УДК 517.95; 517.984

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С НЕПРЕРЫВНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

М. Ш. Бурлуцкая

Бурлуцкая Мария Шаукатовна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, Воронежский государственный университет, bmsh2001@mail.ru

В работе исследуется смешанная задача для дифференциальной системы первого порядка с двумя независимыми переменными и непрерывным потенциалом, когда начальное условие представляет собой произвольную суммируемую с квадратом вектор-функцию. Соответствующая спектральная задача представляет собой систему Дирака. Устанавливается сходимость почти всюду ряда формального решения по методу Фурье. Показывается, что сумма формального решения является обобщенным решением смешанной задачи, понимаемым как предел классических решений для случая гладких аппроксимаций начальных данных задачи.

Ключевые слова: метод Фурье, начально-краевая задача, система Дирака, обобщенное решение.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-2-145-151

Рассмотрим следующую смешанную задачу:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = B\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + Q(x)u(x,t), x \in [0,1], \quad t \in (-\infty,+\infty), \tag{1}$$

$$u_1(0,t) = u_2(0,t), \qquad u_1(1,t) = u_2(1,t), \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \tag{3}$$

где $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t))^T$, $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x))^T$ (T — знак транспонирования), $u_j(x,t)$ и $\varphi_j(x)$ — скалярные функции, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $Q(x) = \begin{pmatrix} 0 & -q_2(x) \\ q_1(x) & 0 \end{pmatrix}$, $q_j(x) \in C[0,1]$, все функции комплекснозначные.

Задача будет исследоваться с помощью метода Фурье. Метод Фурье применялся даже для более общих систем А. И. Вагабовым [1], но в [1] рассматривался случай, когда $Q(x)$ была непрерывно дифференцируема. Здесь же для $Q(x)$ предполагается только непрерывность. Соответствующая спектральная задача представляет собой систему Дирака с непрерывным потенциалом.

Основополагающие результаты для системы Дирака с недифференцируемым потенциалом принадлежат П. В. Джакову, Б. С. Митягину (см. [2, 3]). В дальнейшем близкие по тематике исследования для таких систем проводились в [4–6]. В [7, 8] предложен сравнительно простой способ изучения системы Дирака с негладким потенциалом, базирующийся на операторах преобразования. Этот же прием используется в настоящей статье.

В работе доказывается, что ряд формального решения по методу Фурье в случае $\varphi(x) \in L_2^2[0,1]$ сходится почти всюду при $x \in [0,1]$ и $t \in (-\infty,\infty)$ и является обобщенным решением смешанной задачи (1)–(3), понимаемым как предел классических решений для случая гладких аппроксимаций вектор-функции $\varphi(x)$. При этом используются методы из [9].

1. СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА

Метод Фурье для задачи (1)–(3) связан со спектральной задачей для оператора L:

$$(Ly)(x) = By'(x) + Q(x)y(x),$$

$$y_1(0) = y_2(0), \qquad y_1(1) = y_2(1),$$

где $y(x) = (y_1(x), y_2(x))^T$. Оператор L есть оператор Дирака с условиями Дирихле.

В [7, 8] доказано, что собственные значения оператора L, достаточно большие по модулю, простые с асимптотикой

$$\lambda_n = \pi n i + \beta_n, \qquad (n = \pm n_0, \pm(n_0+1), \ldots),$$

а для собственных функций $y_n(x) = (y_{n1}(x), y_{n2}(x))^T$ оператора L имеют место асимптотические формулы:

$$y_{nj}(x) = e^{p_j \pi n i x}(1+\beta_n x) + \int_0^x b(x,\tau)e^{\pi n i \tau}d\tau + \int_0^x b(x,\tau)e^{-\pi n i \tau}d\tau +$$
$$+\beta_n \int_0^x b(x,\tau)e^{\pi n i \tau}d\tau + \beta_n \int_0^x b(x,\tau)e^{-\pi n i \tau}d\tau + O(\beta_n^2), \qquad j=1,2, \tag{4}$$

где $n = \pm n_0, \pm(n_0+1), \ldots$, $p_1 = 1$, $p_2 = -1$, и оценка $O(\ldots)$ равномерна по $x \in [0,1]$.

Здесь и в дальнейшем через β_n обозначаем различные числа такие, что $\sum |\beta_n|^2 < \infty$, и β_n не зависят от $\varphi(x)$, через ν_n такие числа, которые зависят от $\varphi(x)$, но при этом $\sum |\nu_n|^2 < c\|\varphi\|^2$. Норма $\|\cdot\|$ — либо норма в $L_2[0,1]$, либо в пространстве $L_2^2[0,1]$ вектор-функций размерности 2. Через $b(x,t)$ будем обозначать различные непрерывные функции из некоторого конечного набора.

Замечание. В [7, 8] приводятся точные выражения для β_n и $b(x,t)$, но нам они не требуются, а вид (4) функций y_{nj} облегчает наши рассуждения.

Сопряженный оператор L^* есть

$$(L^* z)(x) = -Bz'(x) + Q^*(x)z(x),$$

$$z_1(0) = z_2(0), \quad z_1(1) = z_2(1),$$

где $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T$, $Q^*(x) = \begin{pmatrix} 0 & \bar q_1(x) \\ -\bar q_2(x) & 0 \end{pmatrix}$.

Теорема 1. *Для собственных функций $z_n(x) = (z_{n1}(x), z_{n2}(x))^T$ оператора L^* имеют место асимптотические формулы:*

$$z_{nj}(x) = e^{p_j \pi n i x}(1+\beta_n x) + \int_0^x b(x,\tau)e^{\pi n i \tau}d\tau + \int_0^x b(x,\tau)e^{-\pi n i \tau}d\tau +$$
$$+\beta_n \int_0^x b(x,\tau)e^{\pi n i \tau}d\tau + \beta_n \int_0^x b(x,\tau)e^{-\pi n i \tau}d\tau + O(\beta_n^2), \qquad j=1,2,$$

где $n = \pm n_0, \pm(n_0+1), \ldots$, $p_1 = 1$, $p_2 = -1$ (β_n и $b(x,t)$ другие, отличные от (4)).

Лемма 1. *Множество с.п.ф. операторов L и L^* полны в $L_2^2[0,1]$.*

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Формальное решение задачи (1)–(3) по методу Фурье можно записать в виде (см. [1])

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geqslant n_0} \int_{\gamma_n}\right)(R_\lambda \varphi)(x) e^{\lambda t} d\lambda, \tag{5}$$

где $r > 0$ достаточно велико и фиксировано, $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$ — резольвента оператора L (E — единичный оператор, λ — спектральный параметр), $\gamma_n = \{\lambda \mid |\lambda - \lambda_n^0| = \delta\}$, $\lambda_n^0 = \pi n i$, $\delta > 0$ и достаточно мало, чтобы собственные значения λ_n попадали по одному внутрь γ_n. При этом

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n} (R_\lambda \varphi) e^{\lambda t} d\lambda = \frac{(\varphi, z_n)}{(y_n, z_n)} y_n(x) e^{\lambda_n t},$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $L_2^2[0,1]$ (это же обозначение сохраняется и для скалярного произведения в $L_2[0,1]$).

Лемма 2. *Имеют место соотношения:*

$$\nu_n + \nu_n = \nu_n, \qquad \beta_n + \beta_n = \beta_n, \qquad \nu_n\beta_n + \nu_n\beta_n = \nu_n\beta_n.$$

Доказательство. Первое и второе равенство очевидны. Обозначим $\beta_{3n} = |\beta_{1n}| + |\beta_{2n}|$. Если $\beta_{3n} \neq 0$, то $\nu_{1n}\beta_{1n} + \nu_{2n}\beta_{2n} = \beta_{3n}[\nu_{1n}\tilde{\beta}_{1n} + \nu_{2n}\tilde{\beta}_{2n}] = \beta_{3n}\nu_n$, так как $|\tilde{\beta}_{kn}| = |\beta_{kn}/\beta_{3n}| \leqslant 1$. Если $\beta_{3n} = 0$, то $\beta_{kn} = 0$, и тогда третье соотношение тривиально. $\square$

Лемма 3. *Имеют место соотношения:*

$$\left(g(x), \int_0^x b(x,\tau)e^{\pi ni\tau}d\tau\right) = \beta_n, \qquad \left(\int_0^x b(x,\tau)e^{\pi ni\tau}d\tau, \int_0^x b(x,\tau)e^{\pm\pi ni\tau}d\tau\right) = \beta_n,$$

где $g(x) \in L_2[0,1]$.

Доказательство. Имеем:

$$\left(g(x), \int_0^x b(x,\tau)e^{\pi ni\tau}d\tau\right) = \int_0^1 g(x)\,dx \int_0^x b(x,\tau)e^{\pi ni\tau}d\tau = \int_0^1 e^{\pi ni\tau}\,d\tau \int_\tau^1 g(x)b(x,\tau)dx = \beta_n.$$

При получении второго соотношения для изменения порядка интегрирования удобно использовать функцию $\varepsilon(x,t)$: $\varepsilon(x,t) = 1$ при $x \geqslant t$, $\varepsilon(x,t) = 0$ при $x \leqslant t$. Имеем:

$$\left(\int_0^x b(x,\tau)e^{\pi ni\tau}d\tau, \int_0^x b(x,\tau)e^{\pi ni\tau}d\tau\right) = \int_0^1 dx \int_0^x b(x,\tau)d\tau \int_0^x b(x,\eta)e^{\pi ni(\tau-\eta)}d\eta =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^x b(x,\tau)d\tau \int_{\tau-x}^{\tau} b(x,\tau-\xi)e^{\pi ni\xi}d\xi =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 \varepsilon(x,\tau)b(x,\tau)d\tau \int_0^1 \varepsilon(\tau,\xi)\varepsilon(\xi,\tau-x)b(x,\tau-\xi)e^{\pi ni\xi}d\xi =$$

$$= \int_0^1 e^{\pi ni\xi}d\xi \int_0^1 \varepsilon(x,\tau)b(x,\tau)d\tau \int_0^1 \varepsilon(\tau,\xi)\varepsilon(\xi,\tau-x)b(x,\tau-\xi)\,dx = \int_0^1 \psi(\xi)e^{\pi ni\xi}d\xi = \beta_n.$$

Последнее справедливо в силу ограниченности внутреннего интеграла $\psi(\xi)$. Аналогично доказывается случай со знаком минус во втором соотношении. $\square$

Лемма 4. *Имеют место асимптотические формулы:*

$$(y_n, z_n) = 2 + \beta_n, \qquad (\varphi, z_n) = \nu_n + \nu_n\beta_n,$$

$$\frac{(\varphi, z_n)}{(y_n, z_n)} y_{nj}(x)e^{\lambda_n t} = \nu_n\left[e^{p_j\pi nix} + \int_0^x b(x,\tau)e^{\pi ni\tau}d\tau + \int_0^x b(x,\tau)e^{-\pi ni\tau}d\tau\right]e^{\pi nit} + O(\nu_n\beta_n), \quad j = 1,2,$$

где $x \in [0,1]$, $t \in [-T,T]$, $T > 0$ *— любое фиксированное число, и оценка* $O(\ldots)$ *равномерна по* x *и* t.

Лемма 5. *Ряды* $\sum\limits_{n\geqslant n_0} \nu_n \int\limits_0^x b(x,\tau)e^{\pi ni(\pm\tau+t)}d\tau$ *и такие же ряды при* $n \leqslant -n_0$ *сходятся равномерно на множестве* $Q_T = [0,1]\times[-T,T]$ *при любом* $T > 0$, *и для их сумм* $F_\pm(x,t)$ *имеют место оценки:*

$$\max_{Q_T} |F_\pm(x,t)| \leqslant C_T \|\varphi\|, \tag{6}$$

где $C_T > 0$ *и зависит только от* T.

Доказательство. Достаточно рассмотреть ряд $\sum\limits_{n\geqslant n_0} \nu_n \int\limits_0^x b(x,\tau)e^{\pi ni(\tau+t)}d\tau$. При $(x,t)\in Q_T$ имеем:

$$\left|\sum_{n_1}^{n_2}\nu_n\int\limits_0^x b(x,\tau)e^{\pi ni(\tau+t)}\,d\tau\right| = \left|\int\limits_t^{t+x} b(x,\xi-t)\sum_{n_1}^{n_2}\nu_n e^{\pi ni\xi}\,d\xi\right| \leqslant$$

$$\leqslant c\int\limits_{-T}^{T+1}\left|\sum_{n_1}^{n_2}\nu_n e^{\pi ni\xi}\right|\,d\xi \leqslant c\int\limits_{-N}^{N}\left|\sum_{n_1}^{n_2}\nu_n e^{\pi ni\xi}\right|\,d\xi =$$

$$= c\sum_{k=-N}^{N-1}\int\limits_k^{k+1}\left|\sum_{n_1}^{n_2}\nu_n e^{\pi ni\xi}\right|\,d\xi = c\sum_{k=-N}^{N-1}\int\limits_0^1\left|\sum_{n_1}^{n_2}\nu_n(-1)^{nk}e^{\pi ni\eta}\right|\,d\eta \leqslant$$

$$\leqslant c\sum_{k=-N}^{N-1}\left(\int\limits_0^1\left|\sum_{n_1}^{n_2}\nu_n(-1)^{nk}e^{\pi ni\eta}\right|^2\,d\eta\right)^{1/2} \leqslant 2Nc\left(\sum_{n_1}^{n_2}|\nu_n|^2\right)^{1/2}.$$

Здесь N — натуральное число, $N\geqslant T+1$. Из сходимости ряда $\sum|\nu_n|^2$ следует равномерная сходимость исследуемого ряда. Далее, аналогично для любых $(x,t)\in Q_T$ и любого натурального m получим:

$$\left|\sum_{n_0}^{m}\nu_n\int\limits_0^x b(x,\tau)e^{\pi ni(\tau+t)}\,d\tau\right| \leqslant 2Nc\left(\sum_{n_0}^{m}|\nu_n|^2\right)^{1/2} \leqslant C_T\|\varphi\|,$$

откуда следует (6).

Аналогично доказывается утверждение леммы для остальных рядов. □

Лемма 6. *Ряды $\sum O(\nu_n\beta_n)$ сходятся абсолютно и равномерно на множестве Q_T, причем $|\sum O(\nu_n\beta_n)|\leqslant C_T\,\|\varphi\|$.*

3. КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

В этом пункте получим классическое решение в предположении, что $\varphi(x)\in D_{L^2}$ (D_{L^2} область определения оператора L^2).

Лемма 7. *Пусть μ_0 не является собственным значением оператора L, $|\mu_0|>r$, и находится вне γ_n, $\varphi(x)\in D_{L^2}$, $g=(L-\mu_0E)^2\varphi$. Тогда*

$$\int\limits_{|\lambda|=r}(R_\lambda\varphi)(x)e^{\lambda t}d\lambda = \int\limits_{|\lambda|=r}\frac{(R_\lambda g)(x)}{(\lambda-\mu_0)^2}e^{\lambda t}d\lambda,$$

$$\frac{(\varphi,z_n)}{(y_n,z_n)} = \frac{(g,z_n)}{(\lambda_n-\mu_0)^2(y_n,z_n)}.$$

Доказательство. Утверждение следует из представления, справедливого для любой функции $\varphi\in D_{L^2}$:

$$R_\lambda\varphi = -\frac{\varphi}{\lambda-\mu_0} - \frac{g_1}{(\lambda-\mu_0)^2} + \frac{R_\lambda g}{(\lambda-\mu_0)^2},$$

где $g_1=(L-\mu_0E)\varphi$. □

Теорема 2. *Если $\varphi(x)\in D_{L^2}$, то формальное решение $u(x,t)$ является классическим, т. е. $u(x,t)$ непрерывно дифференцируема по x и t и удовлетворяет* (1)–(3).

Доказательство. По лемме 7 из (5) имеем:

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}\frac{(R_\lambda g)(x)}{(\lambda-\mu_0)^2}e^{\lambda t}d\lambda + \sum_{|n|\geqslant n_0}\frac{(g,z_n)y_n(x)}{(\lambda_n-\mu_0)^2(y_n,z_n)}e^{\lambda_n t}. \tag{7}$$

Отсюда следует, что ряд (7) и ряды, получающиеся из него почленным дифференцированием по x и t, равномерно сходятся в Q_T при любом $T > 0$. Далее, из (5) имеем при $t = 0$:

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}(R_\lambda\varphi)(x)d\lambda + \sum_{|n|\geqslant n_0}\frac{(\varphi,z_n)y_n(x)}{(y_n,z_n)}. \tag{8}$$

Правая часть (8) представляет собой ряд Фурье функции $\varphi(x)$, абсолютно и равномерно сходящийся к функции $\varphi(x)$, следовательно, $u(x,t)$ удовлетворяет (3). Условия (2) очевидны. □

Заметим, что множество D_{L^2} всюду плотно в $L_2^2[0,1]$.

4. ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ

Теорема 3. *Если $q_j(x) \in C[0,1]$ $(j = 1,2)$ и $\varphi(x) \in L_2^2[0,1]$, то ряд $u(x,t)$ формального решения сходится почти всюду по $x \in [0,1]$ и $t \in (-\infty,\infty)$, причем $u(x,0) = \varphi(x)$ почти всюду на $[0,1]$. При этом для любых $(x,t) \in Q_T$ справедлива оценка*

$$\|u(x,t)\|_{L_2^2[Q_T]} \leqslant c_T\|\varphi\|. \tag{9}$$

Далее, если $\varphi_h(x) \in D_{L^2}$ сходится к $\varphi(x)$ в $L_2^2[0,1]$ при $h \to 0$, то $u_h(x,t)$ сходится к $u(x,t)$ по норме $L_2^2[Q_T]$ при любом $T > 0$, где $u_h(x,t)$ есть классическое решение задачи (1)–(3) *с начальным условием $u_h(x,0) = \varphi_h(x)$.*

Доказательство. 1. Для доказательства сходимости достаточно рассмотреть в (5) только ряд

$$\sum_{n\geqslant n_0}\frac{(\varphi,z_n)y_n(x)}{(y_n,z_n)}e^{\lambda_n t} \tag{10}$$

(случай $\sum\limits_{n\leqslant -n_0}$ рассматривается аналогично).

По лемме 4 компоненты ряда (10) есть

$$\sum_{n\geqslant n_0}\nu_n\left[e^{\pm\pi nix} + \int\limits_0^x b(x,\tau)e^{\pi ni\tau}d\tau + \int\limits_0^x b(x,\tau)e^{-\pi ni\tau}d\tau\right]e^{\pi nit} + \sum_{n\geqslant n_0}O(\nu_n\beta_n).$$

Рассмотрим ряд $\Sigma_0 = \sum\limits_{n\geqslant n_0}\nu_n y_n^0(x)e^{\pi nit}$, $y_n^0(x) = (e^{\pi nix}, e^{-\pi nix})^T$. Имеем:

$$\Sigma_0 = (\Sigma_{01},\Sigma_{01})^T, \quad \Sigma_{01} = \sum_{n\geqslant n_0}\nu_n e^{n\pi i(x+t)}, \quad \Sigma_{02} = \sum_{n\geqslant n_0}\nu_n e^{-n\pi i(x-t)}.$$

Исследуем сходимость $\Sigma_{01} = \sum\limits_{n\geqslant n_0}\nu_n e^{n\pi i\eta t}$, $\eta = x+t$. По теореме Карлесона (о сходимости почти всюду тригонометрических рядов Фурье) ряд Σ_{01} сходится почти при всех $\eta \in (-\infty,\infty)$. Докажем, что ряд Σ_{01} сходится почти при всех $x \in [0,1]$ и $t \in (-\infty,\infty)$. Обозначим $Q_1 = \{(\eta,\xi)\big|\ \eta \in [-T,T+1], \xi \in [-T,T]\}$ и через e — множество точек $\eta \in [-T,T+1]$, в которых ряд расходится, $\operatorname{mes} e = 0$. Тогда мера множества $e_1 = \{(\eta,\xi)\big|\eta \in e, \xi \in [-T,T]\}$ есть $\operatorname{mes} e_1 = \iint\limits_{Q_1}\chi(\eta,\xi)\,d\eta\,d\xi = 0$ (здесь $\chi(\eta,\xi)$ — характеристическая функция множества e_1). Преобразование $\eta = x+t$, $\xi = t$ переводит прямоугольник Q_1 в прямоугольник Q в плоскости x,t, а множество e_1 в множество e_2. Так как $Q_T \subset Q$ и $\operatorname{mes} e_2 = 0$, то ряд Σ_{01} сходится почти всюду в Q_T. Значит, он сходится почти всюду при всех $x \in [0,1]$ и $t \in (-\infty,\infty)$. Аналогично получаем сходимость ряда Σ_{02}. Отсюда с учетом лемм 5, 6 получаем сходимость ряда (10).

Оценка (9) следует из оценок для компонент ряда (10), аналогично получаемых оценок для Σ_0 и в силу ограниченности резольвенты.

2. Таким образом, доказано, что ряд $u(x,t)$ сходится почти всюду и $\|u(x,t)\|_{L_2^2[Q_T]} \leqslant c_T\|\varphi\|$.

Далее, поскольку $u_h(x,t) - u(x,t)$ есть формальное решение смешанной задачи (1)–(3) при начальной функции $\varphi_h(x) - \varphi(x)$, то получаем, что $\lim\limits_{h\to 0}\|u_h(x,t) - u(x,t)\|_{L_2^2[Q_T]} = 0$, когда

$\lim\limits_{h\to 0} \|\varphi_h(x)-\varphi(x)\| = 0$. Осталось обосновать, что $u(x,0)=\varphi(x)$ почти всюду. Из соотношения

$$u(x,0) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} (R_\lambda\varphi)d\lambda + \sum_{|n|\geqslant n_0} \frac{(\varphi, z_n)}{(y_n, z_n)} y_n(x) \qquad (11)$$

следует, что правая часть (11) есть ряд Фурье функции $\varphi(x)$ по собственным и присоединенным функциям оператора L. Из лемм 3–6 и теоремы Карлесона получаем, что ряд (11) сходится почти всюду на $[0,1]$, т.е. $u(x,0)$ почти везде конечна. Далее, имеем:

$$\begin{gathered}\|u(x,0)-\varphi(x)\| \leqslant \|u(x,0)-u_h(x,0)\| + \|u_h(x,0)-\varphi\| \leqslant \\ \leqslant c\left\{\|\varphi-\varphi_h\| + \|\varphi_h - \varphi\|\right\}.\end{gathered} \qquad (12)$$

Устремляя правую часть (12) к нулю, получим $u(x,0)=\varphi(x)$ почти всюду. □

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 16-11-10125, выполняемый в Воронежском государственном университете).

Библиографический список

1. *Вагабов А. И.* Введение в спектральную теорию дифференциальных операторов. Ростов н/Д : Изд-во Рост. гос. ун-та, 1994. 160 с.
2. *Джаков П. В., Митягин Б. С.* Зоны неустойчивости одномерных периодических операторов Шредингера и Дирака // УМН. 2006. Т. 61, № 4. С. 77–182. DOI: 10.4213/rm2121.
3. *Djakov P., Mityagin B.* Bari-Markus property for Riesz projections of 1D periodic Dirac operators // Math. Nachr. 2010. Vol. 283, № 3. P. 443–462. DOI: 10.1002/mana.200910003.
4. *Баскаков А. Г., Дербушев А. В., Щербаков А. О.* Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом // Изв. РАН. Сер. матем. 2011. Т. 75, № 3. С. 3–28. DOI: 10.4213/im4202.
5. *Савчук А. М., Садовничая И. В.* Асимптотические формулы для фундаментальных решений системы Дирака с комплекснозначным суммируемым потенциалом // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49, № 5. С. 573–584. DOI: 10.1134/S037406411305004X.
6. *Savchuk A. M., Shkalikov A. A.* Dirac operator with complex-valued summable potential // Math. Notes. 2014. Vol. 96, № 5–6. P. 777–810. DOI: 10.1134/S0001434614110169.
7. *Бурлуцкая М. Ш., Курдюмов В. П., Хромов А. П.* Уточненные асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций системы Дирака // Докл. АН. 2012. Т. 443, № 4. С. 414–417.
8. *Бурлуцкая М. Ш., Курдюмов В. П., Хромов А. П.* Уточненные асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций системы Дирака с недифференцируемым потенциалом// Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 3. С. 22–30.
9. *Хромов А. П.* Поведение формального решения смешанной задачи для волнового уравнения // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56, № 2. С. 239–251. DOI: 10.7868/S0044466916020149.

A Mixed Problem for a System of First Order Differential Equations with Continuous Potential

M. Sh. Burlutskaya

Mariya Sh. Burlutskaya, Voronezh State University, 1, Universitetskaya pl., 394006, Voronezh, Russia, bmsh2001@mail.ru

We study a mixed problem for a first order differential system with two independent variables and continuous potential when the initial condition is an arbitrary square summable vector-valued function. The corresponding spectral problem is the Dirac system. It sets the convergence almost everywhere of a formal decision, obtained by the Fourier method. It is shown that the sum of a formal decision is a generalized solution of a mixed problem, understood as the limit of classical solutions for the case of smooth approximation of the initial data of the problem.

Key words: Fourier method, boundary value problem, Dirac system, generalized solution .

This work was supported by the Russian Science Foundation (projects no. 16-11-10125, performed at the Voronezh State University).

References

1. Vagabov A. I. *Vvedenie v spektral'nuiu teoriiu differentsial'nykh operatorov* [Introduction to spectral theory of differential operators]. Rostov-on-Don, Rostov Univ. Press, 1994, 160 p. (in Russian).
2. Djakov P, Mityagin B. Instability zones of periodic 1-dimensional Schrodinger and Dirac operators. *Russian Math. Surveys*, 2006, vol. 61, no. 4, pp. 663–776. DOI: 10.1070/RM2006v061n04ABEH004343.
3. Djakov P., Mityagin B. Bari-Markus property for Riesz projections of 1D periodic Dirac operators. *Math. Nachr.*, 2010, vol. 283, no. 3, pp. 443–462. DOI: 10.1002/mana.200910003.
4. Baskakov A. G., Derbushev A. V., Shcherbakov A. O. The method of similar operators in the spectral analysis of non-self-adjoint Dirac operators with non-smooth potentials. *Izv. Math.*, 2011, vol. 75, no. 3, pp. 445–469. DOI: 10.1070/IM2011v075n03ABEH002540.
5. Savchuk A. M., Sadovnichaya I. V. Asymptotic formulas for fundamental solutions of the Dirac system with complex-valued integrable potential. *Differ. Equations*, 2013, vol. 49, no. 5, pp. 545–556. DOI: 10.1134/S0012266113050030.
6. Savchuk A. M., Shkalikov A. A. Dirac operator with complex-valued summable potential. *Math. Notes*, 2014, vol. 96, no. 5–6, pp. 777–810. DOI: 10.1134/S0001434614110169.
7. Burlutskaya M. Sh., Kurdyumov V. P., Khromov A. P. Refined asymptotic formulas for eigenvalues and eigenfunctions of the Dirac system. *Doklady Math.*, 2012, vol. 85, no. 2, pp. 240–242. DOI: 10.1134/S1064562412020238.
8. Burlutskaia M. Sh., Kurdiumov V. P., Khromov A. P. Refined Asymptotic Formulas for Eigenvalues and Eigenfunctions of the Dirac System with Nondifferentiable Potential. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2012, vol. 12, no. 3, pp. 56–66 (in Russian).
9. Khromov A. P. The behavior of the formal solution of the mixed problem for wave equation. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2016, vol. 56, no. 2. pp. 239–251. DOI: 10.7868/S0044466916020149.

УДК 519.62

ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМЫ ХААРА К ЧИСЛЕННОМУ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Д. С. Лукомский[1], С. Ф. Лукомский[2], П. А. Терехин[3]

[1]Лукомский Дмитрий Сергеевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической физики и вычислительной математики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, LukomskiiDS@info.sgu.ru

[2]Лукомский Сергей Федорович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, LukomskiiSF@nfo.sgu.ru

[3]Терехин Павел Александрович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории приближений функций, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, TerekhinPA@info.sgu.ru

Рассмотрена задача приближенного решения задачи Коши для уравнения первого порядка. Для этого производную решения мы ищем в виде суммы ряда Хаара. Получены оценки погрешности приближенного решения. Приведены результаты численного эксперимента. Примеры показывают, что в некоторых случаях погрешность предлагаемого метода намного меньше, чем в методе Рунге – Кутта второго порядка.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, численные методы, приближенное решение, оценка погрешности, система Хаара.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-2-151-159

ВВЕДЕНИЕ

В работах [1–3] и других были рассмотрены методы численного решения дифференциальных уравнений с использованием системы Хаара. При этом искомая функция представлялась приближенно в виде частичной суммы ряда по системе Хаара. Так как в уравнении присутствуют производные неизвестной функции, то приходилось вводить оператор дифференцирования ступенчатой функции, что сразу делает проблематичной оценку погрешности рассматриваемого метода. В работе Д. С. Лукомского [4] была рассмотрена задача Коши для линейного уравнения второго порядка, и многочленом