УДК 517.977

АППРОКСИМАЦИЯ УПРАВЛЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМОЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПРИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОГРАНИЧЕНИЯХ

И. В. Гребенникова[1], **А. Г. Кремлёв**[2]

[1]Старший преподаватель кафедры информационных систем и технологий, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург, giv001@mail.ru

[2]Доктор физико-математических наук, профессор кафедры мультимедиа технологий, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург, kremlev001@mail.ru

Рассматривается задача управления по минимаксному критерию для сингулярно возмущенной системы с запаздыванием по быстрым и медленным переменным при неопределенных начальных условиях и геометрических ограничениях на ресурсы управления. Формулируется предельная задача, для которой специальным образом выбирается функционал качества. Предлагается процедура построения начального приближения управляющего воздействия в минимаксной задаче управления.

Ключевые слова: сингулярно возмущенная система с запаздыванием, оптимальное управление, фундаментальная матрица.

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе рассматриваются динамические объекты, математическими моделями которых являются сингулярно возмущенные системы с постоянным запаздыванием по быстрым и медленным переменным. Рассматривается задача оптимального управления в постановке [1, 2] для сингулярно возмущенных систем с запаздыванием (как по медленным, так и по быстрым переменным) при неопределенных начальных условиях и геометрических ограничениях на управляющие воздействия. Формулируется и решается предельная задача управления сингулярно возмущенной системой с запаздыванием минимаксная по форме, для которой специальным образом выбирается функционал качества. В основе предлагаемого метода лежат идеи выделения асимптотики ансамбля траекторий сингулярно возмущенной системы, предложенные А. Г. Кремлёвым в работе [3], но при отсутствии запаздывания и представления фундаментальной матрицы решений, разбитой на блоки в соответствии с размерностями быстрых и медленных пременных, в виде равномерно сходящейся последовательности. При реализации метода используются результаты исследований [1–6], а также аппарат выпуклого анализа [7]. Приводится начальное приближение оптимального решения (относительного малого параметра), при этом не требуется чрезмерных условий гладкости (дифференцируемость не выше первого порядка), ограничений на класс допустимых управлений.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается управляемая сингулярно возмущенная система (с малым параметром $\mu > 0$) с запаздыванием $h > 0$ (по состоянию):

$$\begin{aligned} dx(t)/dt &= A_{11}(t)x(t) + A_{12}(t)y(t) + G_{11}(t)x(t-h) + \mu G_{12}(t)y(t-h) + B_1(t)u(t), \\ \mu\, dy(t)/dt &= A_{21}(t)x(t) + A_{22}(t)y(t) + G_{21}(t)x(t-h) + \mu G_{22}(t)y(t-h) + B_2(t)u(t), \end{aligned} \tag{1}$$

где $t \in T = [t_0, t_1]$, $x \in R^n$, $y \in R^m$, A_{ij}, B_i, G_{ij} $(i, j = 1, 2)$ — матрицы соответствующих размеров с непрерывными элементами. Начальное состояние системы $x(t) = \psi_x(t)$, $t_0 - h \leqslant t < t_0$, $x(t_0) = x_0$, $y(t) = \psi_y(t)$, $t_0 - h \leqslant t < t_0$, $y(t_0) = y_0$ точно неизвестно и заданы лишь ограничения $x_0 \in X_0$, $y_0 \in Y_0$, где X_0, Y_0 — выпуклые компакты в соответствующих пространствах, $\psi_x(t) \in \Psi_x(t)$, $\psi_y(t) \in \Psi_y(t)$, $t_0 - h \leqslant t < t_0$, $\Psi_x(t)$, $\Psi_y(t)$ — заданные многозначные отображения со значениями в виде выпуклых компактов (в R^n, R^m), непрерывные по t в метрике Хаусдорфа. Реализации управления $u(t)$, $t \in T$ — измеримые по Лебегу функции, удовлетворяющие условию $u(\cdot) \in P$, P — слабокомпактное выпуклое множество в $L_2^r(T)$. В данном случае $P = \{u(\cdot) | u(t) \in P(t),\ t \in T\}$, где $P(t)$ — заданное непрерывное, ограниченное, выпуклое многозначное отображение.

Будем предполагать выполненным следующее предположение.

Предположение 1. *Корни $\lambda_s(t)$ характеристического уравнения*

$$\left|A_{22}(t) - \mu\lambda E + \mu G_{22}(t)e^{-\lambda h}\right| = 0,$$

где E — единичная матрица, удовлетворяют неравенству $\operatorname{Re}\lambda_s(t) < -2c < 0$, *при* $t \in T$, $c = \mathrm{const} > 0$.

Тогда по критерию асимптотической устойчивости для линейных систем с запаздыванием [8, с. 162] при достаточно малых μ $(0 < \mu \leqslant \mu_0)$ фундаментальная матрица решений $Y[t,\tau]$ системы $\mu\, dy/dt = A_{22}(t)y(t) + \mu G_{22}(t)y(t-h)$, $Y[t,\tau] = 0$, при $\tau > t$, $Y[\tau,\tau] = E$, при $t_0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant t_1$ имеет оценку

$$\|Y[t,\tau]\| \leqslant c_0 \exp\{-c(t-\tau)/\mu\}, \tag{2}$$

$c_0 > 0$ — некоторая постоянная, $\|\cdot\|$ — евклидова норма.

Введем следующие обозначения: $z' = (x', y')$, $Z_0 = X_0 \times Y_0$, $\psi' = (\psi'_x, \psi'_y)$, $\Psi = \Psi_x \times \Psi_y$, $Z(t, u(\cdot), Z_0, \psi(\cdot))$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ — множество (ансамбль) траекторий $z(t, u(\cdot), z_0, \psi(\cdot))$ системы (1), исходящих из Z_0, при некотором $\psi(\cdot) \in \Psi(\cdot)$ и фиксированном $u(\cdot) \in P$.

Определим функционал $J(\cdot)$:

$$J(u(\cdot)) = \max_{z_0 \in Z_0} \max_{\psi(\cdot)\in\Psi(\cdot)} \varphi(z(t_1; u(\cdot), z_0, \psi(\cdot))),$$

где $\varphi(\cdot)\colon R^{n+m} \to R$ — заданная выпуклая функция (с конечными значениями).

Задача 1. *Среди управлений $u(\cdot) \in P$ найти оптимальное $u^0 = u^0(\cdot)$, доставляющее минимум функционалу $J(u(\cdot))$ на множестве P:*

$$\varepsilon^0(t_1) = J(u^0) = \min_{u(\cdot)\in P} J(u(\cdot)).$$

Пусть $Z[t,\tau]$ — фундаментальная матрица решений системы (1) (при $u \equiv 0$), причем $Z[\tau,\tau] = E$, $Z[t,\tau] = 0$ при $\tau > t$. Матрицу $Z[t,\tau]$ представим в следующем блочном виде:

$$Z[t,\tau] = \begin{pmatrix} Z_{11}[t,\tau] & Z_{12}[t,\tau] \\ Z_{21}[t,\tau] & Z_{22}[t,\tau] \end{pmatrix},$$

здесь $Z_{11}[t,\tau]$, $Z_{12}[t,\tau]$, $Z_{21}[t,\tau]$, $Z_{22}[t,\tau]$ — матрицы с размерами $n \times n$, $n \times m$, $m \times n$, $m \times m$ соответственно.

Решение задачи 1 при каждом фиксированном значении параметра $\mu > 0$ описывается следующими соотношениями (используя рассуждения из [2, с. 73] и [3, с. 62], но для системы с запаздыванием):

$$\varepsilon^0(t_1) = \min_{u(\cdot)\in P} \max_{l \in R^{n+m}} \max_{z_0\in Z_0} \max_{\psi(\cdot)\in\Psi(\cdot)} \{l' z(t_1; u(\cdot), z_0, \psi(\cdot)) - \varphi^*(l)\} = \max\{\chi^0(l,\mu) | l \in R^{n+m}\} = \chi^0(l^0, \mu),$$

$$\chi^0(l,\mu) = -h^{**}(l) - \rho(-r(\cdot; t_1, l, \mu)|P), \tag{3}$$

$$h(l) = \varphi^*(l) - \rho(l' Z[t_1, t_0]|Z_0) - \int\limits_{t_0}^{t_0+h} \rho(l' Z[t,\tau]G(\tau)|\ \Psi(\tau - h))\, d\tau,$$

$$r(\tau; t, l, \mu) = (p' Z_{11}[t,\tau] + q' Z_{21}[t,\tau])B_1(\tau) + (1/\mu)(p' Z_{12}[t,\tau] + q' Z_{22}[t,\tau])B_2(\tau),$$

где $l' = (p', q')$, $p \in R^n$, $q \in R^m$, $\varphi^*(l)$ — функция, сопряженная [7, с. 52] к $\varphi(z)$; $h^{**}(l) = \overline{(co\, h)}(l)$ — замыкание выпуклой оболочки [7, с. 65] функции $h(l)$; $\rho(s|X)$ — опорная функция множества X на элементе s, $G(t) = \begin{pmatrix} G_{11}(t) & \mu G_{12}(t) \\ G_{21}(t)/\mu & G_{22}(t) \end{pmatrix}$. Оптимальное управление $u^0(\cdot, \mu)$ удовлетворяет условию минимума: для почти всех $\tau \in T$

$$\min_{u(\tau)\in P(\tau)} r(\tau; t_1, l^0, \mu) u(\tau) = r(\tau; t_1, l^0, \mu) u^0(\tau, \mu). \tag{4}$$

Полученные $u^0(\cdot,\mu)$, l^0, $\varepsilon^0(t_1)$ зависят от параметра μ. Однако эти величины при $\mu\to+0$ могут не сходиться [4, с. 38] к соответствующим решениям задачи 1 для вырожденной системы (полученной из исходной при $\mu=0$).

Наряду с задачей 1 рассмотрим *вырожденную* задачу.

Задача 2. *Среди управлений $u(\cdot)\in P$ найти оптимальное $u_0=u_0(\cdot)$, доставляющее минимум функционалу $J_0(u(\cdot))$:*

$$\varepsilon_0(t_1)=J_0(u_0)=\min_{u(\cdot)\in P} J_0(u(\cdot)),$$

$$J_0(u(\cdot))=\max_{x_0\in X_0}\max_{\psi_x(\cdot)\in\Psi_x(\cdot)}\varphi(z_0(t_1;u(\cdot),x_0,\psi_x(\cdot))),$$

где $z_0(t;u(\cdot),x_0,\psi_x(\cdot))$ — решение вырожденной системы, полученной из (1) *при $\mu=0$:*

$$dx(t)/dt=A_0(t)x(t)+G_0(t)x(t-h)+B_0(t)u(t), \tag{5}$$

$$y(t)=-A_{22}^{-1}(t)A_{21}(t)x(t)-A_{22}^{-1}(t)G_{21}(t)x(t-h)-A_{22}^{-1}(t)B_2(t)u(t), \tag{6}$$

где $t\in T$, $A_0(t)=A_{11}(t)-A_{12}(t)A_{22}^{-1}(t)A_{21}(t)$, $G_0(t)=G_{11}(t)-A_{12}(t)A_{22}^{-1}(t)G_{21}(t)$, $B_0(t)=B_1(t)-A_{12}(t)A_{22}^{-1}(t)B_2(t)$.

Пусть $X[t,\tau]$ — фундаментальная матрица решений системы (5) (при $u\equiv 0$), причем $X[\tau,\tau]=E$, $X[t,\tau]=0$ при $\tau>t$.

Пользуясь методами из [2, с. 73] и [3, с. 62], но для системы с запаздыванием, получим следующие соотношения при каждом фиксированном значении параметра $\mu>0$:

$$\varepsilon_0(t_1)=\max\{\chi_0(p,q)|p\in R^n,q\in R^m\}=\chi_0(p_0,q_0), \tag{7}$$

$$\chi_0(p,q)=-h_0^{**}(p,q)-\int\limits_{t_0}^{t_1}\rho(-w'(\tau,p,q)B_0(\tau)|P(\tau))\,d\tau-\rho(q'A_{22}^{-1}(t_1)B_2(t_1)|P(t_1)),$$

где $h_0(p,q)=\varphi^*(p,q)-\rho(w'(t_0,p,q)|X_0)-\int\limits_{t_0}^{t_0+h}\rho(w'(\tau,p,q)G_0(\tau)|\Psi_x(\tau-h))d\tau$, $w'(\tau,p,q)=s'(t_1,p,q)X[t_1,\tau]-q'A_{22}^{-1}(t_1)G_{21}(t_1)X[t_1-h,\tau]$, при $t_0\leqslant\tau\leqslant t_0+h$; $s'(t_1,p,q)=p'-q'A_{22}^{-1}(t_1)A_{21}(t_1)$.

Оптимальное управление $u_0(\cdot)$ удовлетворяет условию минимума: при $\tau\in T$

$$\begin{gathered}w'(\tau,p_0,q_0)B_0(\tau)u_0(\tau)=\min_{u(\tau)\in P(\tau)}w'(\tau,p_0,q_0)B_0(\tau)u(\tau),\\ q_0A_{22}^{-1}(t_1)B_2(t_1)u_0(t_1)=\min_{u\in P(t_1)}q_0A_{22}^{-1}(t_1)B_2(t_1)u.\end{gathered} \tag{8}$$

Предположение 2. *1. Система* (5) *относительно управляема [9] на T.*

2. Максимум в (7) *достигается на векторе $l_0'=(p_0',q_0')$ таком, что $s'(t_1;p_0,q_0)\neq 0$.*

Тогда условия (8) определяют управление $u_0(\cdot)\in P(\cdot)$ как некоторую измеримую на T функцию, при этом найдется такой вектор $x_0\in X_0$, $\psi_x(\cdot)\in\Psi_x(\cdot)$, что $u_0(\cdot)$ приводит траекторию $z_0(\cdot;u_0(\cdot),x_0,\psi_x(\cdot))$ на границу множества достижимости $F_0(t_1,P(\cdot),x_0,\psi_x(\cdot))$ вырожденной системы,

$$F_0(t_1,P(\cdot),x_0,\psi_x(\cdot))=\{z\in R^{n+m}|z=z_0(t_1,u(\cdot),x_0,\psi_x(\cdot)),u(\cdot)\in P(\cdot)\} \tag{9}$$

и

$$\varepsilon_0(t_1)=J_0(u_0(\cdot))=\max_{x_0\in X_0}\max_{\psi_x(\cdot)\in\Psi_x(\cdot)}\varphi(z_0(t_1;u_0(\cdot),x_0,\psi_x(\cdot))).$$

Как уже отмечалось, решение ($u_0(\cdot)$, l_0, $\varepsilon_0(t_1)$) задачи 2 не дает даже начального приближения решения задачи 1. Но конструкция вырожденной системы (с некоторыми расширениями) будет использоваться в дальнейшем, поскольку с ней связаны асимптотические свойства траекторий исходной сингулярно возмущенной системы с запаздыванием. На основании же асимптотических свойств можно существенно упростить получение решения исходной задачи 1. Поэтому важное значение приобретают методы, позволяющие построить аппроксимацию оптимального управления $u^0(\cdot,\mu)$, доставляющую оптимальное значение $\varepsilon^0(t_1) = J(u^0(\cdot,\mu))$ с заданной точностью (относительно μ). В данной работе в основе предложенного способа определения требуемого приближения лежит возможность представления блоков $Z_{ij}[t,\tau;\mu]$ $(i,j=1,2)$ в виде пределов равномерно сходящихся на $[t_0,t_1]$ последовательностей $Z_{ij}^{(k)}[t,\tau;\mu]$, $k=0,1,2,\ldots$, при $0<\mu\leqslant\mu_0$ (μ_0 достаточно мало).

3. АСИМПТОТИКА ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ

Пусть $\hat{Z}[t,\tau]$ — решение матричного уравнения

$$d\hat{Z}[t,\tau]/dt = A(t)\hat{Z}[t,\tau] + G(t)\hat{Z}[t-h,\tau] + B(t)u(t),$$

$Z_1[t,\tau]$ — решение матричного уравнения

$$dZ_1[t,\tau]/dt = A(t)Z_1[t,\tau] + G(t)Z_1[t-h,\tau],$$

причем $Z_1[\tau,\tau]=E$, $Z_1[t,\tau]=0$ при $\tau>t$; $Z_0[t,\tau]$ — решение матричного уравнения

$$dZ_0[t,\tau]/dt = A(t)Z_0[t,\tau],$$

причем $Z_0[\tau,\tau]=E$. Тогда по формуле Коши [10] получаем:

$$Z_1[t,\tau] = Z_0[t,\tau] + \int_\tau^t Z_0[t,s]G(s)Z_1[s-h,\tau]ds,$$

$$\hat{Z}[t,\tau] = Z_1[t,\tau] + \int_\tau^t Z_1[t,s]B(s)u(s)ds. \tag{10}$$

Применяя формулу (10) для каждого блока матрицы $Z[t,\tau]$, получим следующее утверждение.

Лемма. *Матрицы $Z_{ij}[t,\tau]$ $(i,j=1,2)$, $t_0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant t_1$, удовлетворяют уравнениям:*

$$Z_{11}[t,\tau] = X[t,\tau] + \mu\int_\tau^t X[t,s]A_{12}(s)A_{22}^{-1}(s)(dZ_{21}[s,\tau]/ds)\,ds+$$

$$+\int_\tau^t X[t,s]\left(\mu G_{12}(s)Z_{21}[s-h,\tau] - A_{12}(s)A_{22}^{-1}(s)\mu G_{22}(s)Z_{21}[s-h,\tau]\right)\,ds, \tag{11}$$

$$Z_{12}[t,\tau] = \mu\int_\tau^t X[t,s]A_{12}(s)A_{22}^{-1}(s)(dZ_{22}[s,\tau]/ds)\,ds+$$

$$+\int_\tau^t X[t,s]\left(\mu G_{12}(s)Z_{22}[s-h,\tau] - A_{12}(s)A_{22}^{-1}(s)\mu G_{22}(s)Z_{22}[s-h,\tau]\right)\,ds, \tag{12}$$

$$Z_{21}[t,\tau] = (1/\mu)\int_\tau^t Y[t,s](A_{21}(s)Z_{11}[s,\tau] + G_{21}(s)Z_{11}[s-h,\tau])\,ds,$$

$$Z_{22}[t,\tau] = Y[t,\tau] + (1/\mu)\int_\tau^t Y[t,s](A_{21}(s)Z_{12}[s,\tau] + G_{21}(s)Z_{12}[s-h,\tau])\,ds.$$

Уравнения (11) и (12) преобразуются к виду

$$Z_{11}[t,\tau] = X[t,\tau] - \int_\tau^t \frac{dZ_{12}^{(0)}[t,s]}{ds}A_{22}^{-1}(s)(A_{21}(s)Z_{11}[s,\tau] + G_{21}(s)Z_{11}[s-h,\tau])\,ds, \tag{13}$$

$$Z_{12}[t,\tau] = Z_{12}^{(0)}[t,\tau] - \int\limits_{\tau}^{t} \frac{dZ_{12}^{(0)}[t,s]}{ds} A_{22}^{-1}(s)(A_{21}(s)Z_{12}[s,\tau] + G_{21}(s)Z_{12}[s-h,\tau])\, ds,$$

здесь матрица $Z_{12}^{(0)}[t,\tau]$ определяется формулой

$$Z_{12}^{(0)}[t,\tau] = \int\limits_{\tau}^{t} X[t,s](A_{12}(s)Y[s,\tau] + \mu G_{12}(s)Y[s-h,\tau])\, ds.$$

Теорема 1. *Существуют такие достаточно малое число $\mu_0 > 0$ и постоянная $N > 0$, что в области $0 < \mu \leqslant \mu_0$, $t_0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant t_1$, выполняются оценки:*

$$\begin{gathered} \|Z_{11}[t,\tau]\| \leqslant N/(1-\mu N); \|Z_{12}[t,\tau]\| \leqslant \mu N(1-e^{-c(t-\tau)/\mu})/(1-\mu N), \\ \|Z_{21}[t,\tau]\| \leqslant N(1-e^{-c(t-\tau)/\mu})/(1-\mu N), \\ \|Z_{22}[t,\tau]\| \leqslant c_0 e^{-c(t-\tau)/\mu} + \mu N^2(1-e^{-c(t-\tau)/\mu})/(1-\mu N). \end{gathered} \tag{14}$$

Доказательство. Пользуясь методом последовательных приближений Пикара, решение (13) можно представить как предел равномерно сходящейся на отрезке $[t_0, t_1]$ последовательности при $0 < \mu \leqslant \mu_0$ (μ_0 достаточно мало):

$$Z_{11}^{(0)}[t,\tau] = X[t,\tau],$$

$$Z_{11}^{(k+1)}[t,\tau] = X[t,\tau] - \int\limits_{\tau}^{t} (dZ_{12}^{(0)}[t,s]/ds) A_{22}^{-1}(s)(A_{21}(s)Z_{11}^{(k)}[s,\tau] + G_{21}(s)Z_{11}^{(k)}[s-h,\tau])\, ds,$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots$$

В силу ограниченности $X[t,\tau]$ ($t_0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant t_1$) и оценки (2) при $0 < \mu \leqslant \mu_0$ справедливы неравенства:

$$\|X[t,\tau]\| \leqslant N_0, \quad \left\|Z_{12}^{(0)}[t,\tau]\right\| \leqslant \mu N_1 c_0 (1-e^{-c(t-\tau)/\mu})/c,$$

$$\left\| \int\limits_{\tau}^{t} (dZ_{12}^{(0)}[t,s]/ds) A_{22}^{-1}(s)(A_{21}(s)X[s,\tau] + G_{21}(s)X[s-h,\tau])\, ds \right\| \leqslant \mu N_0 N_1 c_0/c,$$

$$\left\| Z_{11}^{(k+1)}[t,\tau] - Z_{11}^{(k)}[t,\tau] \right\| \leqslant \mu^{k+1} N_0 (N_1 c_0/c)^{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $N_0 > 0$, $N_1 > 0$ — некоторые постоянные. Отсюда непосредственно следует (при соответствующем выборе $N > 0$) оценка для $Z_{11}[t,\tau]$ в (14). Аналогично получаются остальные неравенства, причем в области $0 < \mu \leqslant \mu_0$, $t_0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant t_1$ имеем:

$$\left\| Z_{12}^{(k+1)}[t,\tau] - Z_{12}^{(k)}[t,\tau] \right\| \leqslant \mu^{k+2} N_0 N_1^{k+1} (c_0/c)(1-e^{-c(t-\tau)/\mu}),$$

$$\left\| Z_{21}^{(k+1)}[t,\tau] - Z_{21}^{(k)}[t,\tau] \right\| \leqslant \mu^{k+1} N_0 N_1^{k+1} (c_0/c)(1-e^{-c(t-\tau)/\mu}),$$

$$\left\| Z_{22}^{(k+1)}[t,\tau] - Z_{22}^{(k)}[t,\tau] \right\| \leqslant \mu^{k} N_0 N_1^{k} (c_0/c)^2 (\mu(1-e^{-c(t-\tau)/\mu}) - c(t-\tau)e^{-c(t-\tau)/\mu}), \ k = 0, 1, 2, \ldots . \ \square$$

Рекуррентные формулы для вычисления $Z_{ij}[t,\tau]$ $(i, j = 1, 2)$, определяющие асимптотику фундаментальной матрицы, есть:

$$Z_{11}^{(k+1)}[t,\tau] = X[t,\tau] - \int\limits_{\tau}^{t} (dZ_{12}^{(0)}[t,s]/ds) A_{22}^{-1}(s)(A_{21}(s)Z_{11}^{(k)}[s,\tau] + G_{21}(s)Z_{11}^{(k)}[s-h,\tau])\, ds,$$

$$Z_{22}^{(k+1)}[t,\tau] = Y[t,\tau] + \int\limits_{\tau}^{t} Z_{21}^{(k)}[t,s](A_{12}(s)Y[s,\tau] + \mu G_{12}(s)Y[s-h,\tau])\, ds,$$

$$Z_{12}^{(k)}[t,\tau] = \int\limits_{\tau}^{t} Z_{11}^{(k)}[t,s](A_{12}(s)Y[s,\tau] + \mu G_{12}(s)Y[s-h,\tau])\,ds,$$

$$Z_{21}^{(k)}[t,\tau] = (1/\mu)\int\limits_{\tau}^{t} Y[t,s](A_{21}(s)Z_{11}^{(k)}[s,\tau] + G_{21}(s)Z_{11}^{(k)}[s-h,\tau])\,ds, \qquad k=0,1,2,\ldots,$$

причем $Z_{11}^{(0)}[t,\tau] = X[t,\tau]$, $Z_{22}^{(0)}[t,\tau] = Y[t,\tau]$.

Для задачи 1 соотношение (3) можно представить (см. [5, с. 7] и [6, с. 68]) в следующем виде:

$$\varepsilon^0(t_1) = \min_{u(\cdot)\in P}\max_{p,q}\{-\varphi^*(p,q) + \rho(p'Z_{11}[t_1,t_0] + q'Z_{21}[t_1,t_0]|X_0) +$$
$$+\rho(p'Z_{12}[t_1,t_0] + q'Z_{22}[t_1,t_0]|Y_0) + \int\limits_{t_0}^{t_1}[(p'Z_{11}[t_1,\tau] + q'Z_{21}[t_1,\tau])B_0(\tau) +$$
$$+(1/\mu)q'Y[t_1,\tau]B_2(\tau) - \xi(\tau,t_1,p,q)A_{22}^{-1}(\tau)B_2(\tau)]u(\tau)d\tau +$$
$$+\int\limits_{t_0}^{t_0+h}\rho((p'Z_{11}[t_1,\tau] + q'Z_{21}[t_1,\tau])G_0(\tau) - \tilde{\xi}(\tau,t_1,p,q)A_{22}^{-1}(\tau)G_{21}(\tau)|\Psi_x(\tau-h))d\tau +$$
$$+\int\limits_{t_0}^{t_0+h}\rho((p'Z_{11}[t_1,\tau] + q'Z_{21}[t_1,\tau])\mu G_{12}(\tau) + (p'Z_{12}[t_1,\tau] + q'Z_{22}[t_1,\tau])G_{22}(\tau)|\Psi_y(\tau-h))d\tau\}, \qquad (15)$$

где

$$\xi(\tau,t_1,p,q) = \frac{d}{d\tau}[p'Z_{12}[t_1,\tau] + (1/\mu)\int\limits_{\tau}^{t_1} q'Y[t_1,s]A_{21}(s)Z_{12}[s,\tau]\,ds],$$

$$\tilde{\xi}(\tau,t_1,p,q) = \frac{d}{d\tau}[p'Z_{12}[t_1,\tau] + (1/\mu)\int\limits_{\tau}^{t_0+h} q'Y[t_1,s]A_{21}(s)Z_{12}[s,\tau]\,ds].$$

На основании теоремы А. Лебега [11, с. 259] при $0 < \mu \leqslant \mu_0$ (μ_0 достаточно мало) для любых $u(\cdot) \in P(\cdot)$, $p \in R^n$, $q \in R^m$б справедливы оценки

$$\left\| \int\limits_{t_0}^{t_1} \xi(\tau,t_1,p,q)A_{22}^{-1}(\tau)B_2(\tau)u(\tau)d\tau \right\| \leqslant \omega(\mu)[\|p\| + N_1\|q\|],$$
$$\left\| \int\limits_{t_0}^{t_0+h} \rho(\tilde{\xi}(\tau,t_1,p,q)A_{22}^{-1}(\tau)G_{21}(\tau)|\Psi_x(\tau-h))d\tau \right\| \leqslant \omega(\mu)[\|p\| + N_2\|q\|], \qquad (16)$$

где $\omega(\mu) = o(1)$, N_1, $N_2 > 0$ — некоторые постоянные.

2. АППРОКСИМАЦИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 1

Построим начальное приближение $u_\mu^{(0)}(\cdot)$, доставляющее оптимальное значение $\varepsilon^0(t_1) = J(u^0(\cdot))$ с точностью $o(1)$ при $\mu \to +0$.

Теорема 2. *При $0 < \mu \leqslant \mu_0$ (μ_0 достаточно мало) для любых $p \in R^n$, $q \in R^m$, выполняются соотношения:*

$$\chi^0(p,q) = \chi^{(0)}(p,q) + \hat{\omega}(\mu)\left\|l\right\|, \hat{\omega}(\mu) = o(1),$$

$$\chi^{(0)}(p,q) = -h_0^{**}(p,q) - \int\limits_{t_0}^{t_1}\rho(-w'(\tau,p,q)B_0(\tau)|P(\tau))d\tau - \int\limits_{0}^{\infty}\rho(-q'\Phi_0[t_1,s]B_2(t_1)|P(t_1))\,ds,$$

где $\Phi_0[t_1,s] = Y[t_1,t_1-\mu s]$;

$$\varepsilon^0(t_1) = \varepsilon^{(0)}(t_1) + o(1),$$
$$\varepsilon^{(0)}(t_1) = \max\{\chi^{(0)}(p,q) | p \in R^n,\ q \in R^m\} = \chi^{(0)}(p^{(0)}, q^{(0)}). \tag{17}$$

Для доказательства производятся преобразования соотношения (15), аналогичные сделанным для (3), и учитываются оценки (14), (16), причем (с учетом (2))

$$(1/\mu)\int\limits_{t_0}^{t_1} q'Y[t_1,\tau]B_2(\tau)u(\tau)\,d\tau = \int\limits_{0}^{\alpha(\mu)/\mu} q'\Phi_0[t_1,s]B_2(t_1)u(t_1-\mu s)\,ds + o(1),$$

где $\alpha = \alpha(\mu) \in R$, $\alpha > 0$, $\alpha = o(1)$, $\alpha/\mu \to +\infty$ при $\mu \to +0$. Пусть $v(\cdot) \in L_1^r$, $v(s) \in P(t_1)$, $s \in [0, +\infty)$. Из предположения 1 следует, что множество

$$\hat{V} = \left\{\hat{v} \in R^m \middle|\ \hat{v} = \int\limits_0^\infty \Phi_0[t_1,s]B_2(t_1)v(s)\,ds,\ v(s) \in P(t_1),\ s \geqslant 0\right\}$$

есть выпуклый компакт в R^m. При этом для любого $u(\tau) \in P(\tau)$, $\tau \in T$ найдется такая функция $v(\cdot) \in L_1^r$, $v(s) \in P(t_1)$, $s \in [0, +\infty)$, что при $0 < \mu \leqslant \mu_0$ выполняется следующее равенство:

$$\frac{1}{\mu}\int\limits_{t_0}^{t_1} q'Y[t_1,\tau]B_2(\tau)u(\tau)\,d\tau = \int\limits_0^\infty \Phi_0[t_1,s]B_2(t_1)v(s)\,ds + o(1).$$

Предположение 3. *1.* $\operatorname{rank}\{B_2(t_1), A_{22}(t_1)B_2(t_1), \ldots, A_{22}^{m-1}(t_1)B_2(t_1)\} = m$.

2. Максимум в (17) *достигается на векторе* $(l^{(0)})' = (p^{(0)'}, q^{(0)'})$ *таком, что* $s'(t_1; p^{(0)}, q^{(0)}) \neq 0$, $q^{(0)} \neq 0$.

Следует заметить, что при выполнении условия 1 из предположения 2 и условий 1, 2 из предположения 3 задача 1 разрешима [1, с. 110], [2, с. 76], т. е. существует управление $u^0(\cdot) \in P(\cdot)$, удовлетворяющее (4) при $0 < \mu \leqslant \mu_0$, причем вектор $(l^0)' = (p^{0'}, q^{0'})$, максимизирующий (3), отличен от нулевого.

Рассмотрим управляющее воздействие $u_\mu^{(0)}(\cdot)$:

$$u_\mu^{(0)}(\tau) = \begin{cases} u^{(0)}(\tau), & t_0 \leqslant \tau \leqslant t_1 - \alpha(\mu), \\ v^{(0)}((t_1-\tau)/\mu), & t_1 - \alpha(\mu) < \tau \leqslant t_1, \end{cases} \tag{18}$$

где $u^{(0)}(\cdot)$, $v^{(0)}(\cdot)$ определяются условиями:
для почти всех $\tau \in [t_0, t_1]$

$$w'(\tau, p^{(0)}, q^{(0)})B_0(\tau)u^{(0)}(\tau) = \min_{u(\tau)\in P(\tau)} w'(\tau, p^{(0)}, q^{(0)})B_0(\tau)u(\tau); \tag{19}$$

для почти всех $s \geqslant 0$

$$q^{(0)}\Phi_0[t_1,s]B_2(t_1)v^{(0)}(s) = \min_{v(s)\in P(t_1)} q^{(0)}\Phi_0[t_1,s]B_2(t_1)v(s). \tag{20}$$

Как уже отмечалось, при выполнении условия 1 из предположения 2 и условий 1, 2 из предположения 3 задача 1 разрешима, причем оптимальное управление этой задачи есть $u_\mu^{(0)}(\cdot)$ из (18), и доставляет функционалу J значение $J(u_\mu^{(0)}(\cdot)) = \varepsilon^{(0)}(t_1)$ (17), при $0 < \mu \leqslant \mu_0$, где μ_0 достаточно мало.

Следующую задачу будем называть *предельной* [3–5].

Задача 3. *Среди управлений* $u(\tau) \in P(\tau)$, $\tau \in T$, $v(s) \in P(t_1)$, $s \geqslant 0$, *найти* $u^{(0)} = u^{(0)}(\cdot)$, $v^{(0)} = v^{(0)}(\cdot)$:

$$J^{(0)}(u^{(0)}, v^{(0)}) = \min\{J^{(0)}(u(\cdot), v(\cdot)) | u(\cdot) \in P(\cdot), v(\cdot) \in P(t_1)\},$$

где $J^{(0)}(u(\cdot),v(\cdot)) = \max\{\varphi(\tilde z(t_1;u(\cdot),v(\cdot),x_0,\psi_x(\cdot)))|x_0\in X_0,\psi_x(\cdot)\in\Psi_x(\cdot)\}$,

$$\tilde z(t_1;u(\cdot),v(\cdot),x_0,\psi_x(\cdot)) = \begin{pmatrix} x_0(t_1) \\ -A_{22}^{-1}(t_1)(A_{21}(t_1)x_0(t_1)+G_{21}(t_1)x_0(t_1-h)) + \int\limits_0^\infty \Phi_0[t_1,s]B_2(t_1)v(s)\,ds \end{pmatrix},$$

причем $x_0(\cdot) = x_0(\cdot;u(\cdot),x_0,\psi_x(\cdot))$ — *решение* (5).

Теорема 3. *Пусть выполнены условие 1 предположения 2 и предположение 3. Тогда задача 3 разрешима, причем:*

1) $u^{(0)}$, $v^{(0)}$ *удовлетворяют условиям минимума* (19), (20) *и доставляют функционалу* $J^{(0)}$ *значение* $J^{(0)}(u^{(0)},v^{(0)}) = \varepsilon^{(0)}(t_1)$*;*

2) выполняется неравенство $\varepsilon^{(0)}(t_1)\leqslant\varepsilon_0(t_1)$.

Доказательство. Вычисляя минимум $J^{(0)}(\cdot)$, получим:

$$\min\{J^{(0)}(u(\cdot),v(\cdot))|u(\cdot)\in P(\cdot),v(\cdot)\in P(t_1)\} = \min_{u,v}\max_{p,q}\max_{x_0\in X_0}\max_{\psi_x\in\Psi_x(\cdot)}\{-\varphi^*(p,q)+$$
$$+p'x_0(t_1;u(\cdot),x_0,\psi_x(\cdot)) - q'A_{22}^{-1}(t_1)(A_{21}(t_1)x_0(t_1;u(\cdot),x_0,\psi_x(\cdot))+$$
$$+G_{21}(t_1)x_0(t_1-h;u(\cdot),x_0,\psi_x(\cdot))) + \int\limits_0^\infty q'\Phi_0[t_1,s]B_2(t_1)v(s)\,ds\} =$$
$$= \max\{\chi^{(0)}(p,q)|\ p\in R^n,\ q\in R^m\} = \varepsilon^{(0)}(t_1),$$

причем если $v(\cdot) = v = \mathrm{const}$, $v\in P(t_1)$, то $\int\limits_0^\infty q'\Phi_0[t_1,s]B_2(t_1)v ds = -q'A_{22}^{-1}(t_1)B_2(t_1)v$, и приходим к (7). Сравнивая предельную и вырожденную задачи, имеем неравенство $\varepsilon^{(0)}(t_1)\leqslant\varepsilon_0(t_1)$. Принимая во внимание (17), приходим к условиям (19), (20). □

Пусть $F(t_1,P(\cdot),z_0,\psi(\cdot))$ — множество достижимости к моменту $t=t_1>t_0+h$ для исходной системы (1) при $z_0\in Z_0$, $\psi(\cdot)\in\Psi$:

$$F(t_1,P(\cdot),z_0,\psi(\cdot)) = \{z\in R^{n+m}|z = z(t_1,u(\cdot),z_0,\psi(\cdot)),u(\cdot)\in P(\cdot)\},$$

$F_0(t_1,P(\cdot),x_0,\psi_x(\cdot))$ — множество достижимости (9) вырожденной системы (5), (6);

$$F^{(0)}(t_1,P(\cdot),x_0,\psi_x(\cdot)) = \{\tilde z\in R^{n+m}|\tilde z = \tilde z(t_1,u(\cdot),v(\cdot),x_0,\psi_x(\cdot)),u(\cdot)\in P(\cdot),v(\cdot)\in P(t_1)\}.$$

Тогда при $0<\mu\leqslant\mu_0$ для $l\in R^{n+m}$, $\|l\|=1$, $x_0\in X_0$, $y_0\in Y_0$, $\psi_x(\cdot)\in\Psi_x(\cdot)$, $\psi_y(\cdot)\in\Psi_y(\cdot)$, справедливы следующие соотношения (аналогично [4, 5]):

$$\rho(l|F(t_1,P(\cdot),z_0,\psi(\cdot)) = \rho(l|F^{(0)}(t_1,P(\cdot),x_0,\psi_x(\cdot)) + o(1),$$
$$\rho(l|F^{(0)}(t_1,P(\cdot),x_0,\psi_x(\cdot))\geqslant\rho(l|F_0(t_1,P(\cdot),x_0,\psi_x(\cdot)).$$

Таким образом, для любых $x_0\in X_0$, $\psi_x(\cdot)\in\Psi_x(\cdot)$ выполняется включение

$$F^{(0)}(t_1,P(\cdot),x_0,\psi_x(\cdot))\supseteq F_0(t_1,P(\cdot),x_0,\psi_x(\cdot)).$$

Пусть μ_k, $k=1,2,\ldots$, где $0<\mu_k<\mu_0$ есть некоторая сходящаяся к нулю последовательность чисел. Этой последовательности чисел сопоставим последовательность управлений вида (18): $u_k^{(0)}(\cdot) = u_{\mu_k}^{(0)}(\cdot)$, $k=1,2,\ldots$ В силу слабой компактности множества P в пространстве $L_2^r(T)$ можно выделить подпоследовательность $u_{k_j}^{(0)}(\cdot)$, слабо сходящуюся к некоторой функции $u^{(0)}(\cdot)\in P$. Рассмотрим соответствующую последовательность оптимальных (для задачи 1) управлений $u_{k_j}^0(\cdot) = u^0(\cdot,\mu_{k_j})$, $j=1,2,\ldots$, удовлетворяющих (4). Обозначим $v_{k_j}^0(\cdot)\equiv v^0(\cdot,\mu_{k_j})$, $v^0(s,\mu) = u^0(t_1-\mu s,\mu)$, $0\leqslant s\leqslant 1/\varepsilon<\alpha(\mu)/\mu$ при $0<\mu\leqslant\mu_0$, где $\varepsilon>0$ — произвольно выбранное число, μ_0 — достаточно мало.

Теорема 4. *Пусть выполнены условие 1 из предположения 2 и предположение 3 и пусть максимум в* (17) *достигается на единственном векторе* $l^{(0)}$. *Тогда верно следующее:*

1) $u^0_{k_j}(\cdot)$ *слабо сходится к* $u^{(0)}(\cdot)$, *для которого выполняется* (19), $v^0_{k_j}(\cdot)$ *слабо сходится к* $v^{(0)}(\cdot)$, *для которого выполняется* (20) ($s \in [0, 1/\varepsilon]$ *для любого* $\varepsilon > 0$);

2) для $u^{(0)}_\mu(\cdot)$ *из* (18) *при* $\psi(\cdot) \in \Psi(\cdot)$ *имеет место следующее неравенство:*

$$\left|\rho(l|Z(t_1; u^0(\cdot), Z_0, \psi(\cdot))) - \rho(l|Z(t_1; u^{(0)}_\mu(\cdot), Z_0, \psi(\cdot)))\right| \leqslant \omega_0(\mu),$$

где $\omega_0(\mu) = o(1)$, $0 < \mu \leqslant \mu_0$, *неравенство равномерно по всем* $l \in R^{n+m}$, $l'l = 1$;

3) при $\mu \to +0$ *множество* $Z(t_1; u^0(\cdot), Z_0, \psi(\cdot))$ *сходится в хаусдорфовой метрике к выпуклому замкнутому ограниченному множеству*

$$\tilde{Z}(t_1; u^{(0)}(\cdot), v^{(0)}(\cdot), X_0, \psi_x(\cdot)) = \{\tilde{z} \in R^{n+m} | \ \tilde{z} = \tilde{z}(t_1;\ u^{(0)}(\cdot), v^{(0)}(\cdot), x_0), x_0 \in X_0,\ \psi_x(\cdot)\}.$$

Доказательство. В силу оценок (2), (14), (16), теоремы 2, учитывая соотношение [4, формула (2.5)]: при $t \in T$, $t_0 \leqslant \tau \leqslant t - \alpha(\mu)$,

$$Z^{(0)}_{21}[t, \tau] = -A^{-1}_{22}(t)(A_{21}(t)X[t, \tau] + G_{21}(t)X[t - h, \tau]) + o(1), \qquad 0 < \mu \leqslant \mu_0;$$

для любых $u(\cdot) \in P(\cdot)$, $v(s) = u(t_1 - \mu s)$, $s \in [0, \alpha(\mu)/\mu)$, $l' = (p', q') \in R^{n+m}$ справедливо представление:

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} r(\tau; t_1, l, \mu)u(\tau)\, d\tau =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1-\alpha(\mu)} w'(\tau, p, q)B_0(\tau)u(\tau)\, d\tau + \int\limits_{0}^{\alpha(\mu)/\mu} q'Y[t_1, t_1 - \mu s; \mu]B_2(t_1 - \mu s)v(s)\, ds + \xi'(l, \mu), \qquad (21)$$

причем $|\xi'(l, \mu)| \leqslant \|l\|\omega'(\mu)$, где $\omega'(\mu) = o(1)$ при $0 < \mu \leqslant \mu_0$.

Из предположения 3, единственности $l^{(0)}$, теоремы 2 имеем $l^0 = l^{(0)} + o(1)$. Тогда из слабой компактности P получим утверждение 1) теоремы. Утверждение 2) (а также утверждение 3) при оценке разности опорных функций указанных множеств) определяется на основании (21), свойств управления $u^0(\cdot)$ и управления, $u^0_\mu(\cdot)$, определенного в (18). □

Библиографический список

1. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М. : Наука, 1968. 475 с.
2. *Куржанский А. Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М. : Наука, 1977. 392 с.
3. *Кремлёв А. Г.* Асимптотические свойства ансамбля траекторий сингулярно возмущенной системы в задаче оптимального управления // Автомат. и телемех. 1993. № 9. С. 61–78.
4. *Гребенникова И. В.* Аппроксимация решения в минимаксной задаче управления сингулярно возмущенной системой с запаздыванием // Изв. вузов. Математика. 2011. № 10. С. 28–39.
5. *Гребенникова И. В.* Задача оптимального управления сингулярно возмущенной системой с запаздыванием при интегральных квадратичных ограничениях // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 4. С. 3–11.
6. *Кремлёв А. Г., Гребенникова И. В.* Об асимптотике ансамбля траекторий управляемой сингулярно возмущенной системы с запаздыванием // Новости научной мысли – 2006 : материалы науч.-практ. конф. : в 4 т. Днепропетровск : Наука и образование, 2006. Т. 4. С. 65–69.
7. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М. : Мир, 1973. 492 с.
8. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М. : Физматгиз, 1959. 468 с.
9. *Кириллова Ф. М.* Относительная управляемость линейных динамических систем с запаздыванием // Докл. АН СССР. 1967. Т. 174, № 6. С. 1260–1263.
10. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. М. : Мир, 1967. 547 с.
11. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. М. : Наука, 1974. 468 с.

Approximation of Control for Singularly Perturbed System with Delay with Geometric Constraints

I. V. Grebennikova, A. G. Kremlev

Ural Federal University, 19, Mira st., 620002, Ekaterinburg, Russia, giv001@mail.ru, kremlev001@mail.ru

The control problem for the singularly perturbed system with delay with indeterminate initial conditions and geometric constraints on the control resources according to the minimax criterion is considered. A limiting problem is formulated for which a specially selected quality functional is chosen. We propose the procedure for initial approximation construction of a control response in the control minimax problem.

Key words: singularly perturbed system with delay, optimal control, fundamental matrix.

References

1. Krasovskii N. N. *Teorija upravlenija dvizheniem* [The Theory of Motion Control]. Moscow, Nauka, 1968, 475 p. (in Russian).
2. Kurzhanskij A. B. *Upravlenie i nabljudenie v uslovijah neopredelennosti* [Control and Surveillance in the Face of Uncertainty]. Moscow, Nauka, 1977, 392 p. (in Russian).
3. Kremlev A. G. Asymptotic properties of a set of trajectories of a singularly perturbed system in the optimal control problem. *Autom. Remote Control* [Avtomatika i Telemehanika], 1993, vol. 54, iss. 9, pp. 1353–1367.
4. Grebennikova I. V. Solution approximation in a minimax control problem for a singularly perturbed system with delay. *Russian Math.* [Izvestiya VUZ. Matematika], 2011, vol. 55, iss. 10, pp. 23–33. DOI: 10.3103/S1066369X11100045.
5. Grebennikova I. V. The problem of optimal control for singularly perturbed system with delay with integral quadratic constraints. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2012, vol. 12, iss. 4, pp. 3–11 (in Russian).
6. Kremlev A. G., Grebennikova I. V. About asymptotic of a set of trajectories of a singularly perturbed system with delay. *Novosti nauchnoj mysli – 2006 : materialy mezhdunarodnoi nauch. prakt. konf.* [News of Scientific Thought : proceedings of the international conference]. Dneproperovsk, Nauka i obrazovanie, 2006, vol. 4, pp. 65–69 (in Russian).
7. Rokafellar R. *Vypuklyj analiz* [Convex Analysis]. Moscow, Mir, 1973, 492 p. (in Russian).
8. Krasovskii N. N. *Nekotorye zadachi teorii ustojchivosti dvizhenija* [Some Problems in the Theory of Stability of Motion]. Moscow, Fizmatgiz, 1959, 468 p. (in Russian).
9. Kirillova F. M. Relative controllability of linear dynamic systems with delay. *Doklady AN SSSR*, 1967, vol. 174, iss. 6, pp. 1260–1263 (in Russian).
10. Bellman R., Kuk K. *Differencial'no-raznostnye uravnenija* [Differential-Difference Equations]. Moscow, Mir, 1967, 547 p. (in Russian).
11. Natanson I. P. *Teorija funkcij veshhestvennoj peremennoj* [Theory of Functions of a Real Variable]. Moscow, Nauka, 1974, 468 p. (in Russian).

УДК 514.174.3+519.65

КОЭФФИЦИЕНТ ИЗОПЕРИМЕТРИЧНОСТИ СИМПЛЕКСА В ЗАДАЧЕ АППРОКСИМАЦИИ ПРОИЗВОДНЫХ

В. А. Клячин[1], Д. В. Шуркаева[2]

[1] Доктор физико-математических наук, доцент кафедры компьютерных наук и экспериментальной математики, Волгоградский государственный университет, klchnv@mail.ru

[2] Аспирант кафедры компьютерных наук и экспериментальной математики, Волгоградский государственный университет, diana-547@ya.ru

В статье вводится величина $\sigma(G) = |\partial G|^{n/(n-1)}/|G|$ коэффициента изопериметричности области $G \subset \mathbb{R}^n$. В терминах этой величины получены оценки погрешности $\delta_\triangle(f)$ вычисления градиента при кусочно-линейной интерполяции функций классов $C^1(G)$, $C^2(G)$, $C^{1,\alpha}(G)$, $0 < \alpha < 1$. Задача получения таких оценок нетривиальна, особенно в многомерном случае. Здесь надо отметить, что в двумерном случае для функций класса $C^2(G)$ сходимость производных обеспечивается классическим условием Делоне. В многомерном же случае, как показывают примеры, подобного условия не достаточно. Тем не менее в статье показано, как применить полученные оценки для триангуляции Делоне многомерных дискретных ε-сетей. Полученные результаты дают достаточные условия сходимости производных на триангуляциях Делоне дискретных ε-сетей при $\varepsilon \to 0$. Кроме этого найдены соотношения искажения коэффициента изопериметричности симплексов при квазиизометричном преобразовании.

Ключевые слова: коэффициент изопериметричности, симплекс, кусочно-линейная интерполяция.