series: coefficients criteria. *Studia Math.*, 2009, vol. 193, no. 3, pp. 285–306.

7. Moricz F. On Walsh series with coefficients tending monotonically to zero. *Acta Math. Hung.*, 1983, vol. 38, no. 1–4, pp. 183–189.

8. Timan M. F., Rubinstein A.I. On embedding of function classes defined on zero-dimensional groups. *Izvestiya vuzov. Matematika.* [Soviet Math.], 1980, no. 6, pp. 66–76 (in Russian).

9. Volosivets S. S. On certain conditions in the theory of series with respect to multiplicative systems. *Analysis Math.*, 2007, vol. 33, no. 3, pp. 227–246 (in Russian).

10. Volosivets S. S., Fadeev R. N. Estimates of best approximations in integral metrics and Fourier coefficients with respect to multiplicative systems. *Analysis Math.*, 2011, vol. 37, no. 3, pp. 215–238.

11. Askey R., Wainger S. Integrability theorems for Fourier series. *Duke Math. J.*, 1966, vol. 33, no. 2, pp. 223–228.

12. Vukolova T. M., Dyachenko M. I. On the properties of trigonometric series sums with monotone coefficients. *Vestnik Mosk. Universiteta. Ser. Matem. mech.*, 1994, no. 3, pp. 22–31 (in Russian).

13. Agaev G. N., Vilenkin N. Ya., Dzhafarli G. M., Rubinstein A. I. *Mul'tiplikativnye sistemy funkcii i garmonicheskii analiz na nul'-mernyh gruppah* [Multiplicative systems of functions and harmonic analysis on zero-dimensional groups]. Baku, Elm, 1980 (in Russian).

14. Hardy G. H., Littlewood J. E., Polya G. *Inequalities*. Cambridge, Cambridge University Press, 1934.

15. Leindler L. Inequalities of Hardy – Littlewood type. *Analysis Math.*, 1976, vol. 2, no. 2, pp. 117–123.

16. Leindler L. Generalization of inequalities of Hardy andf Littlewood. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 1970, vol. 31, no. 1–2, pp. 279–285.

17. Iofina T. V., Volosivets S. S. On the degree of approximation by means of Fourier – Vilenkin series in Hölder and L^p norm. *East J. Approximations.*, 2009, vol. 15, no. 2, pp. 143–158.

УДК 517.937, 517.983

О СОСТОЯНИЯХ ОБРАТИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В. Б. Диденко

Кандидат физико-математических наук, научный сотрудник кафедры математических методов исследования операций, Воронежский государственный университет, vladimir.didenko@gmail.com

Исследуемому линейному дифференциальному оператору (уравнению) с неограниченными периодическими операторными коэффициентами, действующему в одном из банаховых пространств векторных функций, определенных на всей оси, сопоставляется разностный оператор (разностное уравнение) с постоянным операторным коэффициентом, определенный в соответствующем банаховом пространстве двусторонних векторных последовательностей. Для дифференциального и разностного оператора доказаны утверждения о совпадении размерностей их ядер и кообразов, одновременной дополняемости ядер и образов, одновременной обратимости, получены утверждения о взаимосвязи спектров.

Ключевые слова: дифференциальные операторы, разностные операторы, состояния обратимости, спектр.

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается линейное дифференциальное уравнение

$$-\frac{dx}{dt} + A(t)x = f(t), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где $A(t) : D(A(t)) \subset X \to X$ — семейство линейных замкнутых операторов, действующих в комплексном банаховом пространстве X.

Предполагается корректная разрешимость задачи Коши [1]

$$x(s) = x_0 \in D(A(s)), \qquad s \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

для однородного дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \qquad t \geq s. \tag{3}$$

Она ведет к существованию семейства эволюционных операторов $\mathscr{U} : \Delta \to \operatorname{End} X$, где $\Delta = \{(t,s) \in \in \mathbb{R}^2 : s \le t\}$ и $\operatorname{End} X$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в X.

Определение 1. Отображение $\mathscr{U} : \Delta \to \operatorname{End} X$ называется *сильно непрерывным семейством эволюционных операторов («вперед»)*, если выполнены следующие условия:

1) $\mathscr{U}(t,t) = I$ — тождественный оператор для любого $t \in \mathbb{R}$;

2) $\mathscr{U}(t,s)\mathscr{U}(s,\tau) = \mathscr{U}(t,\tau)$ для всех $t \le s \le \tau$ из $\mathbb{R}$;

3) отображение $(t,s) \longmapsto \mathscr{U}(t,s)x : \Delta \to X$ непрерывно для любого $x \in X$;

4)существуют такие постоянные $M \ge 1$ и $\alpha \in \mathbb{R}$, что $\|\mathscr{U}(t,s)\| \le M \exp(\alpha(t-s))$, $(t,s) \in \Delta$.

Если для $\mathscr{U}$ выполняется условие периодичности

5) $\mathscr{U}(t+w, s+w) = \mathscr{U}(t,s)$ для всех (t,s) из Δ,

то семейство $\mathscr{U}$ называется *периодическим* периода w (*w-периодическим*).

Будем говорить, что семейство эволюционных операторов $\mathscr{U} : \Delta \to \operatorname{End} X$ *решает абстрактную задачу Коши* (2), (3), если для любого $s \in \mathbb{R}$ существует плотное в X подпространство X_s из $D(A(s))$ такое, что для каждого $x_0 \in X_s$ функция $x(t) = \mathscr{U}(t,s)x_0$ дифференцируема при всех $t \ge s$, $x(t) \in D(A(t))$, и выполнены равенства (2), (3). При наличии такого семейства эволюционных операторов $\mathscr{U}$ будем говорить, что *задача Коши корректно разрешима*.

Отметим, что если функция A из уравнений (1), (3) периодична периода w ($A(t+w) = A(t)$, $t \in \mathbb{R}$) и семейство $\mathscr{U}$ решает задачу Коши (2), (3), то семейство эволюционных операторов $\mathscr{U}$ также периодично (выполнено условие 5 из определения 1).

Если функция $f : \mathbb{R} \to X$ принадлежит линейному пространству $L^1_{loc}(\mathbb{R}, X)$ локально суммируемых измеримых по Бохнеру (классов) функций, определенных на $\mathbb{R}$ со значениями в X, то слабым решением уравнения (1) (при условии, что семейство $\mathscr{U}$ решает задачу Коши (2), (3)) называется любая непрерывная функция $x : \mathbb{R} \to X$, удовлетворяющая при всех $(t,s) \in \Delta$ равенствам

$$x(t) = \mathscr{U}(t,s)x(s) - \int\limits_s^t \mathscr{U}(t,\tau)f(\tau)\,d\tau. \tag{4}$$

В дальнейшем слово «слабое» будет опускаться.

В статье рассматриваются следующие функциональные пространства. Символом $C_b = C_b(\mathbb{R}, X)$ будем обозначать банахово пространство непрерывных и ограниченных на всей вещественной оси $\mathbb{R}$ функций, принимающих свои значения в пространстве X, с нормой, определяемой равенством $\|x\| = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\|$. Через $C_0(\mathbb{R}, X)$ обозначим замкнутое подпространство из $C_b(\mathbb{R}, X)$ функций, стремящихся к нулю на бесконечности. Символом $C_w = C_w(\mathbb{R}, X)$ будем обозначать замкнутое подпространство из $C_b(\mathbb{R}, X)$ периодических периода w функций. Через $L^p = L^p(\mathbb{R}, X)$, $p \in [1, \infty]$, обозначим банахово пространство измеримых по Бохнеру функций, действующих из $\mathbb{R}$ в X, для которых конечна величина (принимаемая за норму в соответствующем пространстве) $\|x\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} \|x(\tau)\|^p\,d\tau\right)^{1/p}$, $p \ne \infty$, $\|x\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{\tau\in\mathbb{R}} \|x(\tau)\|$, $p = \infty$. Символом $S^p(\mathbb{R}, X)$, $p \in [1, \infty)$, обозначим пространство Степанова локально суммируемых со степенью p измеримых на $\mathbb{R}$ со значениями в X функций, для которых конечна величина (принимаемая за норму) $\|x\|_{S^p} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \left(\int_0^1 \|x(s+t)\|^p\,ds\right)^{1/p}$. Через $L^p_w = L^p_w(\mathbb{R}, X)$, $p \in [1, \infty]$, обозначим банахово пространство измеримых по Бохнеру периодических периода w (классов) функций, действующих из $\mathbb{R}$ в X, для которых конечна величина (принимаемая за норму в соответствующем пространстве) $\|x\|_p = \left(\int_0^w \|x(\tau)\|^p\,d\tau\right)^{1/p}$, $p \ne \infty$, $\|x\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{\tau\in[0,w]} \|x(\tau)\|$, $p = \infty$. Отметим, что $L^p_w(\mathbb{R}, X)$, $p \in [1, \infty)$ — замкнутое подпространство в пространстве Степанова $S^p(\mathbb{R}, X)$.

Далее символом $\mathscr{F} = \mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$ обозначается одно из перечисленных выше пространств $L^p(\mathbb{R}, X)$, $p \in [1, \infty]$, $S^p(\mathbb{R}, X)$, $p \in [1, \infty)$, $C_b(\mathbb{R}, X)$, $C_0(\mathbb{R}, X)$, $L^p_w(\mathbb{R}, X)$, $p \in [1, \infty]$, $C_w(\mathbb{R}, X)$. Через $\mathscr{F}_w = \mathscr{F}_w(\mathbb{R}, X)$ обозначим пространства периодических функций $L^p_w(\mathbb{R}, X)$, $p \in [1, \infty]$, $C_w(\mathbb{R}, X)$. Символом $\widetilde{\mathscr{F}} = \widetilde{\mathscr{F}}(\mathbb{R}, X)$ будем обозначать пространства непериодических функций $L^p(\mathbb{R}, X)$, $p \in [1, \infty]$, $S^p(\mathbb{R}, X)$, $p \in [1, \infty)$, $C_b(\mathbb{R}, X)$, $C_0(\mathbb{R}, X)$.

Пусть $\mathscr{U} : \Delta \to \operatorname{End} X$ — семейство эволюционных операторов, обладающее описанными выше свойствами 1)–4) и не обязательно порожденное задачей Коши для дифференциального уравнения (3).

Определим линейный замкнутый оператор $\mathscr{L}_{\mathscr{U}} : D(\mathscr{L}_{\mathscr{U}}) \subset \mathscr{F}(\mathbb{R}, X) \to \mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$ по следующему правилу. Непрерывная функция x из $\mathscr{F}$ включается в область определения оператора $\mathscr{L}_{\mathscr{U}}$, если существует функция $f \in \mathscr{F}$ такая, что для пары функций (x, f) выполняются равенства (4). Функция f определяется однозначно, при этом полагается $\mathscr{L}_{\mathscr{U}} x = f$.

Отметим, что введенное определение для оператора $\mathscr{L}_{\mathscr{U}}$ применимо к произвольному(не обязательно периодическому) семейству $\mathscr{U} : \Delta \to \operatorname{End} X$, если $\mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$ совпадает с одним из банаховых пространств непериодических функций $\widetilde{\mathscr{F}}(\mathbb{R}, X)$. Для корректности его определения в пространствах периодических функций требуется свойство периодичности семейства $\mathscr{U}$.

Для рассматриваемого оператора $\mathscr{L}_{\mathscr{U}}$, построенного по периодическому семейству эволюционных операторов $\mathscr{U}$, получены необходимые и достаточные условия конечномерности ядра и кообраза, инъективности, сюръективности, дополняемости ядра и образа, непрерывной обратимости, фредгольмовости, получены формулы для обратного оператора, представление спектра.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Символом $S(t)$, $t \in \mathbb{R}$, обозначим изометрическую группу операторов сдвигов функций из $\mathscr{F}$, т. е.

$$(S(t)x)(s) = x(s+t), \qquad s, t \in \mathbb{R}, \qquad x \in \mathscr{F}.$$

Непосредственно из определения оператора $\mathscr{L}_{\mathscr{U}}$ вытекает следующая

Лемма 1. *Для любого $\tau \in \mathbb{R}$ оператор $S(\tau)\mathscr{L}_{\mathscr{U}} S(-\tau)$ совпадает с оператором $\mathscr{L}_{\widetilde{S}(\tau)\mathscr{U}}$, где семейство эволюционных операторов $\widetilde{S}(\tau)\mathscr{U}$ определяется по формуле*

$$(\widetilde{S}(\tau)\mathscr{U})(t, s) = \mathscr{U}(t+\tau, s+\tau), \qquad (t, s) \in \Delta, \qquad x \in \mathscr{F}.$$

Имеет место (вытекающая из леммы 1) следующая

Лемма 2. *Для того, чтобы оператор $\mathscr{L}_{\mathscr{U}} : D(\mathscr{L}_{\mathscr{U}}) \subset \widetilde{\mathscr{F}} \to \widetilde{\mathscr{F}}$ обладал свойством (перестановочности $\mathscr{L}_{\mathscr{U}}$ с $S(w)$)*

$$\mathscr{L}_{\mathscr{U}} S(w)x = S(w)\mathscr{L}_{\mathscr{U}} x, \qquad x \in D(\mathscr{L}_{\mathscr{U}}), \tag{5}$$

для некоторого числа $w > 0$, необходимо и достаточно, чтобы семейство $\mathscr{U}$ было периодическим периода w.

Оператор $\mathscr{L}_{\mathscr{U}}$, удовлетворяющий равенству (5), назовем *периодическим*. Оператор $\mathscr{L}_{\mathscr{U}}$, действующий в пространстве $\mathscr{F}_w(\mathbb{R}, X)$ периодических функций будем обозначать символом $\mathscr{L}_w$. В дальнейшем (за исключением теорем 1, 2) рассматривается оператор $\mathscr{L}_{\mathscr{U}}$, порожденный периодическим семейством эволюционных операторов.

По семейству $\mathscr{U}$ построим полугруппу операторов Хоулэнда $T_{\mathscr{U}} : \mathbb{R}_+ = [0, \infty) \to \operatorname{End} \mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$, определяя ее равенствами

$$(T_{\mathscr{U}}(t)x)(s) = \mathscr{U}(s, s-t)x(s-t), \qquad s \in \mathbb{R}, \qquad t \geq 0, \qquad x \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, X).$$

Полугруппа $T_{\mathscr{U}}$ была введена в рассмотрение Хоулэндом (J. S. Howland) [2] в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R}, X)$, где X — гильбертово пространство, при условии, что операторы $\mathscr{U}(t, s)$, $(t, s) \in \mathbb{R}$, унитарны. Следующие две теоремы позволяют использовать теорию полугрупп операторов, а также теорию разностных операторов.

Теорема 1 [3, 4]. *Оператор $\mathscr{L}_{\mathscr{U}}$ является генератором (инфинитезимальным оператором [5]) сильно непрерывной полугруппы $T_{\mathscr{U}}$ в любом из банаховых пространств $L^p(\mathbb{R}, X)$, $L^p_w(\mathbb{R}, X)$, $p \in [1, \infty)$, $C_0(\mathbb{R}, X)$, $C_w(\mathbb{R}, X)$.*

Пусть $A : D(A) \subset Y \to Y$ — линейный замкнутый оператор с областью определения $D(A)$ из комплексного банахова пространства Y. Он называется *непрерывно обратимым*, если его ядро $\operatorname{Ker} A = \{x \in D(A) : Ax = 0\}$ состоит только из нуля и образ $\operatorname{Im} A = \{Ax, x \in D(A)\}$ оператора A совпадает со всем пространством Y. По теореме Банаха о замкнутом графике оператор A непрерывно обратим тогда и только тогда, когда обратный оператор A^{-1} принадлежит банаховой алгебре $\operatorname{End} Y$.

Теорема 2. *Спектр $\sigma(\mathscr{L}_{\mathscr{U}})$ оператора $\mathscr{L}_{\mathscr{U}}$ и спектр $\{\sigma(T_{\mathscr{U}}(t))\}$ операторов $T_{\mathscr{U}}(t)$, $t > 0$, связаны соотношением*

$$\sigma(T_{\mathscr{U}}(t)) \backslash \{0\} = \exp(\sigma(\mathscr{L}_{\mathscr{U}})t) = \{\exp(\lambda t) : t \in \sigma(\mathscr{L}_{\mathscr{U}})\}.$$

В частности, оператор $\mathscr{L}_{\mathscr{U}}$ непрерывно обратим тогда и только тогда, когда обратим разностный оператор $\mathscr{D}_{\mathscr{U}} = I - T_{\mathscr{U}}(w)$, имеющий вид

$$(\mathscr{D}_{\mathscr{U}} x)(s) = x(s) - \mathscr{U}(s, s-w)x(s-w), \qquad x \in \mathscr{F}, \qquad s \in \mathbb{R}.$$

Важно отметить, что в теореме 2 отсутствуют ограничения на пространство $\mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$, которое может совпадать с одним из следующих пространств $C_b(\mathbb{R}, X)$, $C_0(\mathbb{R}, X)$, $L^p(\mathbb{R}, X)$, $p \in [1, \infty]$, $S^p(\mathbb{R}, X)$, $p \in [1, \infty)$. Теорема 2 была доказана в работе [4].

Лемма 3. *Следующие условия эквивалентны:*

1) *семейство $\mathscr{U}$ периодично с периодом w;*

2) *оператор $\mathscr{L}_{\mathscr{U}}$ периодичен с периодом $w > 0$;*

3) *операторы $T_{\mathscr{U}}(t)$, $t \geq 0$, перестановочны с оператором $S(w)$.*

Пространство двусторонних последовательностей $\mathscr{F}_d = \mathscr{F}(\mathbb{Z}, X)$ будем называть ассоциированным с пространством $\mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$, если оно совпадает с банаховым пространством последовательностей $l^p(\mathbb{Z}, X)$, суммируемых со степенью $1 \leq p < \infty$, в случае, когда $\mathscr{F}$ совпадает с пространством $\mathscr{L}^p$; совпадает с банаховым пространством ограниченных последовательностей $l^\infty(\mathbb{Z}, X)$ в случае, когда $\mathscr{F}$ совпадает с одним из пространств S^p, $1 < p < \infty$, $\mathscr{L}^\infty$ или C_b; совпадает с подпространством из $l^\infty(\mathbb{Z}, X)$ стремящихся к нулю на бесконечности последовательностей $c_0(\mathbb{Z}, X)$ в случае, когда $\mathscr{F}$ совпадает с C_0; совпадает с банаховым пространством $s(\mathbb{Z}, X)$ стационарных последовательностей, т. е. таких последовательностей x, что $x(n) = x(k)$, для всех $k, n \in \mathbb{Z}$, если $\mathscr{F}$ совпадает с одним из пространств периодических функций C_w или L^p_w. Пространство $s(\mathbb{Z}, X)$ изометрически изоморфно пространству X, поэтому в дальнейшем они будут отождествляться.

Введем в рассмотрение разностный оператор $\mathscr{D} : \mathscr{F}_d \to \mathscr{F}_d$, определяемый равенствами

$$(\mathscr{D} x_d)(n) = x_d(n) - \mathscr{U}(w, 0)x_d(n-1), \qquad x_d \in \mathscr{F}_d, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Замечание 1. Оператор $\mathscr{D}$ (при указаном выше отождествлении пространства $s(\mathbb{Z}, X)$ с X) для $\mathscr{F}_d = s(\mathbb{Z}, X)$ будет совпадать с оператором $I - \mathscr{U}(w, 0)$.

В статьях [3, 4] были доказаны следующие теоремы.

Теорема 3. *Оператор $\mathscr{L}_{\mathscr{U}}$, действующий в пространстве $\widetilde{\mathscr{F}}$, обратим тогда и только тогда, когда обратим разностный оператор $\mathscr{D} \in \operatorname{End} \mathscr{F}_d$.*

Теорема 4. *Спектр оператора $\mathscr{L}_{\mathscr{U}}$ в пространстве непериодических функций $\widetilde{\mathscr{F}}(\mathbb{R}, X)$ имеет вид*

$$\sigma(\mathscr{L}) = \{\lambda : \exp(\lambda w) \in \sigma(\mathscr{U}(w, 0))\mathbb{T}\} = \{\lambda : \exists \mu \in \sigma(\mathscr{U}(w, 0)) : |\mu| = |\exp(\lambda w)|\}.$$

В частности, оператор $\mathscr{L}_{\mathscr{U}}$ непрерывно обратим тогда и только тогда, когда выполнено условие $\sigma(\mathscr{U}(w, 0)) \cap \mathbb{T} = \emptyset$, где $\mathbb{T}$ — единичная окружность на комплексной плоскости.

Далее, всюду считается, что семейство эволюционных операторов $\mathscr{U}$ будет периодическим периода w.

Периодическую периода w сильно непрерывную функцию $\mathscr{P} : \mathbb{R} \to \operatorname{End} X$, $\mathscr{P}(t) = \mathscr{U}(t, t-w) - I$, $t \in \mathbb{R}$ назовем функцией Пуанкаре (в монографии [6] операторы $\mathscr{U}(t, t-w) - I$, $t \in \mathbb{R}$, назывались операторами Пуанкаре, а оператор $\mathscr{U}(w, 0)$ назывался оператором монодромии).

Теорема 5. *Следующие условия в пространстве $\mathscr{F}(\mathbb{R}, X) \in \{L^p(\mathbb{R}, X), C_b(\mathbb{R}, X)\}$ эквивалентны:*

1) *оператор $\mathscr{L}_{\mathscr{U}}$ непрерывно обратим;*

2) *$\sigma(\mathscr{U}(w, 0)) \cap \mathbb{T} = \emptyset$;*

3) *$\sigma(\mathscr{U}(t + w, t)) \cap \mathbb{T} = \emptyset$, $t \in \mathbb{R}$.*

Доказательство этой теоремы можно вывести как из основных результатов статьи, так и из статей [4, 7]. Важно отметить, что оператор $T_{\mathscr{U}}(w) \in \operatorname{End} \mathscr{F}_w(\mathbb{R}, X)$ имеет вид $(T_{\mathscr{U}}(w)x)(s) = \mathscr{U}(s, s-w)x(s)$, $s \in \mathbb{R}$, $x \in \mathscr{F}_w(\mathbb{R}, X)$, т. е. является оператором умножения на операторнозначную функцию $(\mathscr{P} + I)(s) = \mathscr{U}(s, s-w) = \mathscr{U}(s+w, s)$, $x \in \mathbb{R}$.

Определение 2. Пусть $A : D(A) \subset Y \to Y$ — замкнутый линейный оператор. Рассмотрим следующие условия:

1) $\operatorname{Ker} A = \{0\}$ (т. е. оператор A инъективен);

2) $1 \leq n = \dim \operatorname{Ker} A < \infty$;

3) $\operatorname{Ker} A$ — бесконечномерное подпространство из Y $(\dim \operatorname{Ker} A = \infty)$;

4) $\mathrm{Ker}\, A$ — дополняемое подпространство либо в $D(A)$ (с нормой графика), либо в Y;

5) $\overline{\mathrm{Im}\, A} = \mathrm{Im}\, A$, что эквивалентно положительности величины (минимального модуля оператора A)

$$\gamma(A) = \inf_{x \in D(A) \setminus \mathrm{Ker}\, A} \frac{\|Ax\|}{\mathrm{dist}(x, \mathrm{Ker}\, A)} = \inf_{y = Ax, x \notin \mathrm{Ker}\, A} \frac{\|y\|}{\mathrm{dist}(x, \mathrm{Ker}\, A)},$$

где $\mathrm{dist}(x, \mathrm{Ker}\, A) = \inf\limits_{x_0 \in \mathrm{Ker}\, A} \|x - x_0\|$;

6) оператор A корректен (равномерно инъективен), т. е. $\mathrm{Ker}\, A = \{0\}$ и $\gamma(A) > 0$;

7) $\mathrm{Im}\, A$ — замкнутое дополняемое в Y подпространство;

8) $\mathrm{Im}\, A$ — замкнутое подпространство из Y конечной коразмерности $\mathrm{codim}\, \mathrm{Im}\, A = m < \infty$;

9) $\mathrm{Im}\, A$ — замкнутое подпространство из Y бесконечной коразмерности;

10) $\mathrm{Im}\, A = Y$, т. е. A — сюръективный оператор;

11) $\overline{\mathrm{Im}\, A} \neq Y$;

12) оператор A непрерывно обратим.

Если для A выполнены все условия из совокупности условий $S = \{i_1, \ldots, i_k\}$, где $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le 12$, то будем говорить, что оператор A находится в состоянии обратимости S. Множество состояний обратимости оператора A обозначим символом $\mathrm{St}_{\mathrm{inv}}(A)$.

Согласно классификации спектра $\sigma(A)$ оператора A, принятой в [8], он представляется в виде $\sigma(A) = \sigma_d(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)$ взаимно непересекающихся трех множеств: *дискретного спектра* (совокупность собственных значений оператора A) $\sigma_d(A) = \{\lambda \in \sigma(A) : \mathrm{Ker}\, (A - \lambda I) \neq \{0\}\}$, *непрерывного спектра* $\sigma_c(A) = \{\lambda \in \sigma(A) \backslash \sigma_d(A) : \mathrm{Im}\, (A - \lambda I) \neq Y, \overline{\mathrm{Im}\, (A - \lambda I)} = Y\}$, *остаточного спектра* $\sigma_r(A) = \{\lambda \in \sigma(A) \backslash \sigma_d(A) : \overline{\mathrm{Im}\, (A - \lambda I)} \neq Y\}$. Таким образом, $\lambda \in \sigma_r(A) \Leftrightarrow \{1, 11\} \in \mathrm{St}_{\mathrm{inv}}(A - \lambda I)$, $\lambda \notin \sigma(A) \Leftrightarrow \{1, 10\} \in \mathrm{St}_{\mathrm{inv}}(A - \lambda I)$.

Далее используются

Определение 3. Будем говорить, что линейный оператор $A : D(A) \subset Y \to Y$ перестановочен с оператором $B \in \mathrm{End}\, Y$, если $BD(A) \subset D(A)$ и $ABx = BAx$ для любого $x \in D(A)$.

Определение 4. Два линейных оператора $A_1 : D(A_1) \subset Y \to Y$, $A_2 : D(A_2) \subset Z \to Z$, где Y, Z — банаховы пространства, называются *подобными*, если существует обратимый оператор $U \in Hom(Y, Z)$, где $Hom(Y, Z)$ — банахово пространство ограниченных операторов, действующих из Y в Z такой, что $UD(A_1) = D(A_2)$ и $A_2 U x = U A_1 x$, $x \in D(A_1)$. Оператор U называется оператором преобразования оператора A_1 в оператор A_2.

Непосредственно из определения 4 следует, что для подобных операторов A_1, A_2 имеют место равенства $U\mathrm{Ker}\, A_1 = \mathrm{Ker}\, A_2$ и $\mathrm{Im}\, A_2 = U\mathrm{Im}\, A_1$. Поэтому имеет место

Лемма 4. *Если $A_i : D(A_i) \subset Y \to Y$, $i = 1, 2$, — подобные операторы, то* $\mathrm{St}_{\mathrm{inv}}(A_1) = \mathrm{St}_{\mathrm{inv}}(A_2)$.

Следствие 1. *Если $A_1 : D(A_1) \subset Y \to Y$, $A_2 : D(A_2) \subset Z \to Z$ — подобные операторы, то* $\sigma(A_1) = \sigma(A_2)$.

Замечание 2. Из леммы 1 следует, что операторы $\mathscr{L}_{\mathscr{U}}$ и $\mathscr{L}_{\widetilde{S}(\tau)\mathscr{U}}$ подобны и, значит, из леммы 4 вытекает, что множества их состояний обратимости совпадают.

Определение 5. Линейный замкнутый оператор $A : D(A) \subset X \to X$ называется *фредгольмовым*, если его ядро $\mathrm{Ker}\, A$ конечномерно, образ $\mathrm{Im}\, A$ замкнут и имеет конечную коразмерность. Число $\mathrm{ind}\, A = \dim \mathrm{Ker}\, A - \mathrm{codim}\, A$ называется *индексом* фредгольмова оператора A. Оператор A называется *полуфредгольмовым*, если он находится в одном из состояний $\{2, 7, 9\}$ или $\{3, 4, 8\}$.

Следующие две теоремы содержат основные результаты статьи.

Теорема 6. *Для операторов $\mathscr{L}_{\mathscr{U}}$ и $\mathscr{D}_{\mathscr{U}}$ имеет место равенство их состояний обратимости*

$$\mathrm{St}_{\mathrm{inv}}(\mathscr{L}_{\mathscr{U}}) = \mathrm{St}_{\mathrm{inv}}(\mathscr{D}_{\mathscr{U}}).$$

В частности, оператор $\mathscr{L}_{\mathscr{U}}$ фредгольмов (полуфредгольмов) тогда и только тогда, когда фредгольмовым (полуфредгольмовым) является оператор $\mathscr{D}_{\mathscr{U}}$, их индексы совпадают: $\mathrm{ind}\, \mathscr{L}_{\mathscr{U}} = \mathrm{ind}\, \mathscr{D}_{\mathscr{U}}$, $\dim \mathrm{Ker}\, \mathscr{L}_{\mathscr{U}} = \dim \mathrm{Ker}\, \mathscr{D}_{\mathscr{U}}$, $\mathrm{codim}\, \mathrm{Im}\, \mathscr{L}_{\mathscr{U}} = \mathrm{codim}\, \mathrm{Im}\, \mathscr{D}_{\mathscr{U}}$.

Отметим что в случае, когда эволюционное семейство $\mathscr{U}$ может быть продолжено на множество $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ с сохранением свойств 1)–5), результаты теоремы 6 могут быть получены из статей [9] и [10].

Теорема 7. *Для оператора $\mathscr{L}_w$ справедливы следующие равенства:*

$$\mathrm{St}_{\mathrm{inv}}(\mathscr{L}_w) = \mathrm{St}_{\mathrm{inv}}(I - \mathscr{U}(w,0)) = \mathrm{St}_{\mathrm{inv}}(\mathscr{P}(t)),\ t \in [0,w).$$

В частности, оператор $\mathscr{L}_w$ фредгольмов (полуфредгольмов) тогда и только тогда, когда фредгольмовым (полуфредгольмовым) является один из операторов $\mathscr{P}(t)$, $t \in [0,w]$ (и, следовательно, все эти операторы будут фредгольмовы), их индексы совпадают: $\operatorname{ind}\mathscr{L}_w = \operatorname{ind}\mathscr{P}(t)$, $\dim\operatorname{Ker}\mathscr{L}_w = \dim\operatorname{Ker}\mathscr{P}(t)$, $\operatorname{codim}\operatorname{Im}\mathscr{L}_w = \operatorname{codim}\operatorname{Im}\mathscr{P}(t)$.

Замечание 3. Из равенств (4), определяющих оператор $\mathscr{L}_{\mathscr{U}}$, следует, что для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ оператор $\mathscr{L}_{\mathscr{U}} - \lambda I$ задается (с помощью тех же равенств) по семейству эволюционных операторов $\mathscr{U}_\lambda : \Delta \to \operatorname{End} X$ вида

$$\mathscr{U}_\lambda(t,s) = \exp(\lambda(t-s))\mathscr{U}(t,s), \qquad (t,s) \in \Delta.$$

Из сделанного замечания и теоремы 7 следует

Теорема 8. *Пусть $\mathscr{F}_w = \mathscr{F}_w(\mathbb{R},X) \in \{C_w,\, L^p_w,\, p \in [1,\infty]\}$. Тогда для полугруппы операторов $T_{\mathscr{U}} : \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End}\mathscr{F}_w$ имеют места равенства*

$$\begin{gathered}\sigma(T_{\mathscr{U}}(w))\backslash\{0\} = \sigma(\mathscr{U}(w,0))\backslash\{0\} = \sigma(\mathscr{U}(t+w,t))\backslash\{0\}, \qquad t \in [0,w), \\ \exp(\sigma(\mathscr{L}_w)) = \{\exp(\lambda) : \lambda \in \sigma(\mathscr{L}_w)\} = \sigma(\mathscr{U}(w,0))\backslash\{0\}.\end{gathered} \tag{6}$$

Равенства $\sigma(\mathscr{U}(w,0))\backslash\{0\} = \sigma(\mathscr{U}(t+w,t))\backslash\{0\}$ были получены в монографии [6, лемма 7.2.2].

Из равенств (6) следует, что экспоненциальная устойчивость решений дифференциального уравнения (3) имеет место тогда и только тогда, когда спектральный радиус $r(\mathscr{U}(w,0))$ оператора монодромии $\mathscr{U}(w,0)$ меньше единицы.

Определение 6. Будем говорить, что эволюционное семейство $\mathscr{U} : \Delta \to \mathrm{End}X$ из алгебры $\mathrm{End}X$ допускает *экспоненциальную дихотомию* на $\mathbb{R}$ с показателем $\beta > 0$ и коэффициентом $M > 0$, если существует ограниченная сильно непрерывная проекторозначная функция P такая, что

1) $\mathscr{U}(t,s)P(s) = P(t)\mathscr{U}(t,s)$ при $t \geq s$;

2) $\|\mathscr{U}(t,s)P(s)\| \leq M\exp(-\beta(t-s))$ при $t \geq s$;

3) при $t \geq s$ сужение $\mathscr{U}(t,s)|\operatorname{Im}Q(s)$ оператора $\mathscr{U}(t,s)$ на образ $\operatorname{Im}Q(s)$ проектора $Q(s) = I - P(s)$ является изоморфизмом подпространств $\operatorname{Im}Q(s)$ и $\operatorname{Im}Q(t)$;

4) $\|\mathscr{U}(t,s)Q(s)\| \leq M\exp(\beta(t-s))$ при $s \geq t$.

Теорема 9. *Оператор $\mathscr{L}_{\mathscr{U}}$ непрерывно обратим тогда и только тогда, когда непрерывно обратимым является оператор $\mathscr{D}$. Обратный оператор в пространстве непериодических функций может быть представлен в виде*

$$(\mathscr{L}_{\mathscr{U}}^{-1}f)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} G(t,s)f(s)\,ds, \qquad t \in \mathbb{R},$$

где функция (Грина) $G : \mathbb{R}^2 \to \operatorname{End} X$ имеет вид

$$G(t,s) = \begin{cases} -\mathscr{U}(t,s)P(s), & s \leq t, \\ \mathscr{U}(t,s)Q(s), & s > t, \end{cases}$$

а проекторы $P(s)$, $Q(s)$, $s \in \mathbb{R}$, можно найти по формулам

$$\begin{gathered}P(s) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{T}} (\gamma I - \mathscr{U}(s,s-w))^{-1}d\gamma, \qquad s \in \mathbb{R}, \\ Q(s) = I - P(s), \qquad s \in \mathbb{R},\end{gathered} \tag{7}$$

где $\mathscr{U}(t,s)x = \mathscr{U}^{-1}(s,t)x$ для всех $x \in \operatorname{Im}Q(s)$, $s > t$. *Под $\mathscr{U}^{-1}(s,t)x$ понимается значение обратного оператора к сужению $\mathscr{U}(s,t)|\operatorname{Im}Q(t)$ (которое является изоморфизмом пространств $\operatorname{Im}Q(t)$ и $\operatorname{Im}Q(s)$) на векторе x.*

В этой теореме новым является представление проекторнозначной функции P в виде (7).

Теорема 10. *Для обратимости оператора* $\mathscr{L}_w : D(\mathscr{L}_w) \subset \mathscr{F}_w \to \mathscr{F}_w$ *необходимо и достаточно, чтобы был обратим оператор Пуанкаре* $\mathscr{P}(w) = \mathscr{U}(w, 0) - I$. *Если он обратим, то обратный к* $\mathscr{L}_w$ *оператор определяется формулой*

$$(\mathscr{L}_w^{-1})(t) = \int_0^w G(t,\tau) f(\tau) d\tau, \qquad f \in \mathscr{F}_w, \tag{8}$$

где функция Грина $G : [0, w] \times [0, w] \to \operatorname{End} X$ *имеет вид*

$$G(t,\tau) = \begin{cases} \mathscr{P}(t)^{-1} \mathscr{U}(t,\tau), & 0 \le \tau \le t \le w, \\ \mathscr{P}(t)^{-1} \mathscr{U}(t, \tau - w), & t < \tau \le w. \end{cases}$$

Отметим, что формула для обратного оператора была приведена в [11].

Используя интегральные представления обратного оператора в виде (8), можно получить оценки обратного оператора $\mathscr{L}_w^{-1}$ в разных функциональных пространствах. Отметим, что по аналогии со статьями А. И. Перова [12, 13] можно получить условия разрешимости нелинейных уравнений с периодическими коэффициентами.

Пусть $A(t) \equiv A : D(A) \subset X \to X$ — генератор(инфинитезимальный оператор [5]) сильно непрерывной полугруппы операторов $T : \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End} X$. Тогда соответствующее семейство эволюционных операторов $\mathscr{U} : \Delta \to \operatorname{End} X$ представимо в виде $\mathscr{U}(t, \tau) = T(t - \tau)$, $t, \tau \in \mathbb{R}$, $\tau \le t$. Поэтому оператор монодромии $\mathscr{U}(w, 0)$ совпадает с оператором $T(w)$, а операторная функция Пуанкаре $\mathscr{P} : \mathbb{R} \to \operatorname{End} X$ является постоянной функцией $\mathscr{P}(t) \equiv T(w) - I$, $t \in \mathbb{R}$. В этом случае функция Грина приобретает вид

$$G(t,\tau) = \begin{cases} (T(w) - I)^{-1} T(t - \tau), & 0 \le \tau \le t \le w, \\ (T(w) - I)^{-1} T(t - \tau + w), & t < \tau \le w. \end{cases}$$

Полученные результаты позволяют использовать теорию разностных операторов при исследовании линейных параболических дифференциальных операторов с переменными периодическими коэффициентами и, следовательно, для дифференциальных операторов с частными производными. Например, к рассматриваемым операторам относятся примеры из статей [14, 15], если дополнительно потребовать периодичность коэффициентов.

Отметим, что полученные в работе результаты могут быть распространены на дифференциальные операторы с периодическими коэффициентами, определенных в пространстве функций на полуоси, при этом используются результаты статей [14–19].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проекты* № 13-01-00378, № 14-01-31196).

Библиографический список

1. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М. : Наука, 1967. 464 с.
2. *Howland J. S.* Stationary scattering theory for time-dependent Hamiltonians // Math. Ann. 1974. Vol. 207, № 4. P. 315–335.
3. *Баскаков А. Г.* Спектральный анализ линейных дифференциальных операторов и полугруппы разностных операторов // Докл. РАН, 1995. Т. 343, № 3. С. 295–298.
4. *Баскаков А. Г.* Полугруппы разностных операторов в спектральном анализе линейных дифференциальных операторов // Функц. анализ и его прил. 1996. Т. 30, № 3. С. 1–11.
5. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. М. : Изд-во иностр. лит., 1962. 830 с.
6. *Хенри Л.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М. : Мир, 1985.
7. *Баскаков А. Г., Пастухов А. И.* Спектральный анализ оператора взвешенного сдвига с неограниченными операторными коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 6. С. 1231–1243.
8. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы : в 3 т. Т. 1. Общая теория. М .: Изд-во иностр. лит., 1962. 896 с.
9. *Диденко В. Б.* О спектральных свойствах дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, определяемых линейным отношением // Мат. заметки. 2011. Т. 89, № 2. С. 226–240.
10. *Диденко В. Б.* О непрерывной обратимости и фредгольмовости дифференциальных операторов с многозначными импульсными воздействиями. // Изв. РАН. Сер. математическая. 2013. Т. 77, № 1. С. 5–22.
11. *Баскаков А. Г., Кобычев К. С.* Оценки оператора вложения пространства Соболева периодических функ-

ций и оценки решений дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // Дифференциальные уравнения, 2011. Т. 47, № 5. С. 611–620.
12. *Перов А. И.* Частотные признаки существования ограниченных решений // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43, № 7. С. 896–904.
13. *Перов А. И.* Частотные методы в теории ограниченных решений нелинейных дифференциальных уравнений n-го порядка (существование, почти периодичность, устойчивость) // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48, № 5. С. 663–673.
14. *Баскаков А. Г.* О корректности линейных дифференциальных операторов // Мат. сб. 1999. Т. 190, № 3. С. 3–28.
15. *Баскаков А. Г.* Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений // УМН. 2013. Т. 68, № 1. С. 77–128.
16. *Баскаков А. Г.* Линейные дифференциальные операторы с неограниченными операторными коэффициентами и полугруппы разностных операторов // Мат. заметки. 1996. Т. 59, № 6. С. 811–820.
17. *Баскаков А. Г.* Спектральный анализ дифференциальных операторов и полугруппы разностных операторов I. // Дифференциальные уравнения. 1997. Т. 33, № 10. С. 1299–1306.
18. *Баскаков А. Г.* Спектральный анализ дифференциальных операторов и полугруппы разностных операторов II. // Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37, № 1. С. 3–11.
19. *Баскаков А. Г., Синтяев Ю. Н.* Разностные операторы в исследовании дифференциальных операторов; оценки решений // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46, № 2. С. 1–10.

About Reversibility States of Linear Differential Operators with Periodic Unbounded Operator Coefficients

V. B. Didenko

Voronezh State University, 1, Universitetskaya pl., 394006, Voronezh, Russia, vladimir.didenko@gmail.com

For investigated linear differential operator (equation) with unbounded periodic operator coefficients defined at one of the Banach space of vector functions defined on all real axis difference operator (equation) with constant operator coefficient defined at appropriate Banach space of two-side vector sequences is considered. For differential and difference operators propositions about kernel and co-image dimensions coincidence, simultaneous complementarity of kernels and images, simultaneous reversibility, spectrum interrelation are proved.

Key words: differential operators, difference operators, reversibility states, spectrum.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 13-01-00378, *no.* 14-01-31196).

References

1. Krein S. G. *Linear Differential Equations in Banach Space*. American Math. Soc., 1971. 390 p.
2. Howland J . S. Stationary scattering theory for time-dependent Hamiltonians. *Math. Ann.*, 1974, vol. 207, no. 4., pp. 315–335.
3. Baskakov A. G. Spectral analysis of linear differential operators and semi-groups of difference operators. *Doklady Mathematics*, 1995, vol. 343, no. 3, pp. 295–298 (in Russian).
4. Baskakov A. G. Semigroups of difference operators in spectral analysis of linear differential operators. *Functional Analysis and Its Applications*, 1996, vol. 30, no. 3, pp. 149–157. DOI: 10.1007/BF02509501.
5. Hille E., Phillips R. S. *Functional Analysis and Semi-groups*. American Math. Soc., 1957, 808 p.
6. Henry D. *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*. Springer, 1993. 350 p.
7. Baskakov A. G., Pastukhov A. I. Spectral Analysis of a Weighted Shift Operator with Unbounded Operator Coefficients. *Siberian Math. J.*, 2001, vol. 42, no. 6, pp. 1026–1036. DOI: 10.1023/A:1012832208161.
8. Dunford N., Schwartz J. T. *Linear Operators: General theory*. Interscience Publishers, 1958. 2592 p.
9. Didenko V. B. On the spectral properties of differential operators with unbounded operator coefficients determined by a linear relation. *Math. Notes*, 2011, vol. 89, no. 2, pp. 224–237. DOI: 10.1134/S0001434611010287.
10. Didenko V. B. On the continuous invertibility and the Fredholm property of differential operators with multi-valued impulse effects. *Izvestiya : Mathematics*, 2013, vol. 77, no. 1, pp. 3–19. DOI: 10.1070/IM2013v077n01ABEH002626.
11. Baskakov A. G., Kobychev K. S. Estimates for the embedding operator of a sobolev space of periodic functions and for the solutions of differential equations with periodic coefficients. *Differential Equations*, 2011, vol. 47, no. 5, pp. 609–619. DOI: 10.1134/S0012266111050016.
12. Perov A. I. Frequency tests for the existence of boundary solutions. *Differential Equations*, 2007, vol. 43, no. 7, pp. 916–924. DOI: 10.1134/S001226610707004X.
13. Perov A. I. Frequency methods in the theory of boun-

ded solutions of nonlinear n^{th}-order differential equations (existence, almost periodicity, and stability). *Differential Equations*, 2012, vol. 48, no. 5, pp. 670–680. DOI: 10.1134/S0012266112050059.

14. Baskakov A. G. On correct linear differential operators. *Sbornik : Mathematics*, 1999, vol. 190, no. 3, pp. 323–348. DOI: 10.1070/SM1999v190n03ABEH000390.

15. Baskakov A. G. Analysis of linear differential equations by methods of the spectral theory of difference operators and linear relations. *Russian Math. Surv.*, 2013, vol. 68, no. 1, pp. 69–116. DOI: RM2013v068n01ABEH004822.

16. Baskakov A. G. Linear differential operators with unbounded operator coefficients and semigroups of bounded operators. *Math. Notes*, 1996, vol. 59, no. 6, pp. 586–593. DOI: 10.1007/BF02307207.

17. Baskakov A. G. Spectral analysis of differential operators and semi-groups of difference operators I. *Differential Equations*, 1996, vol. 33, no. 10, pp. 1299–1306 (in Russian).

18. Baskakov A. G. Spectral analysis of differential operators and semi-groups of difference operators II. *Differential Equations*, 2001, vol. 37, no. 1, pp. 1–10. DOI: 10.1023/A:1019298028556.

19. Baskakov A. G., Sintyaev Yu. N. Finite-difference operators in the study of differential operators: Solution estimates. *Differential Equations*, 2010, vol. 46, no. 2, pp. 214–223. DOI: 10.1134/S0012266110020072.

УДК 517.5

ОДИН ОТРИЦАТЕЛЬНЫЙ ПРИМЕР ФОРМОСОХРАНЯЮЩЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

М. Г. Плешаков[1], С. В. Тышкевич[2]

[1]Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций и приближений, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, pleshakovmg@mail.ru

[2]Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций и приближений, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, tyszkiewicz@yandex.ru

Пусть даны $2s$ точек y_i: $-\pi \le y_{2s} < \ldots < y_1 < \pi$. Отправляясь от этих точек, определим точки y_i для всех целых i при помощи равенства $y_i = y_{i+2s} + 2\pi$. Будем писать $f \in \triangle^{(1)}(Y)$, если $f(x)$ — 2π-периодическая непрерывная функция и $f(x)$ не убывает на $[y_i, y_{i-1}]$, если i нечетное; $f(x)$ не возрастает на $[y_i, y_{i-1}]$, если i четное. Обозначим через $E_n^{(1)}(f;Y)$ величину наилучшего равномерного приближения функции $f \in \triangle^{(1)}(Y)$ тригонометрическими полиномами из того же множества $\triangle^{(1)}(Y)$. В статье доказан следующий контрпример формосохраняющего приближения.

Пример. Для любых $k \in \mathbb{N}$, $k > 2$, и $n \in \mathbb{N}$ существует функция $f(x) := f(x; s, Y, n, k)$ такая, что $f \in \triangle^{(1)}(Y)$ и

$$E_n^{(1)}(f;Y) > B_Y n^{\frac{k}{2}-1} \omega_k \left(f; \frac{1}{n}\right),$$

где $B_Y =$const, зависит только от Y и k; ω_k — модуль непрерывности порядка k функции f.

Ключевые слова: тригонометрические полиномы, аппроксимация полиномами, формосохранение.

Получение оценки уклонения при равномерном приближении непрерывных функций алгебраическими многочленами и тригонометрическими полиномами является одной из основных задач в теории приближения функций. Наиболее широкое применение в теоретических исследованиях и в прикладных областях математики получили неравенства типа Джексона – Зигмунда – Стечкина [1–3], Никольского – Тимана – Дзядыка – Фройда – Теляковского – Брудного [4–9]. Особый интерес представляет случай, когда приближение является формосохраняющим (Shape-preserving Approximation), т. е. когда аппарат приближения сохраняет некоторые свойства приближаемой функции (монотонность, выпуклость и т. д.). В 1969 г. G. G. Lorentz и K. L. Zeller [10] построили пример, который показывает, что величина наилучшего монотонного приближения алгебраическими многочленами монотонной функции по порядку, вообще говоря, «хуже» величины наилучшего приближения без ограничений. В работах И. А. Шевчука [11] и А. С. Шведова [12, 13] построены примеры, показывающие, что оценки типа Джексона – Стечкина величины приближения монотонной функции монотонными многочленами через модуль непрерывности порядка 3 и выше вообще неверны, в отличие от приближения без ограничений.

Однако результаты по комонотонному приближению периодических функций тригонометрическими полиномами, за исключением результата, полученного G. G. Lorentz и K. L. Zeller 1968 г. и касающегося так называемых «колоколообразных» функций, долгое время не были известны.