Работа выполнена в рамках Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (XLI очередь мероприятия 1.2.1, технические науки, номер заявки в информационной компьютеризированной системе 2012-1.2.1-12-000-2013-064).

Библиографический список

1. *Frank O., Tsoukleri G., Parthenios J., Papagelis K., Riaz I., Jalil R., Novoselov K. S.* Compression Behavior of Single-Layer Graphenes // ACS Nano. 2010. Vol. 4. P. 3131–3138.

2. *Neek-Amal M., Peeters F. M.* Graphene nano ribbons subjected to axial stress // Phys. Rev. Ser. B. 2010. Vol. 82, iss. 8. P. 085432–085437.

3. *Lu Q., Gao W., Huang R.* Atomistic simulation and continuum modeling of graphene nanoribbons under uniaxial tension // Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering. 2011. Vol. 19, № 5. P. 054006–054022.

4. *Neek-Amal M., Peeters F. M.* Nanoindentation of a circular sheet of bilayer graphene // Phys. Rev. Ser. B. 2010. Vol. 81, iss. 23. P. 235421–235426.

5. *Zhang Y. Y., Wang C. M., Cheng Y., Xiang Y.* Mechanical properties of bilayer graphene sheets coupled by sp3 bonding // Carbon. 2011. Vol. 49, iss. 13. P. 4511–4517.

УДК 539.374

ТОЧНО СОХРАНЯЮЩИЕСЯ ИНВАРИАНТЫ СВЯЗАННОГО МИКРОПОЛЯРНОГО ТЕРМОУПРУГОГО ПОЛЯ

В. А. Ковалев, Ю. Н. Радаев*

Московский городской университет управления Правительства Москвы
E-mail: vlad_koval@mail.ru
*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва
E-mail: radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com

Теория микрополярной термоупругости рассматривается как ковариантная физическая теория поля. Получены 4-ковариантные уравнения нелинейного гиперболического микрополярного термоупругого континуума с «нежестким» репером локальных поворотов. Исследования по чисто упругому микрополярному континууму восходят к известной работе Э. Коссера и Ф. Коссера 1909 г. Задается естественная плотность термоупругого действия (естественная плотность лагранжиана), вариационный интегральный функционал и сформулирован соответствующий принцип наименьшего термоупругого действия. Наряду с дифференциальными уравнениями поля, дается вывод определяющих уравнений микрополярного термоупругого континуума, выступающих при теоретико-полевом подходе просто как *сокращенные обозначения* для канонических полевых производных. Теоретико-полевая концепция позволяет также сформулировать *связанные* уравнения гиперболической микрополярной термоупругости с уравнением транспорта тепла гиперболического аналитического типа. В случае плоского 4-пространства–времени вариационные симметрии интегрального функционала термоупругого действия используются для построения ряда канонических тензоров и законов сохранения связанного микрополярного термоупругого поля. В настоящей статье с помощью вариационных симметрий, соответствующих трансляциям и вращениям плоского 4-пространства–времени определены компоненты канонического тензора энергии–импульса и углового импульса; сформулированы законы сохранения полной энергии, канонического импульса и канонического углового импульса поля. Канонический угловой импульс поля в качестве составляющей включает момент рефе-

On Precisely Conserved Quantities of Coupled Micropolar Thermoelastic Field

V. A. Kovalev, Yu. N. Radayev

The paper is devoted to the 4-covariant formulation in four-dimensional space–time of dynamics of non-linear hyperbolic micropolar thermoelastic continuum. Theory of micropolar continuum are due to E. Cosserat and F. Cosserat and their study of 1909. The complement microdeformations and microrotations of an element are described by a non-rigid trihedron (the case of deformable micropolar directors). Hyperbolic micropolar type-II thermoelastic continuum is considered as a physical field theory with the action density taking account of wave nature of heat transport (the second sound phenomenon in solids) according to the Green&Naghdi type-II model. The principle of the least action for a micropolar thermoelastic field is formulated. The canonical Euler–Lagrange field equations are derived from the principle of least action. These equations include a hyperbolic heat transport equation. Currents corresponding 4-translations and 4-rotations of the four-dimensional space–time are obtained. The 4-covariant representations are rewritten in three-dimensional forms as usual for continuum mechanics. The currents are required in order to formulate conservation laws particularly the conservation of energy. The latter may be represented as path- or surface-independent integrals known from the continuum mechanics and often used in applied problems. Regular explicit covariant formulae for the field current are obtained provided the symmetry ренциального градиента температурного смещения с множителем пропорциональности, равным плотности энтропии. Установлены соответствующие точно сохраняющиеся инварианты, ассоциированные с полем, в том числе полные канонический импульс и канонический угловой импульс поля.

Ключевые слова: термоупругость, микрополярность, поле, действие, ковариантность, закон сохранения, тензор энергии–импульса, тензор углового импульса.

group of the variational action functional is known. Explicit covariant formulae for the canonical energy-momentum and angular momentum tensors are also given. Precisely conserved quantities (among them the total canonical angular momentum) for a micropolar thermoelastic field are discussed.

Key words: thermoelasticity, micropolar continuum, field, action, covariance, conservation law, energy–momentum tensor, angular momentum tensor.

1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Под термином «термоупругость» обычно понимается весьма широкий спектр явлений, таких как теплопроводность, термические напряжения, связанные термоупругие деформации, затухание тепловых и упругих импульсов в твердых телах, и наиболее интересное с прикладной точки зрения явление — гиперболические тепловые волны «второго звука» в деформируемых твердых телах. Эксперименты, проведенные в разные годы различными научными школами, подтверждают вывод о том, что тепло при определенных условиях может распространяться как незатухающая гиперболическая волна «второго звука». Например, надежно подтверждается экспериментально существование волн «второго звука» в висмуте (Bi) при температуре около 3 К. С чисто теоретической точки зрения гиперболическую термоупругость следует рассматривать как одну из важнейших составляющих современной термомеханики и, поскольку некоторые из математических моделей термоупругости допускают теоретико-полевую формулировку, — классической теории поля.

В настоящее время все больший интерес привлекают модели теплопроводности твердых деформируемых тел с микроструктурой и, в частности, с дополнительными степенями свободы, проявляющимися, например, как совместные локальные вращения элементов, составляющих тело. Возможная волновая природа транспорта тепла также представляет собой актуальную проблему и является предметом многочисленных исследований. Волновая (и в этом смысле гиперболическая) трактовка процессов распространения тепла требует привлечения принципов и формализма теории поля [1]. Понятие о физическом поле в отчетливой форме встречается в научных работах Дж. К. Максвелла и с тех пор теория поля развивается как одно из важнейших направлений теоретической и математической физики. Различные физические теории поля часто облекались в своеобразный математический формализм. Так, Максвелл сформулировал уравнения электромагнитного поля в терминах теории кватернионов.

Многие разделы современной теоретической физики и механики (механика сплошных сред, теория упругости, гидродинамика, гиперболическая термоупругость, электродинамика сплошных сред, общая и частная теория относительности) излагаются на языке и в рамках формализма теории поля. Исторически теория поля строилась как логическое продолжение механики континуума. Решающим преимуществом теоретико-полевого подхода в механике и физике является возможность вывода *ковариантных* дифференциальных уравнений поля из единственного вариационного принципа, который обычно называется принципом наименьшего действия (или принципом Гамильтона–Остроградского). Таким образом, математически физическое поле описывается с помощью интегрального функционала действия, из которого потом можно извлечь стандартными методами физически приемлемые дифференциальные уравнения поля, сохраняющиеся величины и токи, включая энергию, импульс и угловой импульс.

Стандартные теории поля (см., например, [2]) развиваются на базе трехмерного евклидова пространства и независимого абсолютного времени. Более общая задача состоит в том, чтобы выработать ковариантную формулировку всех классических физических теорий на основе пространственно-временного многообразия Минковского (или искривленного риманова пространства–времени). Лагранжианы всех наиболее важных физических теорий поля таковы, что соответствующие функционалы действия (взятые в пределах ограниченных, но в остальном неспецифицированных, областей пространства–времени) инвариантны при определенных непрерывных изменениях полевых переменных и пространственно-временных координат. Такие изменения в каждом отдельном случае, как правило, образуют группу геометрических преобразований, которая называется группой инвариантности поля или вариационной симметрией поля. С вариационными симметриями поля тесно связаны инварианты группы симметрий поля и симметрии дифференциальных уравнений поля.

Теория континуума с дополнительными (помимо трансляционных) ротационными степенями свободы и моментными напряжениями была создана в 1909 г. Э. Коссера и Ф. Коссера [3]. Исторически теоретико-полевой метод оказался весьма важным и эффективным инструментом вывода уравнений микрополярного упругого континуума, поскольку обеспечивал возможность отхода от традиционного пути представления внутренних напряжений симметричным тензором напряжений Коши. Указанный подход, благодаря своим очевидным преимуществам, использовался, например, в статье [4]. В этой статье принцип наименьшего действия был положен в основу математической модели континуума с микроструктурой, определяемой «нежестким» репером локальных поворотов, вывода дифференциальных уравнений микрополярного поля в форме соответствующих функционалу действия уравнений Эйлера–Лагранжа и определяющих уравнений, а также построения полевых скаляров и тензоров, таких как энергия, импульс и угловой импульс.

В публикациях [5–10] методами теории поля в рамках схемы «конечных» деформаций и локальных поворотов формулируется связанная модель микрополярного термоупругого континуума с «жестким» трехгранником, ассоциированным с элементом.

В настоящей работе в рамках теоретико-полевого подхода получены дифференциальные уравнения связанного микрополярного термоупругого поля как уравнения Эйлера–Лагранжа для интегрального функционала термоупругого действия и необходимые определяющие уравнения. При этом репер локальных поворотов микрополярного континуума, образованный тремя единичными директорами, предполагается «нежестким». Теория вариационных функционалов, инвариантных относительно групп преобразований пространственно-временных координат и физических полей, восходящая к одной из самых ярких работ по математической физике XX столетия [11], применяется для вывода канонического тензора энергии–импульса и канонического углового импульса поля. Сформулированы законы сохранения энергии, канонического импульса и канонического углового импульса. Устанавливается, что канонический угловой импульс поля включает в качестве составляющей момент референциального градиента температурного смещения с множителем пропорциональности, равным плотности энтропии. Указаны соответствующие точно сохраняющиеся инварианты поля, в том числе полный канонический угловой импульс поля.

В статье используются терминология и обозначения, принятые в монографиях [1, 6]. Компактность изложения также достигается интенсивным использованием результатов, включенных в упомянутые монографии.

2. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Наиболее фундаментальное положение теории поля состоит в том, что физическое поле математически описывается интегральным функционалом действия Im:

$$\mathrm{Im} = \int \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \ldots, X^\beta) d^4X, \tag{1}$$

где $\mathcal{L}$ — плотность действия (лагранжиан); φ^k — упорядоченный набор физических полевых величин, число которых предполагается конечным; X^β $(\beta = 1, 2, 3, 4)$ — пространственно-временные координаты; $X^4 = ct$ (константа c имеет смысл характерной скорости и ее можно положить равной единице); d^4X — «естественный» элемент объема пространства–времени. Область интегрирования 4-пространства в (1), в пределах которой изменяются пространственно-временные координаты X^1, X^2, X^3, X^4, неспецифицирована и в принципе, как принято в теоретико-полевом подходе, в этом не нуждается.

Под символом d^4X в (1) мы понимаем неинвариантный «естественный» пространственно-временной элемент объема, представляющий собой произведение дифференциалов пространственно-временных координат: $d^4X = dX^1 dX^2 dX^3 dX^4$.

Как это принято в современном вариационном исчислении, через ∂_β в представлении действия (1) и далее обозначается оператор *полного* дифференцирования по пространственно-временной координате X^β:

$$\partial_\beta = \partial_\beta^{\exp l} + \sum_{s\geq 0} \left(\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_s}\partial_\beta\varphi^l\right) \frac{\partial}{\partial(\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_s}\varphi^l)},$$

где по повторяющимся индексам производится суммирование, $\partial_\beta^{\exp l}$ — оператор частного дифференцирования по *явному* вхождению переменной X^β.

Математическое описание физического поля основывается на вариационном принципе, который по соображениям исторического характера называется в современной научной литературе вариационным принципом Гамильтона–Остроградского (или принципом наименьшего действия). Этот принцип утверждает, что действительное поле реализуется в пространстве–времени таким образом, что действие оказывается экстремальным, т. е. первая вариация действия обращается в нуль для всех допустимых вариаций физических полей φ^k: $\delta\,\mathrm{Im} = 0$. Здесь не подвергаются варьированию пространственно-временные координаты X^β и 4-область интегрирования.

Из принципа наименьшего действия получаются дифференциальные уравнения поля в форме классических уравнений Эйлера–Лагранжа:

$$\mathcal{E}_k(\mathcal{L}) = 0, \tag{2}$$

где

$$\mathcal{E}_k(\mathcal{L}) \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^k} - \partial_\beta\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)} + \partial_\gamma\partial_\beta\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\gamma\partial_\beta\varphi^k)} - \cdots$$

есть важнейший дифференциальный оператор математической физики — оператор Эйлера.

Принцип наименьшего действия Гамильтона–Остроградского, являющийся фундаментальным для теории поля, указывает на тесную связь физических теорий поля с дифференциальной геометрией искривленных пространств Римана, вариационным исчислением, теорией групп преобразований, вариационных симметрий и законов сохранения для систем дифференциальных уравнений в частных производных.

Дивергентный закон сохранения является обобщением известного из теории обыкновенных дифференциальных уравнений понятия первого интеграла и всегда имеет форму дивергентного дифференциального соотношения:

$$\partial_\beta J^\beta = 0, \tag{3}$$

где $J^\beta(\varphi^k, \partial_\alpha\varphi^k, \partial_\gamma\partial_\alpha\varphi^k, \ldots, X^\mu)$ — 1-контравариантный пространственно-временной 4-вектор, которое должно удовлетворяться для любого решения уравнений поля (2).

Вектор J^β — дифференциальная функция, зависящая от градиентов полевых переменных, наивысший порядок которых на единицу меньшего порядка уравнений поля. В теории поля вектор J^β обычно называется вектором тока. Теория Нетер [11] позволяет эффективно вычислять вектор тока J^β, если известна геометрическая группа преобразований, относительно которой функционал действия инвариантен.

На основании (3) нетрудно заключить, что поток контравариантного 4-вектора J^β через любую поверхность, замкнутую в пространстве–времени, равен нулю

$$\oint\limits_{\partial} J^\beta d\Sigma_\beta = 0, \tag{4}$$

где через $d\Sigma_\beta$ обозначается ориентированный элемент замкнутой поверхности ∂, ограничивающей область 4-пространства–времени. В случае плоского пространства–времени из каждого соотношения (4) может быть получен инвариант существующего в неограниченной среде поля, не изменяющий своего значения с течением времени, т. е. точно сохраняющийся; говоря конкретнее, интеграл по неограниченному 3-пространству:

$$\int J^4 d^3X \tag{5}$$

не зависит от времени и поэтому является точно сохраняющимся инвариантом поля.

3. МИКРОПОЛЯРНЫЙ КОНТИНУУМ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПОЛЯ И ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ

В микрополярных теориях «конечная» деформация тела, представляемая геометрическим преобразованием

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$$

положения $\mathbf{X}$ отсчетной конфигурации в соответствующее актуальное место $\mathbf{x}$, сопровождается дополнительной деформацией, описываемой искажениями геометрии системы трех директоров $\underset{\mathfrak{a}}{\mathbf{d}}$ $(\mathfrak{a} = 1, 2, 3)$, связанных с микроэлементом: $\underset{\mathfrak{a}}{\mathbf{d}} = \underset{\mathfrak{a}}{\mathbf{d}}(\mathbf{X}, t)$.

Движение репера $\underset{\mathfrak{a}}{\mathbf{d}}$ $(\mathfrak{a} = 1, 2, 3)$ характеризуется его возможной деформацией (сдвиги трехгранника и удлинения его ребер) и «жестким» поворотом. Таким образом, каждый элемент континуума обладает большим, по сравнению с тремя трансляционными, числом степеней свободы. С дополнительными степенями свободы, которыми наделяется микроэлемент, связаны и дополнительная инерция, импульс, кинетическое и деформационное действие. Ясно, что связывание с материальной точкой трехгранника $\underset{\mathfrak{a}}{\mathbf{d}}$ $(\mathfrak{a} = 1, 2, 3)$ наделяет сплошную среду полярностью. В настоящее время такого рода континуумы принято называть также микрополярными.

В оригинальной работе Э. Коссера и Ф. Коссера [2] движение репера $\underset{\mathfrak{a}}{\mathbf{d}}$ $(\mathfrak{a} = 1, 2, 3)$ предполагалось «жестким», следовательно, помимо трех трансляционных степеней свободы, микроэлемент континуума Коссера обладает лишь тремя дополнительными ротационными степенями свободы.

Возможность только «жесткой» трансформации репера $\underset{\mathfrak{a}}{\mathbf{d}}$ $(\mathfrak{a} = 1, 2, 3)$ в процессе деформации континуума можно выразить уравнениями

$$g_{ij}\underset{\mathfrak{a}}{d^i}\underset{\mathfrak{b}}{d^j} = \underset{\mathfrak{ab}}{\delta} \qquad (\mathfrak{a}, \mathfrak{b} = 1, 2, 3),$$

которые, очевидно, имеют смысл дополнительных ограничений кинематического типа, навязываемых полевым переменным $\underset{\mathfrak{a}}{d^k}$ $(k = 1, 2, 3;\ \mathfrak{a} = 1, 2, 3)$. Здесь g_{ij} — компоненты эйлеровой пространственной метрики, $\underset{\mathfrak{ab}}{\delta}$ — символ Кронекера.

Переменные $\mathbf{X}$ и $\mathbf{x}$ выступают как соответственно лагранжева и эйлерова переменные, если пользоваться стандартной терминологиней механики континуума. С этими переменными связаны метрики $g_{\alpha\beta}$, g_{ij}. Референциальная и пространственная системы отсчета предполагаются инерциальными. В качестве основной термической переменной примем температурное смещение ϑ, которое определяется как первообразная по времени (при фиксированных лагранжевых переменных) от абсолютной температуры θ.

В качестве определяющих переменных гиперболической микрополярной термоупругости с «нежестким» репером локальных поворотов примем[1]: градиент деформации $\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{R}} \otimes \mathbf{x}$; директоры $\underset{\mathfrak{a}}{\mathbf{d}}$ $(\mathfrak{a} = 1, 2, 3)$ и их референциальные градиенты $\boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{R}} \otimes \underset{\mathfrak{a}}{\mathbf{d}}$ $(\mathfrak{a} = 1, 2, 3)$; референциальный градиент температурного смещения $\boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{R}}\vartheta$ и скорость температурного смещения $\dot{\vartheta}$.

В лагранжевых X^α $(\alpha = 1, 2, 3)$ и эйлеровых координатах x^j $(j = 1, 2, 3)$ естественная плотность действия (лагранжиан) в расчете на единицу объема в отсчетном состоянии

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(X^\alpha, x^j, \underset{\mathfrak{a}}{d^j}, \vartheta, \dot{x}^j, \underset{\mathfrak{a}}{\dot{d}^j}, \dot{\vartheta}, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha \underset{\mathfrak{a}}{d^j}, \partial_\alpha \vartheta) \tag{6}$$

представляет собой разность плотности кинетической энергии и свободной энергии Гельмгольца:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\rho_{\mathrm{R}}(X^\alpha) g_{kj}\dot{x}^k\dot{x}^j + \frac{1}{2}\rho_{\mathrm{R}}(X^\alpha) g_{ij}\overset{\mathfrak{ab}}{\mathfrak{I}}\underset{\mathfrak{a}}{\dot{d}^i}\underset{\mathfrak{b}}{\dot{d}^j} - \psi(X^\alpha, x^j, \underset{\mathfrak{a}}{d^j}, \vartheta, \dot{\vartheta}, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha \underset{\mathfrak{a}}{d^j}, \partial_\alpha\vartheta). \tag{7}$$

Здесь, как принято в механике континуума, точкой над символом обозначается частное дифференцирование по времени при постоянных лагранжевых координатах X^α, ρ_{R} — референциальная плотность, $\overset{\mathfrak{ab}}{\mathfrak{I}}$ — тензор инерции микрополярного поля.

[1] Ниже через $\boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{R}}$ обозначается отсчетный оператор Гамильтона.

Заметим, что согласно (7) термическое поле не обладает инерцией, поскольку не дает никакого вклада в кинетическую часть действия. Обратим также внимание на то обстоятельство, что в декартовых эйлеровых координатах «естественная» плотность лагранжиана (7) не должна зависеть явно от эйлеровых переменных x^j в силу принципа Галилеевой инвариантности (речь идет об инвариантности «естественной» плотности лагранжиана относительно трансляций в пространстве мест $\mathbf{x}$). По аналогии можно полагать, что «естественная» плотность лагранжиана явно не зависит и от температурного смещения ϑ.

Вариационный интеграл микрополярного термоупругого действия на основании (6) имеет наиболее общую форму, приводимую ниже:

$$\mathrm{Im} = \int \mathcal{L}(X^\beta, x^j, \underset{\mathfrak{a}}{d}^j, \vartheta, \dot{x}^j, \underset{\mathfrak{a}}{\dot{d}}^j, \dot{\vartheta}, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha \underset{\mathfrak{a}}{d}^j, \partial_\alpha \vartheta)\, dX^1\, dX^2\, dX^3\, dt \tag{8}$$
$$(\mathfrak{a} = 1,2,3;\ \alpha,\, \beta = 1,2,3;\ j = 1,2,3).$$

Соответствующие вариационному интегралу (8) уравнения поля распадаются на следующие три группы:

$$\begin{gathered}
\partial_\alpha S^{\alpha\cdot}_{\cdot j} - \dot{P}_j = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^j} \qquad (\alpha = 1,2,3;\ j = 1,2,3),\\
\partial_\alpha \overset{\mathfrak{a}}{\mathcal{M}}{}^{\alpha\cdot}_{\cdot j} + \overset{\mathfrak{a}}{\mathcal{A}}_j - (\overset{\mathfrak{a}}{\mathcal{Q}}_j)^{\cdot} = 0 \qquad (\mathfrak{a} = 1,2,3;\ \alpha = 1,2,3;\ j = 1,2,3),\\
\partial_\alpha j^\alpha_{\mathrm{R}} + \dot{s} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} \qquad (\alpha = 1,2,3).
\end{gathered} \tag{9}$$

В рамках Лагранжева полевого формализма определяющие уравнения выступают просто как обозначения для полевых частных производных, которые вводятся в целях сокращения записи дифференциальных уравнений поля (9):

$$P_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^j}, \qquad \overset{\mathfrak{a}}{\mathcal{Q}}_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underset{\mathfrak{a}}{\dot{d}}^j}, \qquad S^{\alpha\cdot}_{\cdot j} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha x^j)}, \qquad \overset{\mathfrak{a}}{\mathcal{M}}{}^{\alpha\cdot}_{\cdot j} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \underset{\mathfrak{a}}{d}^j)},$$
$$\overset{\mathfrak{a}}{\mathcal{A}}_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underset{\mathfrak{a}}{d}^j}, \qquad s = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vartheta}}, \qquad j^\alpha_{\mathrm{R}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \vartheta)}.$$

В данных выше определяющих уравнениях приняты следующие обозначения: P_j — линейный обобщенный импульс, соответствующий трансляционным степеням свободы; $\overset{\mathfrak{a}}{\mathcal{Q}}_j$ — обобщенные импульсы, соответствующие дополнительным (в том числе ротационным) степеням свободы; $S^{\alpha\cdot}_{\cdot j}$ — первый тензор напряжений Пиола–Кирхгофа; $\overset{\mathfrak{a}}{\mathcal{M}}{}^{\alpha\cdot}_{\cdot j}$ — тензоры экстранапряжений; $\overset{\mathfrak{a}}{\mathcal{A}}_j$ — обобщенные моменты, сопряженные локальным вращениям триэдра $\underset{\mathfrak{a}}{\mathbf{d}}$ ($\mathfrak{a} = 1,2,3$); s — плотность энтропии (в расчете на единицу объема в отсчетном состоянии); j^α_{R} — референциальный вектор потока энтропии (в единицу времени через единицу площади в отсчетном состоянии).

Уравнение, располагающееся в нижней строке (9), представляет собой уравнение баланса энтропии. Если лагранжиан не содержит явных вхождений температурного смещения, то производство энтропии будет равно нулю. Таким образом, уравнение транспорта тепла будет иметь гиперболический аналитический тип так же, как это имеет место в гиперболической термоупругости GNII (см. [6]).

4. ТРАНСЛЯЦИИ ВДОЛЬ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ОБРАЗУЮЩИХ ПЛОСКОГО 4-ПРОСТРАНСТВА–ВРЕМЕНИ. КАНОНИЧЕСКИЙ ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ–ИМПУЛЬСА

Тензор энергии–импульса в классической теории поля, методами которой могут быть исследованы важнейшие разделы современной механики и физики (включая и микромеханику континуума), объединяет плотности и потоки энергии и импульса поля в единый математический объект. В случае плоского пространства–времени теория Нетер инвариантных вариационных функционалов [11] весьма эффективна в плане быстрого определения тензора энергии–импульса и соответствующего закона сохранения. Заметим также, что тензор, отличающийся лишь знаком от канонического тензора энергии–импульса, в механике деформируемого твердого тела обычно называется тензором напряжений Эшелби.

Далее будет рассматриваться лишь тот случай, когда «естественная» плотность лагранжиана $\mathcal{L}$ явно не зависит от пространственно-временных координат X^β, т. е. $\partial_\alpha^{\exp l}\mathcal{L} = 0$.

Зафиксируем отсчетный 4-индекс α и рассмотрим однопараметрическую группу трансляций пространства–времени вдоль прямолинейной α-оси:

$$\widetilde{X}^\beta = X^\beta + \varepsilon\delta^\beta_\alpha.$$

Такого рода преобразования включают также сдвиги временной координаты, которая соответствует индексу 4.

Функционал действия любой 4-области пространственно-временного многообразия абсолютно инвариантен относительно группы трансляций пространства–времени, если «естественная» плотность лагранжиана явно не зависит от координат X^β, следовательно, для координатного направления α 4-вектор тока определяется как $J^\beta_{(\alpha)} = T^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha}$ (см., например, [6]), где

$$T^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha} = \mathcal{L}\delta^\beta_\alpha - (\partial_\alpha\varphi^k)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}, \tag{10}$$

образуя тензор второго ранга. Компоненты канонического 4-тензора $T^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha}$ имеют размерность плотности энергии (на единицу «естественного» элемента объема пространственно-временного многообразия).

Канонический закон сохранения, соответствующий группе трансляций пространства–времени, есть

$$\partial_\beta T^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha} = 0. \tag{11}$$

Заметим, что приведенная выше классическая схема построения канонического тензора энергии–импульса поля существенно опирается на то, что в пространственно-временном многообразии имеются «прямолинейные» оси, и она не может быть просто обобщена до сохраняющегося тензора в искривленном пространстве–времени.

Опираясь на формулу (10), определим компоненты канонического тензора энергии–импульса микрополярного термоупругого поля, лагранжиан которого задан согласно (7). Всего имеются следующие четыре группы соотношений:

$$T^{\mu\cdot}_{\cdot\lambda} = \mathcal{L}\delta^\mu_\lambda + S^{\mu\cdot}_{\cdot l}(\partial_\lambda x^l) + \overset{\mathfrak{a}}{\mathcal{M}}{}^{\mu\cdot}_{\cdot l}(\partial_\lambda \underset{\mathfrak{a}}{d}{}^l) - j^\mu_{\mathrm{R}}(\partial_\lambda\vartheta) \qquad (\lambda,\ \mu = 1,2,3), \tag{12}$$

$$T^{\mu\cdot}_{\cdot 4} = S^{\mu\cdot}_{\cdot l}\dot{x}^l + \overset{\mathfrak{a}}{\mathcal{M}}{}^{\mu\cdot}_{\cdot l}\dot{\underset{\mathfrak{a}}{d}}{}^l - j^\mu_{\mathrm{R}}\dot{\vartheta} \qquad (\lambda = 4;\ \mu = 1,2,3), \tag{13}$$

$$T^{4\cdot}_{\cdot\lambda} = -(\partial_\lambda x^l)P_l - (\partial_\lambda \underset{\mathfrak{a}}{d}{}^l)\overset{\mathfrak{a}}{\mathcal{Q}}_l - s(\partial_\lambda\vartheta) \qquad (\lambda = 1,2,3;\ \mu = 4), \tag{14}$$

$$T^{4\cdot}_{\cdot 4} = \mathcal{L} - \dot{x}^l P_l - \dot{\underset{\mathfrak{a}}{d}}{}^l\overset{\mathfrak{a}}{\mathcal{Q}}_l - s\dot{\vartheta} \qquad (\lambda,\mu = 4). \tag{15}$$

Приведенные выше компоненты тензора энергии–импульса микрополярного термоупругого поля позволяют быстро найти гамильтониан поля $\mathcal{H}$, вектор псевдоимпульса поля $\mathcal{P}_\lambda$, вектор Умова–Пойнтинга Γ^μ и тензор напряжений Эшелби $P^{\mu\cdot}_{\cdot\lambda}$.

Так, компонента (15) тензора энергии–импульса представляет собой взятую с отрицательным знаком плотность гамильтониана:

$$\mathcal{H} = \dot{x}^l P_l + \dot{\underset{\mathfrak{a}}{d}}{}^l\overset{\mathfrak{a}}{\mathcal{Q}}_l + s\dot{\vartheta} - \mathcal{L}.$$

Компоненты (14) определяют ковариантный вектор псевдоимпульса поля согласно формуле

$$\mathcal{P}_\lambda = -(\partial_\lambda x^l)P_l - (\partial_\lambda \underset{\mathfrak{a}}{d}{}^l)\overset{\mathfrak{a}}{\mathcal{Q}}_l - s(\partial_\lambda\vartheta).$$

Из компонент (13) формируется контравариантный вектор Умова–Пойнтинга:

$$\Gamma^\mu = S^{\mu\cdot}_{\cdot l}\dot{x}^l + \overset{\mathfrak{a}}{\mathcal{M}}{}^{\mu\cdot}_{\cdot l}\dot{\underset{\mathfrak{a}}{d}}{}^l - j^\mu_{\mathrm{R}}\dot{\vartheta}.$$

Компоненты (12) тензора энергии–импульса, взятые с противоположным знаком, дают возможность сразу же определить тензор напряжений Эшелби:

$$-P^{\mu\cdot}_{\cdot\lambda} = \mathcal{L}\delta^{\mu}_{\lambda} + S^{\mu\cdot}_{\cdot l}(\partial_\lambda x^l) + \overset{\mathfrak{a}}{\mathcal{M}}{}^{\mu\cdot}_{\cdot l}(\partial_\lambda \underset{\mathfrak{a}}{d}{}^l) - j^{\mu}_{\mathrm{R}}(\partial_\lambda \vartheta).$$

Заметим, что интеграл по неограниченному 3-пространству $\int \mathcal{P}_\lambda d^3X$ $(\lambda = 1, 2, 3)$, представляющий собой полный ковариантный канонический импульс поля, не зависит от времени и является точно сохраняющимся инвариантом поля. Приведем последнюю формулу в развернутом виде

$$-\int ((\partial_\lambda x^l)P_l + (\partial_\lambda \underset{\mathfrak{a}}{d}{}^l)\overset{\mathfrak{a}}{\mathcal{Q}}_l + s(\partial_\lambda\vartheta))d^3X \qquad (\lambda = 1, 2, 3),$$

Заключая, приведем два содержащихся в (11) канонических уравнения баланса энергии и псевдоимпульса гиперболического микрополярного термоупругого поля:

$$-\dot{\mathcal{H}} + \partial_\mu \Gamma^\mu = 0, \qquad -\dot{\mathcal{P}}_\lambda + \partial_\mu P^{\mu\cdot}_{\cdot\lambda} = 0.$$

5. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОВОРОТА ПЛОСКОГО 4-ПРОСТРАНСТВА–ВРЕМЕНИ. КАНОНИЧЕСКИЙ ТЕНЗОР УГЛОВОГО ИМПУЛЬСА

Произвольное бесконечно малое вращение евклидова 4-пространства–времени можно задать линейными преобразованиями:

$$\widetilde{X}_\beta = X_\beta + \Omega_{\beta\sigma}X^\sigma \qquad (\sigma, \beta = 1, 2, 3, 4),$$

где $\Omega_{\beta\sigma} = -\Omega_{\sigma\beta}$ есть антисимметричный 4-тензор второго ранга, компоненты которого выступают как тензорные параметры группы инфинитезимальных вращений.

Двенадцать компонент $\Omega_{\alpha\beta}$ $(\alpha \neq \beta)$ связаны соотношениями $\Omega_{\alpha\beta} = -\Omega_{\beta\alpha}$, следовательно, среди них имеется лишь шесть независимых. В качестве независимых возьмем такие компоненты $\Omega_{\beta\alpha}$, для которых $\beta < \alpha$.

Вариации пространственно-временных координат вычисляются, очевидно, в виде $\delta X_\beta = \Omega_{\beta\sigma}X^\sigma$ или

$$\delta X_\beta = \sum_{\gamma<\sigma} \delta^\gamma_\beta X^\sigma \Omega_{\gamma\sigma} + \sum_{\gamma>\sigma} \delta^\gamma_\beta X^\sigma \Omega_{\gamma\sigma} = \sum_{\gamma<\alpha} \Omega_{\gamma\alpha}(\delta^\gamma_\beta X^\alpha - \delta^\alpha_\beta X^\gamma).$$

Здесь суммирование производится по всем парам индексов γ, α: $\gamma < \alpha$.

Будем считать, что преобразование вращения действует лишь на пространственно-временные координаты (которые мы рассматриваем как переменные, связанные с отсчетной конфигурацией) и *не действует* на физические поля φ^k, координатное представление которых осуществляется в эйлеровой системе координат. Поэтому можно заключить, что $\delta\varphi^k = 0$.

Производя необходимые вычисления, находим компоненты 4-вектора тока J^β в виде

$$J^{\beta(\gamma\alpha)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta \varphi^s)}[(\partial_\sigma\varphi^s)g^{\sigma\alpha}X^\gamma - (\partial_\sigma\varphi^s)g^{\sigma\gamma}X^\alpha] + \mathcal{L}g^{\beta\sigma}(X^\alpha\delta^\gamma_\sigma - X^\gamma\delta^\alpha_\sigma).$$

Определим далее 4-тензор третьего ранга $M^{\beta\cdot\cdot}_{\cdot\lambda\mu}$ формулой

$$M^{\beta\cdot\cdot}_{\cdot\lambda\mu} = g_{\gamma\lambda}g_{\alpha\mu}J^{\beta(\gamma\alpha)} \qquad (\gamma, \alpha, \lambda, \mu, \beta = 1, 2, 3, 4) \tag{16}$$

или в развернутом виде

$$M^{\beta\cdot\cdot}_{\cdot\lambda\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta \varphi^s)}[(\partial_\mu\varphi^s)X_\lambda - (\partial_\lambda\varphi^s)X_\mu] + \mathcal{L}(X_\mu\delta^\beta_\lambda - X_\lambda\delta^\beta_\mu).$$

Тензор $M^{\beta\cdot\cdot}_{\cdot\lambda\mu}$ называется тензором момента количества движения (или тензором углового импульса) поля. Он антисимметричен по нижним индексам λ, μ. Заметим, что каноническое определение тензора момента количества движения (16) указывает также и на его естественное координатное представление — 1-контравариантное и 2-ковариантное.

Следует отметить, что тензор момента количества движения поля (16) выражается через тензор энергии–импульса (10) поля по формуле

$$M^{\beta\cdot\cdot}_{\cdot\gamma\alpha} = T^{\beta\cdot}_{\cdot\gamma} X_\alpha - T^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha} X_\gamma.$$

Соответствующий группе вращений пространства–времени закон сохранения есть $\partial_\beta M^{\beta\cdot\cdot}_{\cdot\gamma\alpha} = 0$.

Интеграл (5), величина которого не зависит от времени, в рассматриваемом случае будет иметь вид

$$\int M^{4\cdot\cdot}_{\cdot\gamma\alpha}\, d^3X.$$

Поскольку $T^{4\cdot}_{\cdot\alpha} = \mathcal{P}_\alpha$, где $\mathcal{P}_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ — канонический импульс (псевдоимпульс), то антисимметричный тензор полного момента канонического импульса микрополярного термоупругого поля

$$\mathcal{S}_{\alpha\gamma} = \int (X_\alpha \mathcal{P}_\gamma - X_\gamma \mathcal{P}_\alpha)\, d^3X \qquad (\alpha, \gamma = 1, 2, 3)$$

будет точно сохраняющимся инвариантом поля, т. е. $\dot{\mathcal{S}}_{\alpha\gamma} = 0$.

Интересно также отметить, что чисто термическая часть тензора $\mathcal{S}_{\alpha\gamma}$ представляется интегралом по неограниченному 3-пространству:

$$\int s(X_\alpha \partial_\gamma - X_\gamma \partial_\alpha)\vartheta\, d^3X \qquad (\alpha, \gamma = 1, 2, 3).$$

Таким образом, несохраняющаяся термическая часть полного канонического углового импульса поля есть полный момент референциального градиента температурного смещения с множителем пропорциональности, равным плотности энтропии.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00184-а «Волновые задачи связанной гиперболической термоупругости»).

Библиографический список

1. *Ковалев В. А., Радаев Ю. Н.* Элементы теории поля : вариационные симметрии и геометрические инварианты. М. : Физматлит, 2009. 156 с.

2. *Truesdell C., Toupin R. A.* The Classical Field Theories // Principles of Classical Mechanics and Field Theory. Encyclopedia of Physics. Vol. III/1 / ed. S. Flugge. Berlin; Göttingen; Heidelberg : Springer, 1960. P. 226–793.

3. *Cosserat E., Cosserat F.* Théorie des corps déformables. Paris : Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909. 226 p.

4. *Toupin R. A.* Theories of Elasticity with Couple-Stress // Arch. Rational Mech. Anal. 1964. Vol. 17, № 5. P. 85–112.

5. *Ковалев В. А., Мельников А. Д., Радаев Ю. Н.* О гиперболических уравнениях связанного микрополярного термоупругого поля // Математическая физика и ее приложения : материалы Второй междунар. конф. / под ред. чл.-корр. РАН И. В. Воловича и д-ра физ.-мат. наук, проф. Ю. Н. Радаева. Самара : Книга, 2010. С. 156–164.

6. *Ковалев В. А., Радаев Ю. Н.* Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2010. 328 с.

7. *Ковалев В. А., Радаев Ю. Н.* Вывод тензоров энергии–импульса в теориях микрополярной гиперболической термоупругости // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 5. С. 58–77.

8. *Ковалев В.А., Радаев Ю.Н.* О некоторых новых направлениях развития полевых теорий механики сплошных сред // V сессия Научного совета РАН по механике деформируемого твердого тела : тез. докл. Всерос. конф., 31 мая – 5 июня, 2011 г., Астрахань, Россия. Астрахань : Изд-во АГТУ, 2011. С. 26–28.

9. *Радаев Ю. Н.* Гиперболические теории и задачи механики деформируемого твердого тела // Современные проблемы механики : тез. докл. междунар. конф., посвящ. 100-летию Л. А. Галина. М., 2012. С. 75–76.

10. *Ковалев В. А., Радаев Ю. Н.* Теоретико-полевые формулировки и модели нелинейной гиперболической микрополярной термоупругости // XXXVI Дальневосточная математическая школа-семинар им. акад. Е. В. Золотова (4–10 сентября 2012 г., Владивосток) : сб. докл. Владивосток : ИАПУ ДВО РАН, 2012. С. 137–142.

11. *Noether E.* Invariante Variationsprobleme // Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-Physikalische Klasse. 1918. H. 2. S. 235–257; *Нетер Э.* Инвариантные вариационные задачи // Вариационные принципы механики. М. : Физматгиз, 1959. С. 611–630.