ded solutions of nonlinear n^{th}-order differential equations (existence, almost periodicity, and stability). *Differential Equations*, 2012, vol. 48, no. 5, pp. 670–680. DOI: 10.1134/S0012266112050059.

14. Baskakov A. G. On correct linear differential operators. *Sbornik : Mathematics*, 1999, vol. 190, no. 3, pp. 323–348. DOI: 10.1070/SM1999v190n03ABEH000390.

15. Baskakov A. G. Analysis of linear differential equations by methods of the spectral theory of difference operators and linear relations. *Russian Math. Surv.*, 2013, vol. 68, no. 1, pp. 69–116. DOI: RM2013v068n01ABEH004822.

16. Baskakov A. G. Linear differential operators with unbounded operator coefficients and semigroups of bounded operators. *Math. Notes*, 1996, vol. 59, no. 6, pp. 586–593. DOI: 10.1007/BF02307207.

17. Baskakov A. G. Spectral analysis of differential operators and semi-groups of difference operators I. *Differential Equations*, 1996, vol. 33, no. 10, pp. 1299–1306 (in Russian).

18. Baskakov A. G. Spectral analysis of differential operators and semi-groups of difference operators II. *Differential Equations*, 2001, vol. 37, no. 1, pp. 1–10. DOI: 10.1023/A:1019298028556.

19. Baskakov A. G., Sintyaev Yu. N. Finite-difference operators in the study of differential operators: Solution estimates. *Differential Equations*, 2010, vol. 46, no. 2, pp. 214–223. DOI: 10.1134/S0012266110020072.

УДК 517.5

ОДИН ОТРИЦАТЕЛЬНЫЙ ПРИМЕР ФОРМОСОХРАНЯЮЩЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

М. Г. Плешаков[1], С. В. Тышкевич[2]

[1]Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций и приближений, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, pleshakovmg@mail.ru

[2]Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций и приближений, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, tyszkiewicz@yandex.ru

Пусть даны $2s$ точек y_i: $-\pi \le y_{2s} < \ldots < y_1 < \pi$. Отправляясь от этих точек, определим точки y_i для всех целых i при помощи равенства $y_i = y_{i+2s} + 2\pi$. Будем писать $f \in \triangle^{(1)}(Y)$, если $f(x)$ — 2π-периодическая непрерывная функция и $f(x)$ не убывает на $[y_i, y_{i-1}]$, если i нечетное; $f(x)$ не возрастает на $[y_i, y_{i-1}]$, если i четное. Обозначим через $E_n^{(1)}(f;Y)$ величину наилучшего равномерного приближения функции $f \in \triangle^{(1)}(Y)$ тригонометрическими полиномами из того же множества $\triangle^{(1)}(Y)$. В статье доказан следующий контрпример формосохраняющего приближения.

Пример. Для любых $k \in \mathbb{N}$, $k > 2$, и $n \in \mathbb{N}$ существует функция $f(x) := f(x; s, Y, n, k)$ такая, что $f \in \triangle^{(1)}(Y)$ и

$$E_n^{(1)}(f;Y) > B_Y n^{\frac{k}{2}-1}\omega_k\left(f;\frac{1}{n}\right),$$

где $B_Y =$const, зависит только от Y и k; ω_k — модуль непрерывности порядка k функции f.

Ключевые слова: тригонометрические полиномы, аппроксимация полиномами, формосохранение.

Получение оценки уклонения при равномерном приближении непрерывных функций алгебраическими многочленами и тригонометрическими полиномами является одной из основных задач в теории приближения функций. Наиболее широкое применение в теоретических исследованиях и в прикладных областях математики получили неравенства типа Джексона – Зигмунда – Стечкина [1–3], Никольского – Тимана – Дзядыка – Фройда – Теляковского – Брудного [4–9]. Особый интерес представляет случай, когда приближение является формосохраняющим (Shape-preserving Approximation), т. е. когда аппарат приближения сохраняет некоторые свойства приближаемой функции (монотонность, выпуклость и т. д.). В 1969 г. G. G. Lorentz и K. L. Zeller [10] построили пример, который показывает, что величина наилучшего монотонного приближения алгебраическими многочленами монотонной функции по порядку, вообще говоря, «хуже» величины наилучшего приближения без ограничений. В работах И. А. Шевчука [11] и А. С. Шведова [12, 13] построены примеры, показывающие, что оценки типа Джексона – Стечкина величины приближения монотонной функции монотонными многочленами через модуль непрерывности порядка 3 и выше вообще неверны, в отличие от приближения без ограничений.

Однако результаты по комонотонному приближению периодических функций тригонометрическими полиномами, за исключением результата, полученного G. G. Lorentz и K. L. Zeller 1968 г. и касающегося так называемых «колоколообразных» функций, долгое время не были известны.

В данной статье построен контрпример, указывающий, что величина наилучшего комонотонного приближения периодических функций тригонометрическими полиномами по порядку, вообще говоря, «хуже» величины наилучшего приближения без ограничений.

Пусть $\mathbb{C}$ — пространство непрерывных 2π-периодических действительнозначных функций f с равномерной нормой $\|f\| := \max\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$; $\omega(f;t)$ — модуль непрерывности функции f; $\mathbb{T}_n$, $n \in \mathbb{N}$, — пространство тригонометрических полиномов

$$\tau_n(x) := a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

порядка $\leq n$.

Пусть на промежутке $[-\pi, \pi)$ заданы $2s$ точек y_i: $-\pi \leq y_{2s} < y_{2s-1} < \ldots < y_1 < \pi$. Отправляясь от этих точек, при помощи равенства $y_i = y_{i+2s} + 2\pi$ определим точки y_i для всех целых индексов i; в частности, $y_0 = y_{2s} + 2\pi$, $y_{2s+1} = y_1 - 2\pi$ и т. д. Обозначим $Y := \{y_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$. Множество всех таких наборов обозначим $\mathbb{Y}_{2s}$. Будем писать $f \in \triangle^{(1)}(Y)$, если $f(x)$ — 2π-периодическая непрерывная функция и $f(x)$ не убывает на $[y_i, y_{i-1}]$, если i нечетное; $f(x)$ не возрастает на $[y_i, y_{i-1}]$, если i четное.

Обозначим

$$\Pi(x) := \prod_{i=1}^{2s} \sin\frac{x - y_i}{2}$$

и заметим, что $\Pi \in \mathbb{T}_s$, т. е. $\Pi(x)$ — тригонометрический полином порядка s.

Зафиксируем $s \in \mathbb{N}$ и набор $\{y_i\}_{i\in\mathbb{Z}} = Y \in \mathbb{Y}_{2s}$. В силу периодичности без потери общности будем считать, что точка 0 принадлежит набору Y, т. е. $y_{i_*} = 0$ при некотором $i_* \in \mathbb{Z}$.

Обозначим

$$\Pi_*(x) := \prod_{\substack{i=1\\ i\neq i_*}}^{2s} \sin\frac{x - y_i}{2}.$$

Для определённости будем считать, что i_* — нечётное число. Тогда $\Pi_*(0) > 0$.

Обозначим через $2d$ расстояние от y_{i_*} до ближайшей точки набора Y, заметим,

$$d \leq \frac{\pi}{2}, \qquad \Pi_*(x) > 0, \qquad x \in (-2d, 2d).$$

Положим

$$M := \max_{x\in\mathbb{R}} |\Pi_*(x)|, \qquad M_1 := \max_{x\in\mathbb{R}} |\Pi_*'(x)|, \qquad m := \min_{x\in[-d,d]} \Pi_*(x).$$

Отправляясь от набора Y, определим натуральное число N. А именно обозначим через N наименьшее из чисел, удовлетворяющих неравенству

$$m \sin^3\frac{d}{8} \geq \frac{5}{N}\left(M + M_1\right).$$

Тогда

$$m \sin\frac{d}{8} \geq \frac{5}{N}\left(M + M_1\right). \tag{1}$$

Следовательно,

$$d > \frac{40}{N}. \tag{2}$$

Выберем натуральное число j^* из условия

$$\frac{\pi}{N} + j^*\frac{2\pi}{N} \leq d < \frac{\pi}{N} + (j^*+1)\frac{2\pi}{N}.$$

Обозначим $d^* := \dfrac{\pi}{N} + j^*\dfrac{2\pi}{N}$ и заметим,

$$\frac{1}{2}d < d^* \leq d. \tag{3}$$

При построении контрпримера будет использовано ядро Джексона

$$J_N(t) = \frac{3}{2N(2N^2+1)} \left(\frac{\sin \frac{Nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^4 .$$

Напомним (см. например [14, с. 127]) некоторые свойства ядра Джексона:

а) $J_N(t)$ является чётным неотрицательным тригонометрическим полиномом порядка $2N-2$;

б)

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} J_N(t)dt = 1; \tag{4}$$

в) для любой непрерывно дифференцируемой периодической функции g в каждой точке x имеет место неравенство

$$\frac{1}{\pi} \left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} (g(t)-g(x))J_N(t-x)dt \right| \le \frac{5}{N} \|g'\|. \tag{5}$$

Обозначим

$$\tilde{M} := \frac{1}{\pi} \|J_N\|,$$

$$\tilde{m} := \frac{1}{\pi} \min_{t \in [-\frac{\pi}{2N}, \frac{\pi}{2N}]} J_N(t-d^*) = \frac{1}{\pi} \min_{t \in [-\frac{\pi}{2N}, \frac{\pi}{2N}]} J_N(t+d^*)$$

и заметим, что $\tilde{m} > 0$. Наконец, положим

$$\overline{M} := 2 + \pi^3 \sqrt{\frac{M\tilde{M}}{m\tilde{m}}}.$$

Всюду далее в главе предполагаем, что число b удовлетворяет неравенствам

$$0 < b < \frac{\pi}{2N\overline{M}}, \tag{6}$$

в частности, с учетом (2) и (3),

$$\frac{d^*-2b}{2} > \frac{d}{8}. \tag{7}$$

Пример. Для любых $k \in \mathbb{N}$, $k > 2$, и $n \in \mathbb{N}$ существует функция $f(x) := f(x; s, Y, n, k)$ такая, что $f \in \triangle^{(1)}(Y)$ и

$$E_n^{(1)}(f;Y) > B_Y n^{\frac{k}{2}-1} \omega_k \left(f; \frac{1}{n} \right), \tag{8}$$

где $B_Y = \mathrm{const}$, зависит только от Y и k.

Доказательство. Для каждого b обозначим

$$Q_r(x,b) := Q_r(x) := \frac{1}{\pi} \int\limits_0^x \sin \frac{t-2b}{2} \Pi_*(t) J_N(t-d^*)\, dt,$$

$$Q_l(x,b) := Q_l(x) := \frac{1}{\pi} \int\limits_0^x \sin \frac{t-2b}{2} \Pi_*(t) J_N(t+d^*)\, dt$$

и заметим, что

$$Q_r(2\pi) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \sin \frac{d^*-2b}{2} \Pi_*(d^*) J_N(t-d^*)dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left(\sin \frac{t-2b}{2} \Pi_*(t) - \sin \frac{d^*-2b}{2} \Pi_*(d^*) \right) J_N(t-d^*)dt.$$

Поэтому в силу (4), (5), (7) и (1)

$$Q_r(2\pi) \geq \sin\frac{d^*-2b}{2}\Pi_*(d^*) - \frac{5}{N}\left\|\left(\sin\frac{\cdot-2b}{2}\Pi_*(\cdot)\right)'\right\| \geq$$

$$\geq m\sin\frac{d}{8} - \frac{5}{N}\left(M+M_1\right) \geq 0.$$

Аналогично

$$Q_l(2\pi) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \sin\frac{-d^*-2b}{2}\Pi_*(-d^*)J_N(t+d^*)dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\sin\frac{t-2b}{2}\Pi_*(t) - \sin\frac{-d^*-2b}{2}\Pi_*(-d^*)\right)J_N(t+d^*)dt.$$

Поэтому в силу (4), (5), (7) и (1)

$$Q_l(2\pi) \leq \sin\frac{-d^*-2b}{2}\Pi_1(-d^*) + \frac{5}{N}\|\left(\sin\frac{\cdot-2b}{2}\Pi_1(\cdot)\right)'\| \leq$$

$$\leq -m\sin\frac{d}{8} + \frac{5}{N}\left(M+M_1\right) \leq 0.$$

Следовательно, существует число $\alpha_b \in [0,1]$ такое, что

$$\alpha_b Q_r(2\pi) + (1-\alpha_b)Q_l(2\pi) = 0. \tag{9}$$

Положим $Q(x,b) := Q(x) := \alpha_b Q_r(x) + (1-\alpha_b)Q_l(x)$. Равенство (9) означает, что $Q(x)$ есть тригонометрический полином, порядок которого в соответствии с a) равен $s+2N-2$. Чтобы построить функцию f докажем лемму.

Лемма. *Для любого b существует число b_0 такое, что*

$$2b < b_0 < \overline{M}b \tag{10}$$

и

$$Q(b_0) = 0. \tag{11}$$

Доказательство. Заметим, что $Q(2b) < 0$. Кроме того, справедлива оценка

$$|Q(2b)| \leq M\tilde{M}\left|\int\limits_0^{2b}\sin\frac{t-2b}{2}dt\right| = 4M\tilde{M}\sin^2\frac{b}{2} \leq M\tilde{M}b^2.$$

С другой стороны, поскольку в силу (6) $\overline{M}b < \frac{\pi}{2N}$, то

$$Q(\overline{M}b) - Q(2b) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{2b}^{\overline{M}b}\sin\frac{t-2b}{2}\Pi_*(t)\left(\alpha_b J_N(t-d^*) + (1-\alpha_b)J_N(t+d^*)\right)dt \geq$$

$$\geq m\tilde{m}\int\limits_{2b}^{\overline{M}b}\sin\frac{t-2b}{2}dt = 4m\tilde{m}\sin^2\frac{(\overline{M}-2)b}{4} \geq \frac{m\tilde{m}}{\pi^2}(\overline{M}-2)^2b^2.$$

Откуда

$$Q(\overline{M}b) = Q(\overline{M}b) - Q(2b) + Q(2b) \geq \frac{m\tilde{m}}{\pi^2}(\overline{M}-2)^2b^2 - M\tilde{M}b^2 = M\tilde{M}b^2(\pi^4-1) > 0.$$

Лемма доказана.

Продолжим доказательство примера. Пусть $K_b(x)$ — 2π-периодическая функция такая, что

$$K_b(x) := \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \in (0, b_0), \\ 1, & \text{если} \quad x \in [-\pi, 0] \cup [b_0, \pi]. \end{cases}$$

Положим

$$g(x) := g(x; b) := \frac{1}{\pi}\int_0^x K_b(x) \sin\frac{1}{2}(t - 2b)\Pi_*(t) \left(\alpha_b J_N(t - d^*) + (1 - \alpha_b) J_N(t + d^*)\right) dt.$$

Равенство (11) вкупе с (10) означает, что g есть 2π-периодическая функция, более того, ясно, что $g \in \triangle^{(1)}(Y)$. Очевидны следующие неравенства

$$\|g - Q\| \le M\tilde{M} b_0 \sin\frac{b_0 - 2b}{2} < \frac{1}{2} M\tilde{M}\overline{M}^2 b^2 =: c_1 b^2,$$

$$\omega_k\left(g; \frac{1}{n}\right) \le 2^k \|g - Q\| + \left(\frac{1}{n}\right)^k \|Q^{(k)}\| \le 2^k c_1 b^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^k M_k, \tag{12}$$

где $M_k = \mathrm{const}$, не зависит от b и n.

Возьмём произвольный полином $\tau_n \in \mathbb{T}_n \cap \triangle^{(1)}(Y)$, $n > s + 2N - 2$, положим

$$R_n(x) := \tau_n(x) - Q(x)$$

и заметим, что

$$R_n'(b) = \tau_n'(b) - Q'(b) \ge -Q'(b) \ge \frac{bm\tilde{m}}{\pi} =: c_2 b.$$

Применяя неравенство Бернштейна

$$\|\tau_n'\| \le n\|\tau_n\|, \qquad \tau_n \in \mathbb{T}_n,$$

получаем:

$$c_2 b \le R_n'(b) \le n\|R_n\|,$$

откуда

$$\frac{c_2 b}{n} \le \|R_n\| \le \|\tau_n - g\| + \|g - Q\| \le \|\tau_n - g\| + c_1 b^2,$$

т. е.

$$\|\tau_n - g\| \ge \frac{c_2 b}{n} - c_1 b^2 = \frac{c_2 b}{n}\left(1 - \frac{c_1 b n}{c_2}\right). \tag{13}$$

Теперь для доказательства (8) при каждом $n > N_0$ возьмем

$$f(x) := g(x; b_n), \qquad b_n := \frac{c_2}{2c_1}\left(\frac{1}{n}\right)^{k/2},$$

где N_0 выбрано из условий $\overline{M} b_{N_0} < \dfrac{\pi}{2N}$ и $N_0 > s + 2N - 2$. Тогда (8) следует из (12) и (13):

$$\frac{\|\tau_n - f\|}{\omega_k\left(f; \dfrac{1}{n}\right)} \ge \frac{\dfrac{c_2 b_n}{n}\left(1 - \dfrac{c_1 b_n n}{c_2}\right)}{2^k c_1 b_n^2 + \left(\dfrac{1}{n}\right)^k M_k} \ge \frac{1}{2n}\,\frac{c_2 b_n}{2^k c_1 b_n^2 + \left(\dfrac{1}{n}\right)^k M_k} =: B_Y n^{\frac{k}{2} - 1}.$$

Для случая $n > N_0$ неравенство (8) доказано. Для случая $n < N_0$ оно следует из неравенства $E_n^{(1)}(f; Y) \ge E_{1+N_0}^{(1)}(f; Y)$. Пример доказан.

Библиографический список

1. *Jackson D.* On approximation by trigonometric sums and polynomials // Trans. Amer. Math. Soc. 1912. Vol. 13. P. 491–515. DOI: http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9947-1912-1500930-2.
2. *Zygmund A.* Smooth Functions // Duke Math. J. 1945. Vol. 12, № 1. P. 47–76.
3. *Стечкин С. Б.* О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами // Докл. АН СССР. 1952. Т. 83, № 5. С. 651–654.
4. *Копотун К. А.* Равномерные оценки ковыпуклого приближения функций многочленам // Мат. заметки. 1992. Т. 51, № 3. С. 35–46.
5. *Тиман А. Ф.* Усиление теоремы Джексона о наилучшем приближении непрерывных функций на конечном отрезке вещественной оси // Докл. АН СССР. 1951. Т. 78, № 1. С. 17–20.
6. *Дзядык В. К.* О приближении функций обыкновенными многочленами на конечном отрезке вещественной оси // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1958. Т. 22, № 3. С. 337–354.
7. *Freud G.* Uber die Approximation Reelen Stetiger Functionen Durch Gewohnliche Polinome // Math. Ann. 1959. T. 137, № 1. C. 17–25.
8. *Теляковский С. А.* Две теоремы о приближении функций алгебраическими полиномами // Мат. сб. 1966. Т. 70 (112), № 2. С. 252–265.
9. *Брудный Ю. А.* Приближение функций алгебраическими многочленами // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1968. Т. 32, № 4. С. 780–787.
10. *Lorentz G. G., Zeller K. L.* Degree of Approximation by Monotone Polynomials. II // J. Approx. Theory, 1969. Vol. 2, № 3. P. 265–269.
11. *Шевчук И. А.* Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций. Киев : Наук. думка, 1992. 225 с.
12. *Шведов А. С.* Теорема Джексона в L_p, $0 < p < 1$, для алгебраических многочленов и порядки комонотонных приближений // Мат. заметки. 1979. Т. 25, № 1. С. 107–117.
13. *Шведов А. С.* Комонотонное приближение функций многочленами // Докл. АН СССР. 1980. Т. 250, № 1. С. 39–42.
14. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М. : Наука, 1977. 512 с.

One Counterexample of Shape-preserving Approximation

M. G. Pleshakov, S. V. Tyshkevich

Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., 410012, Saratov, Russia, pleshakovmg@mail.ru, tyszkiewicz@yandex.ru

Let $2s$ points $y_i = -\pi \le y_{2s} < \ldots < y_1 < \pi$ be given. Using these points, we define the points y_i for all integer indices i by the equality $y_i = y_{i+2s} + 2\pi$. We shall write $f \in \triangle^{(1)}(Y)$ if f is a 2π-periodic function and f does not decrease on $[y_i, y_{i-1}]$ if i is odd; and f does not increase on $[y_i, y_{i-1}]$ if i is even. We denote $E_n^{(1)}(f;Y)$ the value of the best uniform comonotone approximation. In this article the following counterexample of comonotone approximation is proved.

Example. For each $k \in \mathbb{N}$, $k > 2$, and $n \in \mathbb{N}$ there a function $f(x) := f(x; s, Y, n, k)$ exists, such that $f \in \triangle^{(1)}(Y)$ and

$$E_n^{(1)}(f;Y) > B_Y n^{\frac{k}{2}-1}\omega_k\left(f; \frac{1}{n}\right),$$

where B_Y =const, depending only on Y and k; ω_k is the modulus of smoothness of order k, of f.

Key words: trigonometric polynomials, polynomial approximation, shape-preserving.

References

1. Jackson D. On approximation by trigonometric sums and polynomials. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1912, vol. 13, pp. 491–515. DOI: http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9947-1912-1500930-2.

2. Zygmund A. Smooth Functions. *Duke Math. J.*, 1945, vol. 12, no. 1, pp. 47–76.

3. Stechkin S. B. O nailuchshem priblizhenii periodicheskikh funktsii trigonometricheskimi polinomami [On the best approximation of periodic functions by trigonometric polynomials]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1952, vol. 83, no. 5, pp. 651–654 (in Russian).

4. Kopotun K. A. Uniform estimates of the coconvex approximation of functions by polynomials. *Math. Notes*, 1992, vol. 51, no. 3, pp. 245-–254.

5. Timan A. F. Usilenie teoremy Dzheksona o nailuchshem priblizhenii nepreryvnykh funktsii na konechnom otrezke veshchestvennoi osi [The strengthening of the theorem of Jackson on the best approximation of continuous functions on a finite interval of the real axis]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1951, vol. 78, no. 1, pp. 17–20 (in Russian).

6. Dzyadyk V. K. O priblizhenii funktsii obyknovennymi mnogochlenami na konechnom otrezke veshchestvennoi osi [On the approximation of functions by ordinary

polynomials on a finite interval of the real axis]. *Izvestiia AN SSSR. Ser. matematicheskaia*, 1958, vol. 22, no. 3, pp. 337–354 (in Russian).

7. Freud G. Über die Approximation Reelen Stetiger Functionen Durch Gewohnliche Polinome. *Math. Ann.*, 1959, vol. 137, no. 1, pp. 17–25.

8. Teljakovskii S. A. Two theorems on approximation of functions by algebraic polynomials. *Mat. Sb. (N. S.)*, 1966, vol. 70(112), no. 2, pp. 252–265 (in Russian).

9. Brudnyi Yu. A. The approximation of functions by algebraic polynomials. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 1968, vol. 2, no. 4, pp. 735–743. DOI: 10.1070/IM1968v002n04ABEH000662

10. Lorentz G. G., Zeller K. L. Degree of Approximation by Monotone Polynomials. II. *J. Approx. Theory*, 1969, vol. 2, no. 3, pp. 265–269.

11. Shevchuk I. A. *Priblizhenie mnogochlenami i sledy nepreryvnykh na otrezke funktsii* [Approximation by polynomials and traces continuous on the interval functions]. Kiev, Naukova dumka, 1992. 225 p. (in Russian)

12. Shvedov A. S. Jackson's theorem in L^p, $0 < p < 1$, for algebraic polynomials, and orders of comonotone approximations. *Math. Notes*, 1979, vol. 25, no. 1, pp. 57–63.

13. Shvedov A. S. Komonotonnoe priblizhenie funktsii mnogochlenami [Comonotone approximation of functions by polynomials]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 1980, vol. 250, no. 1, pp. 39–42 (in Russian).

14. Dzyadyk V. K. *Vvedenie v teoriiu ravnomernogo priblizheniia funktsii polinomami* [Introduction to the theory of uniform approximation of functions by polynomials]. Moscow, Nauka, 1977, 512 p. (in Russian)

УДК 512.572

О ТОЖДЕСТВАХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА В АЛГЕБРАХ ПУАССОНА

С. М. Рацеев

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информационной безопасности и теории управления, Ульяновский государственный университет, RatseevSM@mail.ru

В работе рассматриваются так называемые customary и extended customary тождества в алгебрах Пуассона. Показано, что последовательность коразмерностей $\{r_n(V)\}_{n\geq 1}$ любого extended customary пространства многообразия алгебр Пуассона V над произвольным полем либо ограничена полиномом, либо не ниже показательной функции с основанием степени, равной 2. При этом если данная последовательность ограничена полиномом, то найдется такой многочлен $R(x)$ с рациональными коэффициентами, что $r_n(V) = R(n)$ для всех достаточно больших n. Приводится нижняя и верхняя границы для многочленов $R(x)$ произвольной фиксированной степени.

Ключевые слова: алгебра Пуассона, многообразие алгебр, рост многообразия.

Векторное пространство A над полем K с двумя K-биллинейными операциями умножения «$\cdot$» и «$\{,\}$» называется алгеброй Пуассона, если относительно операции «$\cdot$» пространство A является коммутативной ассоциативной алгеброй с единицей, относительно операции «$\{,\}$» — алгеброй Ли, и данные операции связаны правилом Лейбница:

$$\{a \cdot b, c\} = a \cdot \{b, c\} + \{a, c\} \cdot b, \qquad a, b, c \in A.$$

Алгебры Пуассона возникают в различных разделах алгебры, дифференциальной геометрии, топологии, современной теоретической физики и т. д.

Пусть $F(X)$ — свободная алгебра Пуассона, где $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ — счетное множество свободных образующих. Обозначим через P_n пространство в $F(X)$, состоящее из полилинейных элементов степени n от переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Выделим в пространстве P_{2n} подпространство Q_{2n}, порожденное элементами вида

$$\{x_{a_1}, x_{a_2}\} \cdot \{x_{a_3}, x_{a_4}\} \cdot \ldots \cdot \{x_{a_{2n-1}}, x_{a_{2n}}\}.$$

Тогда данное пространство есть линейная оболочка следующих элементов:

$$\begin{gathered} Q_{2n} = \langle \{x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}\} \cdot \{x_{\tau(3)}, x_{\tau(4)}\} \cdot \ldots \cdot \{x_{\tau(2n-1)}, x_{\tau(2n)}\} \mid \tau \in S_{2n}, \\ \tau(1) < \tau(2),\ \tau(3) < \tau(4), \ldots, \tau(2n-1) < \tau(2n), \\ \tau(1) < \tau(3) < \ldots < \tau(2n-1)\rangle_K. \end{gathered}$$