полуось Γ_2 (рисунок).



Деформирование контура интегрирования Γ_1 и Γ_2 в контур Γ_1' и Γ_2'

По аналогии с работой [8] можно показать, что знаменатель функции $G(r', r, p)$ не имеет нулей, поэтому выбранная для $G(r', r, p)$ ветвь аналитична на всей комплексной плоскости за исключением начала координат с разрезом по отрицательной вещественной полуоси. Для аналитичной функции контуры Γ_1 и Γ_2 можно деформировать в контуры Γ_1', и Γ_2' (см. рисунок), делая тем самым ξ вещественным положительным числом. Тогда формулу (12) можно привести к виду

$$g(r', r, t) = -\frac{a}{\pi i}\left(\int\limits_{\infty}^{0} G(r', r, s)|_{s=-i\xi}\, e^{-a\xi^2 t}\xi d\xi + \int\limits_{0}^{\infty} G(r', r, s)|_{s=i\xi}\, e^{-a\xi^2 t}\xi d\xi\right). \qquad (13)$$

Подставив (11) в (13) и используя формулы связи [10–12]:

$$I_0(\pm ix) = J_0(x), \qquad I_1(\pm ix) = \pm iJ_1(x),$$
$$K_0(\pm ix) = \frac{i\pi}{2}[\mp J_0(x) + iN_0(x)], \qquad K_1(\pm ix) = \frac{\pi}{2}[-J_1(x) \pm iN_1(x)],$$

где x — вещественное положительное число, J_0, J_1 — функции Бесселя, а N_0, N_1 — функции Неймана нулевого и первого порядка соответственно, получим следующее выражение для оригинала:

$$g(r', r, t) = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{[N_0(\xi m)J(\xi r_0) - J_0(\xi m)N(\xi r_0)][N_0(\xi M)J(\xi r_0) - J_0(\xi M)N(\xi r_0)]}{J^2(\xi r_0) + N^2(\xi r_0)} e^{-a\xi^2 t}\xi d\xi, \qquad (14)$$

где $J(\xi r_0) = \xi J_1(\xi r_0) + hJ_0(\xi r_0)$, $N(\xi r_0) = \xi N_1(\xi r_0) + hN_0(\xi r_0)$.

Тем самым определена функция Грина для задачи (6). В частности, если принять $r' = r_0$, то $m = \min(r_0, r) = r_0$, $M = \max(r_0, r) = r$. Тогда, учитывая значение определителя Вронского [10]

$$N_0(x)J_1(x) - J_0(x)N_1(x) = \frac{2}{\pi x}, \qquad (15)$$

получим следующее выражение для функции Грина при условии $r' = r_0$:

$$g(r_0, r, t) = \frac{2}{\pi r_0}\int\limits_{0}^{\infty} \frac{N_0(\xi r)J(\xi r_0) - J_0(\xi r)N(\xi r_0)}{J^2(\xi r_0) + N^2(\xi r_0)} e^{-a\xi^2 t}\xi\, d\xi. \qquad (16)$$

Подставляя формулы (14) и (16) в (5) получим решение исходной задачи (1)–(4) распространения тепла в бесконечном горном массиве от движущегося в цилиндрической полости воздуха:

$$T(r, t) = T_\infty + \frac{2ah}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} \frac{N_0(\xi r)J(\xi r_0) - J_0(\xi r)N(\xi r_0)}{J^2(\xi r_0) + N^2(\xi r_0)}\left\{\int\limits_{0}^{t} e^{-a\xi^2(t-\tau)}\,[T_a(\tau) - T_\infty]\, d\tau\right\}\xi\, d\xi +$$
$$+\int\limits_{r_0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty} \frac{[N_0(\xi r')J(\xi r_0) - J_0(\xi r')N(\xi r_0)][N_0(\xi r)J(\xi r_0) - J_0(\xi r)N(\xi r_0)]}{J^2(\xi r_0) + N^2(\xi r_0)}\; e^{-a\xi^2 t}\xi\, d\xi[T_0(r') - T_\infty]r' dr'.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена задача о распространении тепла в бесконечном пространстве (горном массиве) от цилиндрической полости, по которой движется поток газа (воздуха). Методом функций Грина в сочетании с преобразованием Лапласа получено решение этой задачи при произвольном законе изменения температуры воздуха и произвольном начальном условии. Решение может быть использовано для расчета теплового режима подземных сооружений с формой, близкой к цилиндрической.

Библиографический список

1. *Carslaw H. S., Jaeger J. C.* Conduction of Heat in Solids. Oxford : Clarendon Press, 1959. 450 p.
2. *Щербань А. Н., Кремнев О. А.* Научные основы расчета и регулирования теплового режима глубоких шахт : в 2 т. Киев : Изд-во АН УССР, 1959. Т. 1. 425 с.
3. *Галицын А. С., Жуковский А. Н.* Интегральные преобразования и специальные функции в задачах теплопроводности. Киев : Наук. думка, 1976. 286 с.
4. *Галицын А. С.* Краевые задачи теплофизики подземных сооружений. Киев : Наук. думка, 1983. 236 с.
5. *Галкин А. Ф., Хохолов Ю. А.* Теплоаккумулирующие выработки. Новосибирск : ВО «Наука», 1992. 133 с.
6. *Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н.* Сборник задач по математической физике. М. : Физматлит, 2003. 688 с.
7. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М. : Изд-во МГУ, 1999. 798 с.
8. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М. : Наука, 1987. 688 с.
9. *Бицадзе А. В., Калиниченко Д. Ф.* Сборник задач по уравнениям математической физики. М. : Наука, 1985. 312 с.
10. *Коренев Б. Г.* Введение в теорию бесселевых функций. М. : Наука, 1971. 288 с.
11. *Никифоров А. Ф., Уваров В. Б.* Специальные функции математической физики. М. : Наука, 1984. 344 с.
12. *Попов Б. А., Теслер Г. С.* Вычисление функций на ЭВМ. Киев : Наук. думка, 1984. 600 с.

УДК 539.374

ВЛИЯНИЕ ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЯ НА ВИСКОЗИМЕТРИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА МЕЖДУ ЖЕСТКИМИ КОАКСИАЛЬНЫМИ ЦИЛИНДРАМИ

А. С. Устинова

Институт автоматики и процессов управления
Дальневосточного отделения РАН, Владивосток,
лаборатория механики деформируемого твердого тела
E-mail: ustinova@iacp.dvo.ru

Рассматривается вязкопластическое течение несжимаемого упруговязкопластического материала между двумя жесткими коаксиальными цилиндрическими поверхностями, когда на одной из них возможно проскальзывание материала. Решение строится в рамках модели больших упруговязкопластических деформаций. Рассмотрены обратимое деформирование, развитие и торможение вязкопластического течения, разгрузка и деформирование при повороте в обратном направлении. Получены законы движения границ областей вязкопластического течения.

Ключевые слова: упругость, вязкопластичность, большие деформации, остаточные напряжения.

Influence of Slipping on Viscosimetric Flow of a Elastoviscoplastic Material Between Rigid Coaxial Cylinders

A. S. Ustinova

Institute of Automation and Control Processes,
Far-Eastern Branch of RAS, Vladivostok,
Laboratory of a Deformable Solid Mechanics
E-mail: ustinova@iacp.dvo.ru

The viscoplastic flow of an incompressible elastoviscoplastic material between two rigid coaxial cylindrical surfaces is considered when slipping of a material is possible at one of them. The solution is constructed using the model of large elastoviscoplastic deformations. Reversible deformation, development and braking of a viscoplastic flow, unloading and deformation under rotation in the opposite direction are considered. Laws of movement of elastic-plastic boundaries are received.

Key words: elasticity, viscoplasticity, large deformations, residual stresses.

ВВЕДЕНИЕ

Вискозиметрические и прямолинейные течения неньютоновских материалов в рамках модели Шведова – Бингама рассматривались достаточно подробно [1–7]. Упругие свойства деформируемых материалов при этом не учитывались. В настоящее время представляет интерес исследование эффектов,