УДК 517.982.252+517.982.256

ПРОСТРАНСТВА МАЗУРА И 4.3-СВОЙСТВО ПЕРЕСЕЧЕНИЯ (BM)-ПРОСТРАНСТВ

А. Р. Алимов

Алимов Алексей Ростиславович, доктор физико-математических наук, научный сотрудник лаборатории вычислительных методов механико-математического факультета, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, alexey.alimov-msu@yandex.ru

Устанавливается ряд комбинаторно-геометрических свойств конечномерных (BM)-пространств. Такие пространства замечательны тем, что в них удается получить положительный ответ на ряд давно стоящих задач геометрической теории приближений, в частности, на вопрос о существовании непрерывных ε-выборок на солнца (множества Колмогорова) при всех $\varepsilon > 0$. Показано, что конечномерное полиэдральное (BM)-пространство является пространством Мазура, удовлетворяет 4.3-свойству пересечения, а его единичный шар является порождающим множеством (в смысле Половинкина – Балашова – Иванова).

Ключевые слова: (BM)-пространство, 4.3-свойство пересечения, пространство Мазура, множество Мазура, зонотоп, порождающее множество.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-2-133-137

При изучении связности солнц в линейных нормированных пространствах А. Л. Браун (A. L. Brown) [1] ввел класс (BM) линейных нормированных пространств. В таких пространствах оказывается возможным установить ряд нетривиальных геометрическо-топологических свойств солнц (см. [2]) и в том числе доказать существование непрерывных ε-выборок на них для любого $\varepsilon > 0$. В частности, известно, что в (BM)-пространстве любое ограниченно компактное солнце монотонно линейно связно [2]; более того, такое свойство характеризует полиэдральные конечномерные (BM)-пространства [3].

Ниже все пространства будут предполагаться действительными.

Напомним, что линейное нормированное пространство X называется (BM)-*пространством*, если

$$B(0,\|x\|) \cap \big(\mathrm{m}(x,y) \setminus \{x\}\big) \neq \varnothing, \quad \text{когда} \quad [x, x-y] \cap \mathring{B}(0,\|x\|) = \varnothing.$$

Здесь $\mathrm{m}(x,y)$ — пересечение всех замкнутых шаров, содержащих x и y (оболочка Банаха – Мазура, или шаровая оболочка точек x и y), $B(x,r)$ и $\mathring{B}(x,r)$ — соответственно замкнутый и открытый шары с центром x и радиусом r.

Класс(BM)-пространств содержит в себе все гладкие пространства, все двумерные пространства с полиэдральным единичным шаром, пространства $\ell^\infty(n)$, c_0, c, ℓ^∞, все замкнутые идеалы пространства $C(Q)$, все подрешетки $C(Q)$ с единицей, а также замкнут по отношению к формированию конечной ℓ^∞-прямой суммы [1] и бесконечной c_0-прямой суммы сепарабельных (BM)-пространств. (Если X_1, X_2 — линейные нормированные пространства, то ℓ^∞-прямой суммой X_1 и X_2 называется прямая сумма X_1 и X_2 с нормой $\|(x_1,x_2)\|_\infty = \max\big\{\|x_1\|_{X_1}, \|x_2\|_{X_2}\big\}$.) Строго выпуклое пространство лежит в классе (BM), если и только если оно гладкое. Любое двумерное пространство с полигональным шаром лежит в классе (BM). Известно, что ℓ^1, $\ell^1(n) \notin (BM)$, $n \geqslant 3$. Для более подробного ознакомления с результатами, упомянутыми выше, мы отсылаем читателя к обзору [2].

Напомним, что конечномерное пространство называется полиэдральным, если его единичная сфера содержит конечное число крайних точек.

Браун [1, 3] установил, что полиэдральные(BM)-пространства конечной размерности в точности являются ℓ^∞-прямыми суммами

$$X = X_1 \oplus_\infty \cdots \oplus_\infty X_r \tag{1}$$

конечного набора симметричных полиэдральных пространств $X_1, \ldots, X_r$ размерности 1 или 2. Браун [3] также получил характеризацию двумерных и трехмерных (BM)-пространств. Характеризация Брауна трехмерных (BM)-пространств записывается следующим образом:

$$X \text{ гладко или имеет вид } X = Y \oplus_\infty \mathbb{R}, \text{ где } Y \text{ — двумерное } (BM)\text{-пространство.} \tag{2}$$

Ниже мы устанавливаем ряд комбинаторно-геометрических свойства конечномерных (BM)-пространств.

Многогранник $P \subset \mathbb{R}^n$ называется *зонотопом*, если его можно представить в виде проекции куба $C_d \subset \mathbb{R}^d$ некоторой размерности. Зонотоп является центрально-симметричным многогранником, у которого все грани любой размерности центрально-симметричные. Хорошо известно, любой двумерный политоп P является зонотопом, если и только если P центрально-симметричен. Из этой характеризации и определения прямой суммы следует, что единичный шар конечномерного полиэдрального (BM)-пространства (полиэдрального пространства вида (1)) необходимо является зонотопом [3]. Как следствие, все грани единичного шара полиэдрального (BM)-пространства центрально-симметричные. (Этот факт, очевидно, перестает быть верным для неполиэдральных пространств.) Отсюда вытекает, в частности, что $\ell^1(n) \notin (BM)$, $n \geqslant 3$.

Замечание 1. Класс всех зонотопов не исчерпывается шарами полиэдральных пространств вида (1) (шарами полиэдральных (BM)-пространств). Действительно, хорошо известно, что в трехмерном случае существует в точности пять комбинаторно различных параллелоэдров: куб, центрально-симметричная шестиугольная призма, ромбододекаэдр, удлиненный додекаэдр и усеченный кубооктаэдр (многогранник $P \subset \mathbb{R}^d$ размерности d называется d-мерным *параллелоэдром*, если пространство $\mathbb{R}^d$ можно разбить на параллельные копии P, не пересекающиеся по внутренним точкам). В двумерном и трехмерном случаях любой параллелоэдр является зонотопом (однако это уже не так в случае размерности 4). Легко видеть, что указанные выше параллелоэдры (зонотопы) с номерами 3–5 не представляются в виде (1).

Также несложно убедиться в том, что шар полиэдрального пространства вида (1) не обязан являться параллелоэдром. Действительно, рассматривая в $\mathbb{R}^3$ шар, образованный $\oplus_\infty$-прямой суммой отрезка и произвольного центрально-симметричного многогранника, не замощающего плоскость, мы получаем шар полиэдрального (BM)-пространства, не являющийся параллелоэдром.

Пусть $n, k \in \mathbb{N}$, $n > k \geqslant 2$. Пространство X имеет *$n.k$-свойство пересечения* ($X \in (n.k.I.P)$), если для любого набора n замкнутых шаров $B(a_i, r_i)$, $i = 1, \dots, n$, таких, что $\cap_{r=1}^k B(a_{i_r}, a_{i_r}) \neq \varnothing$ при $1 \leqslant i_1 \leqslant \dots i_k \leqslant n$, пересечение $\cap_{i=1}^n B(a_i, r_i) \neq \varnothing$ также непусто. Данное понятие введено и исследовалось О. Лимой и независимо В. Г. Болтянским и П. С. Солтаном, которые получили ряд фундаментальных результатов о свойствах ($n.k$.I.P)-пространств. В последние годы наблюдается значительный интерес к ($n.k$.I.P)-пространствам в связи с вопросами минимального заполнения подмножеств банаховых пространств и оптимальными сетями (см., например, Б. Б. Беднов и П. А. Бородин [4], А. О. Иванов, А. А. Тужилин, З. Н. Овсянников и др.).

Согласно классической теореме Хелли из выпуклого анализа, если $\dim X = n$, то $X \in ((n+2).(n+1).I.P)$; как следствие, любое одно- или двумерное пространство лежит в классе $(4.3.I.P)$. Это влечет, что $\oplus_\infty$-прямая сумма таких пространств также обладает свойством $(4.3.I.P)$. Обратное утверждение установлено О. Лимой (Å. Lima; см. [5]), а также независимо В. Г. Болтянским и П. С. Солтаном [6, замечание 7.9] в терминах чисел Ханнера. Приведем соответствующий результат.

Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое тело и k — натуральное число. Тогда k-е число Ханнера $\beta_k(M)$ определяется следующим образом:

$$\beta_k(M) := \sup\{m \mid X \in (m.k.I.P)\},$$

где X — (полу)нормированное пространство, имеющее M своим (квази)шаром. В [6] показано, что если M компактно и $\beta_2(M) = \infty$, то M — параллелепипед. Более того, если M — выпуклое компактное центрально-симметричное тело и $\beta_3(M) = \infty$ (т. е. $X \in (\infty.3.I.P)$), то M представляется в виде (1) конечного набора пространств $X_1, \dots, X_r$ размерности 1 или 2.

Таким образом, если X конечномерно и полиэдрально, то

$$X \in (4.3.I.P) \iff X = X_1 \oplus_\infty \dots \oplus_\infty X_r,$$

где $\dim X_i \leqslant 2$. Отсюда с учетом (1) и (2) вытекает следующее утверждение.

Предложение 1. *Предположим, что X конечномерно и полиэдрально или $\dim X = 3$ и X негладко. Тогда следующие свойства эквивалентны: а) $X \in (BM)$; б) $X \in (4.3.I.P)$.*

Отсюда, с учетом того, что если $X \in (4.3.I.P)$, $\dim X < \infty$, то $X \in (\infty.3.I.P)$ (см., например, Болтянский, Мартини, Солтан [7, § VIII, теорема 5]), то мы приходим к следующему результату: если $X \in (BM)$ имеет конечную размерность и полиэдрально или $\dim X = 3$ и X негладко, то $X \in (\infty.3.I.P)$.

Замечание 2. Стоит упомянуть, что пространство $X = \ell^\infty(n)$ лежит в классе (BM) и удовлетворяет более сильному свойству пересечения $(4.2.I.P)$, причем пространства $X = \ell^\infty(n)$ в точности составляют класс конечномерных $(4.2.I.P)$-пространств (последнее утверждение установлено в [5]).

Замечание 3. Пространство $\mathbb{R}^3$ с евклидовой нормой лежит в классе (BM) (как гладкое пространство), но не удовлетворяет свойству пересечения $(4.3.I.P)$ (для доказательства этого достаточно рассмотреть четыре шара с центрами в вершинах правильной пирамиды).

Установим ещё одно свойство конечномерных (BM)-пространств.

Напомним, что замкнутое ограниченное выпуклое множество M называется *множеством Мазура* (см. [8, 9]), если выполняется следующее свойство отделимости: для любой гиперплоскости H, находящейся на положительном расстоянии от M, найдется шар B такой, что $M \subset B$ и $H \cap B = \varnothing$. Это определение эквивалентно тому, что если $f \in X^*$, $\sup f(M) < \lambda$, то найдется шар $B \supset M$ такой, что $\sup f(B) < \lambda$. Линейное нормированное пространство, в котором класс множеств Мазура совпадает с классом пересечений замкнутых шаров, называется *пространством Мазура* (такой класс пространств введен А. С. Гранеро (A. S. Granero) и Х. Морено (J. P. Moreno); см. [8, 9]) в честь Станислава Мазура, который первым установил (1933 г.), что любое замкнутое ограниченное выпуклое подмножество $\mathbb{R}^n$ можно представить в виде пересечения замкнутых евклидовых шаров.

Пространства Мазура естественно возникают в связи с вопросом об устойчивости пересечений выпуклых подмножеств линейных нормированных пространств. Классическими примерами пространств Мазура являются классические пространства $c_0(I)$, $\ell^\infty(I)$, $C(K)$, K — стоуновский хаусдорфов компакт, а также любое двумерное пространство (см. [8]). Класс пространств Мазура также включает в себя все рефлексивные пространства с дифференцируемой по Фреше нормой [9]. Известно, что $\ell^1(3)$ не является пространством Мазура. Легко проверяется, что $\oplus_\infty$-прямая сумма пространств Мазура является пространством Мазура.

Предложение 2. *В классе конечномерных полиэдральных пространств X следующие свойства эквивалентны: а) $X \in (BM)$; б) X является пространством Мазура.*

Доказательство предложения 2. Согласно следствию 4.2 из обзора [9] конечномерное полиэдральное пространство X является пространством Мазура, если и только если семейство $\mathscr{M}_X$ пересечений замкнутых шаров в X устойчиво — это означает по определению, что $\overline{C + D} \in \mathscr{M}_X$ (замыкание векторной суммы множеств C и D), если $C, D \in \mathscr{M}_X$. Далее [9, теорема 3.2], в конечномерном полиэдральном пространстве семейство $\mathscr{M}_X$ устойчиво, если и только если X представимо в виде (1) (или эквивалентно единичный шар X представляется как прямая сумма выпуклых многогранников размерности один или два). Теперь для окончания доказательства остается вспомнить, что конечномерные полиэдральные (BM)-пространства характеризуются свойством (1). $\square$

Следующий основной результат следует из предложений 1 и 2 и замечания 3.

Теорема. 1. *В классе конечномерных полиэдральных пространств X следующие свойства эквивалентны: а) $X \in (BM)$; б) X — пространство Мазура; в) $X \in (4.3.I.P)$.*

2. *Если $\dim X = 3$, то условия а) и б) эквивалентны, при этом ни одно из этих условий не влечет в).*

3. *Если $\dim X = 3$ и негладко, то условия а)–в) эквивалентны.*

Отметим, что в пп. 1, 2 пространство X не предполагается полиэдральным.

Замечание 4. Хорошо известно, что если норма $\|\cdot\|$ конечномерного банахова пространства дифференцируема, по Гато, в точке x, то она дифференцируема по Фреше в x. С учетом сказанного выше отсюда вытекает, что любое конечномерное гладкое пространство является пространством Мазура (а также (BM)-пространством).

Отметим связь между шарами (BM)-пространств и порождающими множествами. Выпуклое замкнутое множество $M \subset X$ называется *порождающим множеством* (см., например, [10]), если для любого множества $C \subset X$ такого, что множество $A = \cap_{c \in C}(M - c)$ непусто, существует выпуклое замкнутое множество $B \subset X$ такое, что замыкание (геометрической) суммы $A + B$ совпадает с M. Понятие порождающего множества было введено Е. С. Половинкиным и далее активно исследовалось в работах Г. Е. Иванова, М. В. Балашова, Р. Н. Карасева, Х. Морено, Р. Шнайдера и др. Название «порождающее» связано с тем, что каждое такое множество M порождает класс M-сильно выпуклых множеств, элементами которого являются множества, образованные всевозможными пересечениями сдвигов множества M. Известны некоторые классы порождающих множеств. К ним относятся эллипсоиды, надграфики квадратичных положительно определенных функций, плоские выпуклые замкнутые множества. Шар пространства $\ell^1(3)$ не является порождающим множеством. Полное описание порождающих множеств остается открытой проблемой [10, 11].

Напомним, что прямая сумма порождающих множеств является порождающим множеством [10, теорема 2.4]. Соответственно, если конечномерное полиэдральное X лежит в классе (BM), то его единичный шар представляется в виде (1) как прямая сумма одно- и двумерных многоугольников. Поэтому такое пространство имеет порождающий шар. С другой стороны, любое гладкое (по Гато) пространство является (BM)-пространством (см. [2]) и, значит, *не всякое гладкое (BM)-пространство имеет порождающий шар* — это следует, например, из известной характеризации Г. Е. Иванова гладких порождающих множеств [11].

Нами получен следующий результат.

Предложение 3. *Предположим, что $X \in (BM)$ конечномерно и полиэдрально или $\dim X = 3$ и X негладко. Тогда X имеет порождающий единичный шар.*

Следующий результат фактически содержится в [12, лемма 4.12].

Предложение 4. *Если пространство Мазура X рефлексивно, то единичный шар пространства X является порождающим множеством.*

Обратная импликация в предложении 4 неверна в общем случае: любое гладкое (по Гато) конечномерное пространство является пространством Мазура, но не все гладкие пространства (размерности $\geqslant 3$) обладают порождающим единичным шаром [11].

Замечание 5. В заключение отметим связь (полиэдральных конечномерных или негладких трехмерных) (BM)-пространств с известным неравенством Шнайдера об объемах проекционных тел [13]: согласно гипотезе Шнайдера (см., например, [13, § 7.4]) неравенство Шнайдера превращается в равенство в точности на пространствах вида (1), где $X_1, \dots, X_r$ — конечный набор банаховых пространств размерности 1 или 2 (т.е. на указанном выше классе (BM)-пространств).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00295).

Библиографический список

1. *Brown A. L.* Suns in normed linear spaces which are finite-dimensional // Math. Ann. 1987. Vol. 279. P. 87–101. DOI: 10.1007/BF01456192.
2. *Алимов А. Р., Царьков И. Г.* Связность и другие геометрические свойства солнц и чебышёвских множеств // Фунд. и прикл. матем. 2014. Т. 19, № 4. С. 21–91.
3. *Brown A. L.* Suns in polyhedral spaces // Seminar of Math. Analysis. Proceedings / eds. D. G. Álvarez, G. Lopez Acedo, R. V. Caro; Univ. Malaga and Seville (Spain), Sept. 2002 – Febr. 2003. Sevilla : Universidad de Sevilla, 2003. P. 139–146.
4. *Беднов Б. Б., Бородин П. А.* Банаховы пространства, реализующие минимальные заполнения // Матем. сб. 2014. Т. 205, № 4. С. 3–20.
5. *Hansen A. B., Lima Å.* The structure of finite dimensional Banach spaces with the 3.2. intersection property // Acta Math. 1981. Vol. 146. P. 1–23. DOI: 10.1007/BF02392457.

6. *Болтянский В. Г., Солтан П. С.* Комбинаторная геометрия и классы выпуклости // УМН. 1978. Т. 33, вып. 1 (199). С. 3–42. DOI: 10.1070/RM1978v033n01ABEH003730.
7. *Boltyanski V., Martini H., Soltan P. S.* Excursions into combinatorial geometry. Berlin : Springer, 1997. 422 p. DOI: 10.1007/978-3-642-59237-9.
8. *Granero A. S., Moreno J. P., Phelps R. R.* Mazur sets in normed spaces // Discrete Comput Geom. 2004. Vol. 31. P. 411–420. DOI: 10.1007/s00454-003-0808-5.
9. *Moreno J. P., Schneider R.* Intersection properties of polyhedral norms // Adv. Geom. 2007. Vol. 7, № 3. P. 391–402. DOI: 10.1515/ADVGEOM.2007.025.
10. *Балашов М. В., Половинкин Е. С.* M-сильно выпуклые подмножества и их порождающие множества // Матем. сб. 2000. Т. 191, № 1. С. 26. DOI: 10.4213/sm447.
11. *Иванов Г. Е.* Критерий гладких порождающих множеств // Матем. сб. 2007. Т. 198, № 3. С. 51–76. DOI: 10.4213/sm1481.
12. *Балашов М. В., Иванов Г. Е.* Слабо выпуклые и проксимально гладкие множества в банаховых пространствах // Изв. РАН. Сер. матем. 2009. Т. 73, № 3. С. 23–66. DOI: 10.4213/im2646.
13. *Schneider R.* Convex bodies : The Brunn – Minkowski theory. Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1993. DOI: 10.1017/CBO9780511526282.

Mazur Spaces and 4.3-intersection Property of (BM)-spaces

A. R. Alimov

Alexey R. Alimov, Moscow State University, Vorob'evy gory, 119899, Moscow, Russia, alexey.alimov-msu@yandex.ru

The paper puts forward some combinatorial and geometric properties of finite-dimensional (BM)-spaces. A remarkable property of such spaces is that in these spaces one succeeds in giving an answer to some long-standing problems of geometric approximation theory, and in particular, to the question on the existence of continuous ε-selections on suns (Kolmogorov sets) for all $\varepsilon > 0$. A finite-dimensional polyhedral (BM)-space is shown to be a Mazur space, satisfies the 4.3-intersection property, and its unit ball is proved to be a generating set (in the sense of Polovinkin, Balashov, and Ivanov).

Key words: (BM)-space, 4.3-intersection property, Mazur space, Mazur set, zonotope, generating set.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-01-00295).

References

1. Brown A. L. Suns in normed linear spaces which are finite-dimensional. *Math. Ann.*, 1987, vol. 279, pp. 87–101. DOI: 10.1007/BF01456192.
2. Alimov A. R., Tsar'kov I. G. Connectedness and other geometric properties of suns and Chebyshev sets. *Fund. prikl. matem.*, 2014, vol. 19, no. 4, pp. 21–91 (in Russian).
3. Brown A. L. Suns in polyhedral spaces. *Seminar of Mathem. Analysis*, Proceedings, eds.: D. G. Álvarez, G. Lopez Acedo, R. V. Caro, Univ. Malaga and Seville (Spain), Sept. 2002 – Feb. 2003. Universidad de Sevilla, Sevilla, 2003, pp. 139–146.
4. Bednov B. B., Borodin P. A. Banach spaces that realize minimal fillings. *Sb. Math.*, 2014, vol. 205, no. 4, pp. 3–20. DOI: 10.1070/SM2014v205n04ABEH004383.
5. Hansen A. B., Lima Å. The structure of finite dimensional Banach spaces with the 3.2. intersection property. *Acta Math.*, 1981, vol. 146, pp. 1–23. DOI: 10.1007/BF02392457.
6. Boltyanskii V. G., Soltan P. S. Combinatorial geometry and convexity classes. *Russian Math. Surveys*, 1978, vol. 33, no. 1 (199), pp. 1–45. DOI: 10.1070/RM1978v033n01ABEH003730.
7. Boltyanskii V., Martini H., Soltan P. S. *Excursions into Combinatorial Geometry*. Berlin, Springer, 1997, 422 p. DOI: 10.1007/978-3-642-59237-9.
8. Granero A. S., Moreno J. P., Phelps R. R. Mazur sets in normed spaces. *Discrete Comput Geom.*, 2004, vol. 31, pp. 411–420. DOI: 10.1007/s00454-003-0808-5.
9. Moreno J. P., Schneider R. Intersection properties of polyhedral norms. *Adv. Geom.*, 2007, vol. 7, no. 3, pp. 391–402. DOI: 10.1515/ADVGEOM.2007.025.
10. Balashov M. V., Polovinkin E. S. M-strongly convex subsets and their generating sets. *Sb. Math.*, 2000, vol. 191, no. 1, pp. 26–64. DOI: 10.1070/SM2000v191n01ABEH000447.
11. Ivanov G. E. A criterion of smooth generating sets. *Sb. Math.*, 2007, vol. 198, no. 3, pp. 343–368. DOI: 10.1070/SM2007v198n03ABEH003839.
12. Balashov M. V., Ivanov G. E. Weakly convex and proximally smooth sets in Banach spaces. *Izv. Math.*, 2009, vol. 73, no. 3, pp. 455–499. DOI: 10.1070/ IM2009v073n03ABEH002454.
13. Schneider R. *Convex Bodies : The Brunn – Minkowski Theory*. Cambridge, Cambridge University Press, 1993. DOI: 10.1017/CBO9780511526282.