УДК 539.3

О СОГЛАСОВАННОМ КОНТАКТЕ ШТАМПОВ И ТЕЛ С ПОКРЫТИЯМИ, ИМЕЮЩИХ СЛОЖНЫЙ ПРОФИЛЬ ПОВЕРХНОСТИ

А. В. Манжиров[*], **С. П. Курдина**[**], **С. Кухарский**[***]

[*]Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва
E-mail: manzh@ipmnet.ru
[**]Московский государственный университет приборостроения и информатики
E-mail: svetlana-ka@yandex.ru
[***]Институт фундаментальных технологических исследований ПАН, Варшава
E-mail: skuchar@ippt.gov.pl

В работе исследуется контактное взаимодействие системы жестких штампов и вязкоупругого основания с тонким покрытием в случае, когда поверхности штампов и покрытия согласованы. Такая задача может возникнуть, например, когда штампы устанавливаются на основание до полного отверждения покрытия. При этом формы оснований штампов могут описываться быстро осциллирующими функциями. Дан вывод системы разрешающих смешанных интегральных уравнений, для решения которой развит обобщенный проекционный метод. Сделаны выводы качественного характера.

Ключевые слова: множественный контакт, сложный профиль поверхности, система интегральных уравнений.

The Conformal Contact Between Punches and Coated Solids with Complicated Surface Profile

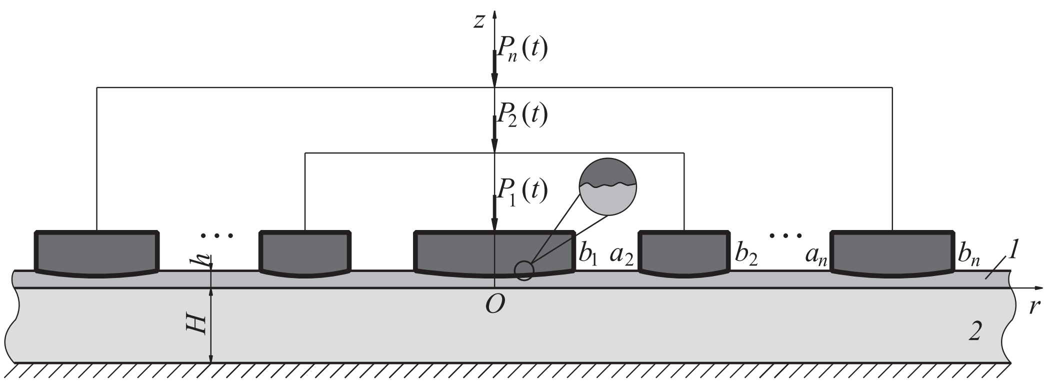
A. V. Manzhirov, S. P. Kurdina, S. Kucharski

The contact interaction between system of rigid punches and viscoelastic foundations with thin coatings for the cases in which the punches and coating surfaces are conformal (mutually repeating) is studied. Such problems can arise, for example, when the punch immerses into a solidifying coating before its complete solidification. The shapes of punches surfaces could be described by a fast oscillating functions. Basic system of mixed integral equation is obtained. The solution of this system is constructed by using the generalized projection method. Qualitative conclusions are discussed.

Key words: multiple contact, complicated surface profile, integral equation system.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

На подстилающем недеформируемом основании лежит вязкоупругий слой толщины H, изготовленный в момент времени τ_2, с тонким вязкоупругим покрытием, изготовленным в момент времени τ_1 (рисунок). Жесткость покрытия не превышает жесткости нижнего слоя. На такое основание начиная с момента времени $\tau_0 \geq \max\{\tau_1, \tau_2\}$ действуют n осесимметричных кольцевых штампов с силами $P_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, оси которых проходят через точку O. Ширина каждого штампа значительно больше толщины покрытия, т.е. $b_i - a_i \gg h(r)$, где a_i, b_i — внутренний и внешний радиусы i-го штампа $(i = 1, 2, \ldots, n)$, а $h(r)$ — переменная толщина верхнего слоя. Считается, что форма покрытия и формы оснований штампов одинаковые до начала загрузки, т.е. при $t < \tau_0$.



Приравнивая вертикальные перемещения верхней грани основания, вызванные нагрузкой

$$p(r,t) = \begin{cases} -q_i(r,t), & r \in [a_i, b_i], \quad i = 1, 2, \ldots, n, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

и перемещения жестких штампов, получим систему интегральных уравнений контактной задачи [1–3]:

$$k_\nu(\mathbf{I}-\mathbf{V}_1)\frac{q_i(r,t)h(r)}{E_1(t-\tau_1)}+\frac{2(1-\nu_2^2)}{H}(\mathbf{I}-\mathbf{V}_2)\sum_{j=1}^{n}\mathbf{F}_j\frac{q_j(r,t)}{E_2(t-\tau_2)}=\delta_i(t), \qquad r\in[a_i,b_i], \tag{1}$$

$$\mathbf{F}_i f(r,t)=\int_{a_i}^{b_i}k_{\mathrm{as}}\left(\frac{r}{H},\frac{\rho}{H}\right)f(\rho,t)\rho\,d\rho \qquad (i=1,2,\ldots,n).$$

Здесь $E_1(t-\tau_2)$ — модуль упругомгновенной деформации верхнего слоя, k_ν — безразмерный коэффициент, зависящий от условий соединения покрытия с нижним слоем (при гладком контакте $k_\nu=1-\nu_1^2$, в случае идеального контакта $k_\nu=(1+\nu_1)(1-2\nu_1)/(1-\nu_1)$, ν_1 — коэффициент Пуассона верхнего слоя), ν_2 и $E_2(t-\tau_2)$ — коэффициент Пуассона и модуль упругомгновенной деформации нижнего слоя; $\delta_i(t)$ — осадки штампов, $\mathbf{I}$ — тождественный оператор, $\mathbf{V}_k$ $(k=1,2)$ — интегральный оператор Вольтерра с ядром ползучести при растяжении $K^{(k)}(t,\tau)$, $\mathbf{F}_j$ — интегральные операторы с известным ядром осесимметричной контактной задачи $k_{\mathrm{as}}(r/H,\rho/H)$, имеющим вид [3, 4]

$$k_{\mathrm{as}}(r,\rho)=\int_0^\infty L(u)J_0(ru)J_0(\rho u)\,du,$$

где $J_0(u)$ — функции Бесселя первого рода нулевого порядка, а функция $L(u)$ определяется в зависимости от условий соединения нижнего слоя и подстилающего недеформируемого основания.

Введя функции толщины покрытия $h_i(r)$ под каждым штампом, совпадающие с функцией $h(r)$ в соответствующих диапазонах, т.е. $h_i(r)\equiv h(r)$ $(r\in[a_i,b_i],\ i=1,2,\ldots,n)$, перепишем уравнение (1) в виде

$$k_\nu(\mathbf{I}-\mathbf{V}_1)\frac{q_i(r,t)h_i(r)}{E_1(t-\tau_1)}+\frac{2(1-\nu_2^2)}{H}(\mathbf{I}-\mathbf{V}_2)\sum_{j=1}^{n}\mathbf{F}_j\frac{q_j(r,t)}{E_2(t-\tau_2)}=\delta_i(t), \qquad r\in[a_i,b_i] \qquad (i=1,2,\ldots,n). \tag{2}$$

Дополнительные условия равновесия штампов на основании описываются уравнениями:

$$P_i(t)=2\pi\int_{a_i}^{b_i}q_i(\rho,t)\rho\,d\rho \qquad (i=1,2,\ldots,n). \tag{3}$$

Сделав в (2) и (3) замену переменных по формулам

$$(r^*)^2=\frac{r^2-a_i^2}{b_i^2-a_i^2}, \qquad (\rho^*)^2=\frac{\rho^2-a_i^2}{b_i^2-a_i^2}, \qquad r,\rho\in[a_i,b_i], \qquad t^*=\frac{t}{\tau_0}, \qquad \tau_1^*=\frac{\tau_1}{\tau_0}, \qquad \tau_2^*=\frac{\tau_2}{\tau_0},$$

$$\lambda=\frac{H}{b_1-a_1}, \qquad \eta_j=\frac{a_j}{b_1-a_1}, \qquad \zeta_j^2=\frac{b_j^2-a_j^2}{(b_1-a_1)^2}, \qquad \delta_i^*(t^*)=\frac{\delta_i(t)\zeta_i}{b_1-a_1},$$

$$q_i^*(r^*,t^*)=\frac{2q_i(r,t)(1-\nu_2^2)\zeta_i}{E_2(t-\tau_2)}, \qquad P_i^*(t^*)=\frac{P_i(t)(1-\nu_2^2)\zeta_i}{\pi E_2(t-\tau_2)(b_i^2-a_i^2)}, \qquad c^*(t^*)=\frac{E_2(t-\tau_2)}{E_1(t-\tau_1)},$$

$$m_i(r^*)=\frac{k_\nu}{1-\nu_2^2}\frac{h(r)}{2(b_1-a_1)}, \qquad \mathbf{F}_{ij}^*f(r^*,t^*)=\int_0^1 k_{ij}(r^*,\rho^*)f(\rho^*,t^*)\rho^*\,d\rho^*,$$

$$k_{ij}(r^*,\rho^*)=\frac{\zeta_i\zeta_j}{\lambda}k_{\mathrm{as}}\left[\frac{\sqrt{(r^*)^2\zeta_i^2+\eta_i^2}}{\lambda},\frac{\sqrt{(\rho^*)^2\zeta_j^2+\eta_j^2}}{\lambda}\right]=\frac{\zeta_i\zeta_j}{\lambda}k_{\mathrm{as}}\left(\frac{r}{H},\frac{\rho}{H}\right),$$

$$\mathbf{V}_k^*f(r^*,t^*)=\int_1^{t^*}K_k(t^*,\tau^*)f(r^*,\tau^*)\,d\tau^*, \qquad K_2(t^*,\tau^*)=K^{(2)}(t-\tau_2,\tau-\tau_2)\tau_0,$$

$$K_1(t^*,\tau^*)=\frac{E_1(t-\tau_1)E_2(\tau-\tau_2)}{E_1(\tau-\tau_1)E_2(t-\tau_2)}K^{(1)}(t-\tau_1,\tau-\tau_1)\tau_0, \qquad i,j=1,2,\ldots,n, \qquad k=1,2$$

и опустив в окончательных формулах звездочки, получим систему интегральных уравнений:

$$c(t)m_i(r)(\mathbf{I}-\mathbf{V}_1)q_i(r,t)+(\mathbf{I}-\mathbf{V}_2)\sum_{j=1}^{n}\mathbf{F}_{ij}q_j(r,t)=\delta_i(t), \qquad r\in[0,1] \tag{4}$$

с дополнительными условиями:

$$\int_0^1 q_i(\rho,t)\rho\,d\rho = P_i(t) \qquad (i=1,2,\ldots,n). \tag{5}$$

Ядро $k_{\text{as}}(r/H,\rho/h)$ является симметричным положительно определенным ядром Фредгольма [5].

2. ОПЕРАТОРНОЕ УРАВНЕНИЕ

Принимая, что

$$\mathbf{q}(r,t)=\begin{pmatrix} q_1(r,t)\\ q_2(r,t)\\ \vdots\\ q_n(r,t)\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{\delta}(t)=\begin{pmatrix} \delta_1(t)\\ \delta_2(t)\\ \vdots\\ \delta_n(t)\end{pmatrix},\qquad \mathbf{P}(t)=\begin{pmatrix} P_1(t)\\ P_2(t)\\ \vdots\\ P_n(t)\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{k}(r,\rho)=\begin{pmatrix} k_{11}(r,\rho) & k_{12}(r,\rho) & \cdots & k_{1n}(r,\rho)\\ k_{21}(r,\rho) & k_{22}(r,\rho) & \cdots & k_{2n}(r,\rho)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ k_{n1}(r,\rho) & k_{n2}(r,\rho) & \cdots & k_{nn}(r,\rho)\end{pmatrix},$$

и вводя диагональную матрицу

$$\mathbf{D}(r)=\begin{pmatrix} m_1(r) & 0 & \cdots & 0\\ 0 & m_2(r) & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & m_n(r)\end{pmatrix}=\operatorname{diag}_n\{m_1(r),m_2(r),\ldots,m_n(r)\}, \tag{6}$$

систему уравнений (4) с дополнительными условиями (5) можно записать в виде операторного уравнения осесимметричных контактных задач:

$$c(t)\mathbf{D}(r)(\mathbf{I}-\mathbf{V}_1)\mathbf{q}(r,t)+(\mathbf{I}-\mathbf{V}_2)\boldsymbol{\mathcal{G}}\mathbf{q}(r,t)=\boldsymbol{\delta}(t)-\mathbf{g}(r), \qquad r\in[0,1], \tag{7}$$

$$\int_0^1 \mathbf{q}(\rho,t)\rho\,d\rho=\mathbf{P}(t), \tag{8}$$

где $\boldsymbol{\mathcal{G}}\mathbf{f}(r)=\int_0^1 \mathbf{k}(r,\rho)\mathbf{f}(\rho)\rho\,d\rho$. Так как $\mathbf{M}(r)$ — симметричная положительно определенная матрица ($m_i(r)>0$), то ее можно представить в виде $\mathbf{D}(r)=\mathbf{N}(r)\mathbf{N}(r)$, где в качестве $\mathbf{N}(r)$ можно взять матрицу

$$\mathbf{N}(r)=\begin{pmatrix} \sqrt{m_1(r)} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \sqrt{m_2(r)} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{m_n(r)}\end{pmatrix}=\operatorname{diag}_n\{\sqrt{m_1(r)},\sqrt{m_2(r)},\ldots,\sqrt{m_n(r)}\}.$$

В дальнейшем будем обозначать эту матрицу как $\mathbf{D}^{1/2}(r)$. Тогда домножим слева уравнение (7) на $\mathbf{D}^{-1/2}(r)=(\mathbf{D}^{1/2}(r))^{-1}$:

$$c(t)\mathbf{D}^{1/2}(r)(\mathbf{I}-\mathbf{V}_1)\mathbf{q}(r,t)+(\mathbf{I}-\mathbf{V}_2)\mathbf{D}^{-1/2}(r)\boldsymbol{\mathcal{G}}\mathbf{q}(r,t)=\mathbf{D}^{-1/2}(r)\boldsymbol{\delta}(t), \qquad r\in[0,1].$$

Введя обозначения

$$\mathbf{Q}(r,t)=\mathbf{D}^{1/2}(r)\mathbf{q}(r,t)=\begin{pmatrix}\dfrac{q_1(r,t)}{\sqrt{m_1(r)}}\\ \dfrac{q_2(r,t)}{\sqrt{m_2(r)}}\\ \vdots\\ \dfrac{q_n(r,t)}{\sqrt{m_n(r)}}\end{pmatrix},\qquad \mathbf{K}(r,\rho)=\mathbf{D}^{-1/2}(r)\mathbf{k}(r,\rho)\mathbf{D}^{-1/2}(\rho)=$$

$$=\begin{pmatrix}\dfrac{k_{11}(r,\rho)}{\sqrt{m_1(r)m_1(\rho)}} & \dfrac{k_{12}(r,\rho)}{\sqrt{m_1(r)m_2(\rho)}} & \cdots & \dfrac{k_{1n}(r,\rho)}{\sqrt{m_1(r)m_n(\rho)}}\\ \dfrac{k_{21}(r,\rho)}{\sqrt{m_2(r)m_1(\rho)}} & \dfrac{k_{22}(r,\rho)}{\sqrt{m_2(r)m_2(\rho)}} & \cdots & \dfrac{k_{2n}(r,\rho)}{\sqrt{m_2(r)m_n(\rho)}}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{k_{n1}(r,\rho)}{\sqrt{m_n(r)m_1(\rho)}} & \dfrac{k_{n2}(r,\rho)}{\sqrt{m_n(r)m_2(\rho)}} & \cdots & \dfrac{k_{nn}(r,\rho)}{\sqrt{m_n(r)m_n(\rho)}}\end{pmatrix}, \tag{9}$$

получим

$$c(t)(\mathbf{I}-\mathbf{V}_1)\mathbf{Q}(r,t)+(\mathbf{I}-\mathbf{V}_2)\boldsymbol{\mathcal{F}}\mathbf{Q}(r,t)=\boldsymbol{\Delta}(r,t),\qquad r\in[0,1], \tag{10}$$

$$\int_0^1\mathbf{D}^{-1/2}(r)\mathbf{q}(\rho,t)\rho\,d\rho=\mathbf{P}(t), \tag{11}$$

где $\boldsymbol{\Delta}(r,t)=\mathbf{D}^{-1/2}(r)\boldsymbol{\delta}(t)$, $\boldsymbol{\mathcal{F}}\mathbf{f}(r)=\int_0^1\mathbf{K}(r,\rho)\mathbf{f}(\rho)\rho\,d\rho$.

Таким образом, будем исследовать операторное уравнение (10) с дополнительным условием (11), $\mathbf{Q}(r,t)$, $\boldsymbol{\Delta}(r,t)$ — непрерывные по t в $L_2(\Omega,V)$ вектор-функции, $\mathbf{P}(t)$ — непрерывная по t вектор-функции (здесь $L_2(\Omega,V)$ — гильбертово пространство вектор-функций, интегрируемых с квадратом в круге Ω единичного радиуса и зависящих только от радиальной координаты). Можно показать, что вполне непрерывный оператор $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ является самосопряженным (так как $\mathbf{K}(r,\rho)=\mathbf{K}^T(\rho,r)$) и положительно определенным оператором из $L_2(\Omega,V)$ в $L_2(\Omega,V)$.

3. ВАРИАНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОСТАНОВКИ

Рассмотрим варианты постановки контактной задачи о системе штампов, возникающие в осесимметричном случае. Легко видеть, что на каждом штампе можно задать один из двух типов условий: осадку или вдавливающую силу. Отсюда следует, что в осесимметричной задаче о системе штампов возможны только три варианта постановки:

– на всех штампах заданы кинематические условия;

– на всех штампах заданы квазистатические условия;

– на части штампов заданы кинематические, а на части — квазистатические условия.

Первые два случая относятся к задачам с одной группой штампов, последний — с двумя группами.

4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОЙ ГРУППЫ ШТАМПОВ

Для решения задачи необходимо в первую очередь построить функциональный базис гильбертова пространства $L_2(\Omega,V)$, для чего требуется рассмотреть последовательность вектор-функций $\{\mathbf{p}_k^{(i)}(r)\}$ $(i=1,2,\ldots,n,\ k=0,1,2,\ldots)$, составляющую базис пространства $L_2(\Omega,V)$ (см. [1, 6]). При этом необходимо, чтобы в структуру всех базисных функций входили функции из матрицы $\mathbf{D}^{-1/2}(r)$ или в структуру каждой i-й группы функций $\{\mathbf{p}_k^{(i)}(r)\}$ $(k=0,1,2,\ldots)$ входила функция $\sqrt{m_i(r)}$. Это позволит учесть ее особенности (осцилляции, разрывность и пр.) уже на этапе формирования базиса, что даст возможность принимать во внимание при расчетах сложные формы подошв штампов. В этом случае система базисных функций сможет быть построена по следующему правилу [7]:

$$\int_0^1 [\mathbf{p}_m^{(i)}(\rho)]^T \mathbf{p}_k^{(j)}(\rho)\rho\, d\rho = \delta_{mk}\delta_{ij}, \qquad \mathbf{p}_m^{(i)}(r) = \mathbf{D}^{-1/2}(r)\mathbf{p}_m^{*(i)}(r), \qquad \mathbf{p}_m^{*(i)}(r) = p_m^{*(i)}(r)\mathbf{i}^i,$$

$$p_m^{*(i)}(r) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{m-1,i}\Delta_{m,i}}} \begin{vmatrix} J_{0,i} & J_{1,i} & \cdots & J_{m-1,i} & J_{m,i} \\ J_{1,i} & J_{2,i} & \cdots & J_{m,i} & J_{m+1,i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ J_{m-1,i} & J_{m,i} & \cdots & J_{2m-2,i} & J_{2m-1,i} \\ 1 & r^2 & \cdots & r^{2m-2} & r^{2m} \end{vmatrix}, \qquad J_{k,i} = \int_0^1 \frac{\rho^{2k+1}}{m_i(\rho)}\, d\rho, \tag{12}$$

$$\Delta_{-1,i} = 1, \qquad \Delta_{m,i} = \begin{vmatrix} J_{0,i} & J_{1,i} & \cdots & J_{m,i} \\ J_{1,i} & J_{2,i} & \cdots & J_{m+1,i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_{m,i} & J_{m+1,i} & \cdots & J_{2m,i} \end{vmatrix}, \qquad m,k = 0,1,2,\ldots, \qquad i = 1,2,\ldots,n.$$

Таким образом $\{\mathbf{p}_k^{(i)}(r)\}$ $(i = 1,2,\ldots,n,\ k = 0,1,2,\ldots)$ составляет базис $L_2(\Omega, V)$.

4.1. Заданные осадки штампов (решение уравнения с известной правой частью)

Пусть система штампов представляет группу с заданными осадками штампов $\boldsymbol{\delta}(t)$. Тогда требуется найти контактные давления $\mathbf{q}(r,t)$ под каждым из штампов и вдавливающие усилия $\mathbf{P}(t)$.

Решение уравнения (10) следует искать в виде ряда по собственным функциям оператора $\boldsymbol{\mathcal{F}}$, который является вполне непрерывным, самосопряженным и положительно определенным оператором из $L_2(\Omega, V)$ в $L_2(\Omega, V)$. Система его собственных вектор-функций составляет базис пространства $L_2(\Omega, V)$ [8]. Спектральная задача для оператора $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ может быть записана в форме

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\mathcal{F}}\boldsymbol{\varphi}_\ell(r) = \gamma_\ell \boldsymbol{\varphi}_\ell(r), \\ &\boldsymbol{\varphi}_\ell(r) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^\infty \psi_\ell^{(ik)} \mathbf{p}_k^{(i)}(r), \qquad \ell = 1,2,3,\ldots, \\ &\mathbf{K}(r,\rho) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^\infty \sum_{m=0}^\infty K_{ij}^{km} \mathbf{p}_k^{(i)}(r)[\mathbf{p}_m^{(j)}(\rho)]^T, \\ &\sum_{j=1}^n \sum_{m=0}^\infty K_{ij}^{km} \psi_\ell^{(jm)} = \gamma_\ell \psi_\ell^{(ik)}, \qquad i = 1,2,\ldots,n, \qquad k = 0,1,2,\ldots, \qquad \ell = 1,2,3,\ldots \end{aligned} \tag{13}$$

Представив искомую вектор-функции $\mathbf{Q}(r,t)$ и $\boldsymbol{\Delta}(r,t)$ в виде разложения по собственным вектор-функциям $\boldsymbol{\varphi}_k^{(i)}(r)$ $(i = 1,2,\ldots,n,\ k = 1,2,3,\ldots)$ в $L_2(\Omega, V)$, т. е.

$$\mathbf{Q}(r,t) = \sum_{k=1}^\infty z^{(k)}(t)\boldsymbol{\varphi}_k(r), \qquad \boldsymbol{\Delta}(r,t) = \sum_{k=1}^\infty \Delta^{(k)}(t)\boldsymbol{\varphi}_k(r) = \sum_{k=1}^\infty \left(\sum_{i=1}^n \delta_k^{(i)}\delta_i(t)\right)\boldsymbol{\varphi}_k(r), \tag{14}$$

и подставив эти представления в (10), получим

$$c(t)(\mathbf{I} - \mathbf{V}_1)\sum_{k=1}^\infty z^{(k)}(t)\boldsymbol{\varphi}_k(r) + (\mathbf{I} - \mathbf{V}_2)\boldsymbol{\mathcal{F}}\sum_{k=1}^\infty z^{(k)}(t)\boldsymbol{\varphi}_k(r) = \sum_{k=1}^\infty \Delta^{(k)}(t)\boldsymbol{\varphi}_k(r).$$

Здесь считается, что коэффициенты разложения $\delta_k^{(i)}$ $(i = 1,2,\ldots,n,\ k = 1,2,3,\ldots)$ нам известны. Точнее мы их получаем по известным теперь собственным функциям $\boldsymbol{\varphi}_k(r)$. Учитывая представления из спектральной задачи (13), можно получить

$$z^{(k)}(t) = (\mathbf{I} + \mathbf{W}_k)\frac{\Delta^{(k)}(t)}{c(t) + \gamma_k}, \qquad \mathbf{W}_k f(t) = \int_1^t R_k(t,\tau) f(\tau)\, d\tau, \qquad k = 1,2,3,\ldots, \tag{15}$$

где $R_k(t,\tau)$ — резольвента ядра $K_k^\circ(t,\tau) = [c(t)K_1(t,\tau) + \gamma_k K_2(t,\tau)]/[c(t)+\gamma_k]$ $(k = 1,2,3,\ldots)$.

Таким образом, чтобы найти контактные давления $\mathbf{q}(r,t)$ под штампами, необходимо воспользоваться формулами (9), (13)–(15):

$$
\begin{gathered}
\mathbf{q}(r,t) = \mathbf{D}^{-1/2}(r)\mathbf{Q}(r,t), \qquad \mathbf{Q}(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} z^{(k)}(t)\boldsymbol{\varphi}_k(r), \\
z^{(k)}(t) = (\mathbf{I} + \mathbf{W}_k)\frac{\Delta^{(k)}(t)}{c(t)+\gamma_k}, \qquad \boldsymbol{\varphi}_k(r) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{\ell=0}^{\infty}\psi_k^{(i\ell)}\mathbf{p}_\ell^{(i)}(r), \qquad k = 1,2,3,\ldots, \\
\sum_{j=1}^{n}\sum_{m=0}^{\infty} K_{ij}^{km}\psi_\ell^{(jm)} = \gamma_\ell \psi_\ell^{(ik)}, \qquad i = 1,2,\ldots,n, \qquad k = 0,1,2,\ldots, \qquad \ell = 1,2,3,\ldots \\
K_{ij}^{km} = \int_0^1\int_0^1 [\mathbf{p}_k^{(i)}(r)]^T \mathbf{K}(r,\rho)\mathbf{p}_m^{(j)}(\rho) r\rho\, dr\, d\rho, \qquad i,j = 1,2,\ldots,n, \qquad k,m = 0,1,2,\ldots, \\
\Delta^{(k)}(t) = \int_0^1 [\boldsymbol{\Delta}(\rho,t)]^T \boldsymbol{\varphi}_k(\rho)\rho\, d\rho, \qquad k = 1,2,3,\ldots
\end{gathered}
\tag{16}
$$

При этом исходные базисные функции следует строить по формулам (12).

Отметим, что в силу формул (12) и (16)

$$
\mathbf{q}(r,t) = \mathbf{D}^{-1}(r)\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{\ell=0}^{\infty}\mathbf{p}_\ell^{*(i)}(r)\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k^{(i\ell)}z^{(k)}(t)\right]
$$

или

$$
q_i(r,t) = \frac{1}{m_i(r)}\left[\sum_{\ell=0}^{\infty} p_\ell^{*(i)}(r)\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k^{(i\ell)}z^{(k)}(t)\right], \qquad i = 1,2,\ldots,n.
$$

Видно, что в решении в явном виде выделены функции $m_i(r)$, которые связаны с функциями профиля подошв штампов, а в квадратных скобках стоит сумма гладких функций (многочленов). Это позволяет производить расчеты для случаев, когда форма подошв штампов задается быстро осциллирующими функциями.

Для получения вектора вдавливающих усилий $\mathbf{P}(t)$ необходимо воспользоваться уже полученной вектор-функцией $\mathbf{q}(r,t)$, подставив ее в уравнение (11):

$$
\mathbf{P}(t) = \int_0^1 \mathbf{q}(\rho,t)\rho\, d\rho.
$$

4.2. Заданные вдавливающие усилия (решение уравнения с неизвестной правой частью и дополнительным условием)

Пусть система штампов представляет группу с заданными вдавливающими силами $\mathbf{P}(t)$. Тогда требуются найти контактные давления $\mathbf{q}(r,t)$ под каждым из штампов и осадки штампов $\boldsymbol{\delta}(t)$.

В этом случае пространство $L_2(\Omega,V)$ необходимо представить в виде прямой суммы ортогональных подпространств $L_2(\Omega,V) = L_2^{(0)}(\Omega,V)\oplus L_2^{(1)}(\Omega,V)$, где $L_2^{(0)}(\Omega,V)$ — евклидово пространство с базисными функциями $\{\mathbf{p}_0^{(i)}(r)\}$ $(i = 1,2,\ldots,n)$, а $L_2^{(1)}(\Omega,V)$ — гильбертово пространство с базисом $\{\mathbf{p}_k^{(i)}(r)\}$ $(i = 1,2,\ldots,n,\ k = 1,2,3,\ldots)$. Подынтегральная функция и правая часть уравнения (10) представимы в виде алгебраической суммы вектор-функций, непрерывных по времени t в $L_2^{(0)}(\Omega,V)$ и $L_2^{(1)}(\Omega,V)$ соответственно, т. е.

$$
\mathbf{Q}(r,t) = \mathbf{Q}_0(r,t) + \mathbf{Q}_1(r,t), \qquad \boldsymbol{\Delta}(r,t) = \boldsymbol{\Delta}_0(r,t) + \boldsymbol{\Delta}_1(r,t), \tag{17}
$$

где

$$
\mathbf{Q}_0(r,t) = \sum_{i=1}^{n} z_i^{(0)}(t)\mathbf{p}_0^{(i)}(r), \qquad \boldsymbol{\Delta}_0(r,t) = \sum_{i=1}^{n}\Delta_i(t)\mathbf{p}_0^{(i)}(r), \qquad \Delta_i(t) = \sqrt{J_{0,i}}\,\delta_i(t). \tag{18}
$$

Заметим, что в представлении для $\mathbf{Q}(r,t)$ нам известно слагаемое $\mathbf{Q}_0(r,t)$, функция разложения которого определяется дополнительным условием (11):

$$z_i^{(0)}(t) = \frac{P_i(t)}{\sqrt{J_{0,i}}}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{19}$$

а слагаемое $\mathbf{Q}_1(r,t)$ требуется найти. Для правой части наоборот — требуется определить $\boldsymbol{\Delta}_0(r,t)$, а функция $\boldsymbol{\Delta}_1(r,t) \equiv \mathbf{0}$.

Введем оператор ортогонального проектирования (ортопроектор), который отображает пространство $L_2(\Omega, V)$ в $L_2^{(0)}(\Omega, V)$:

$$\mathbf{P}_0\boldsymbol{\phi}(r,t) = \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 [\boldsymbol{\phi}(\rho,t)]^T \mathbf{p}_0^{(i)}(\rho)\rho\, d\rho\, \mathbf{p}_0^{(i)}(r). \tag{20}$$

Очевидно, что ортопроектор $\mathbf{P}_1 = \mathbf{I} - \mathbf{P}_0$ переводит пространство $L_2(\Omega, V)$ в $L_2^{(1)}(\Omega, V)$. Кроме того, имеют место следующие соотношения:

$$\mathbf{P}_k\mathbf{Q}(r,t) = \mathbf{Q}_k(r,t), \qquad \mathbf{P}_k\boldsymbol{\Delta}(r,t) = \boldsymbol{\Delta}_k(r,t), \qquad k = 0,\ 1.$$

Подействуем на уравнение (10) оператором ортогонального проектирования $\mathbf{P}_1$. В результате получим уравнение для определения $\mathbf{Q}_1(r,t)$ с известной правой частью:

$$c(t)(\mathbf{I} - \mathbf{V}_1)\mathbf{Q}_1(r,t) + (\mathbf{I} - \mathbf{V}_2)\mathbf{P}_1\boldsymbol{\mathcal{F}}\mathbf{Q}_1(r,t) = -(\mathbf{I} - \mathbf{V}_2)\mathbf{P}_1\boldsymbol{\mathcal{F}}\mathbf{Q}_0(r,t) = \tilde{\boldsymbol{\Delta}}_1(r,t). \tag{21}$$

Его решение необходимо строить в виде ряда по собственным функциям оператора $\mathbf{P}_1\boldsymbol{\mathcal{F}}$, который, как можно показать, является вполне непрерывным, самосопряженным и положительно определенным оператором из $L_2^{(1)}(\Omega, V)$ в $L_2^{(1)}(\Omega, V)$. Система собственных функций такого оператора составляет базис пространства $L_2^{(2)}(\Omega, V)$. Спектральная задача для оператора $\mathbf{P}_1\boldsymbol{\mathcal{F}}$ может быть записана в форме

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}_1\boldsymbol{\mathcal{F}}\boldsymbol{\varphi}_\ell(r) = \gamma_\ell\boldsymbol{\varphi}_\ell(r),\\
&\boldsymbol{\varphi}_\ell(r) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty} \psi_\ell^{(ik)}\mathbf{p}_k^{(i)}(r), \qquad \ell = 1, 2, 3, \ldots,\\
&\mathbf{K}(r,\rho) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} K_{ij}^{km}\mathbf{p}_k^{(i)}(r)[\mathbf{p}_m^{(j)}(\rho)]^T,\\
&\sum_{j=1}^{n}\sum_{m=1}^{\infty} K_{ij}^{km}\psi_\ell^{(jm)} = \gamma_\ell\psi_\ell^{(ik)}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad k, \ell = 1, 2, 3, \ldots
\end{aligned} \tag{22}$$

Представив искомую функцию $\mathbf{Q}_1(r,t)$ в виде разложения по новым базисным функциям $\boldsymbol{\varphi}_k(r)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ в $L_2^{(1)}(\Omega, V)$, т. е.

$$\mathbf{Q}_1(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} z^{(k)}(t)\boldsymbol{\varphi}_k(r), \tag{23}$$

и подставив это представление в (21), получим уравнение для определения неизвестных функций разложения $z^{(k)}(t)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$:

$$z^{(k)}(t) = (\mathbf{I} + \mathbf{W}_k)\frac{\Delta^{(k)}(t)}{c(t) + \gamma_k}, \qquad \mathbf{W}_k f(t) = \int_1^t R_k(t,\tau) f(\tau)\, d\tau, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{24}$$

где $R_k(t,\tau)$ — резольвента ядра $K_k^\circ(t,\tau) = [c(t)K_1(t,\tau) + \gamma_k K_2(t,\tau)]/[c(t) + \gamma_k]$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$.

Таким образом, чтобы найти контактные давления $\mathbf{q}(r,t)$ под штампами необходимо воспользоваться формулами (9), (17)–(19), (22)–(24):

$$\mathbf{q}(r,t) = \mathbf{D}^{-1/2}(r)\mathbf{Q}(r,t), \qquad \mathbf{Q}(r,t) = \sum_{i=1}^{n} z_i^{(0)}(t)\mathbf{p}_0^{(i)}(r) + \sum_{k=1}^{\infty} z^{(k)}(t)\boldsymbol{\varphi}_k(r),$$

$$z_i^{(0)}(t) = \frac{P_i(t)}{\sqrt{J_{0,i}}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$z^{(k)}(t) = (\mathbf{I} + \mathbf{W}_k)\frac{\Delta^{(k)}(t)}{c(t) + \gamma_k}, \qquad \boldsymbol{\varphi}_k(r) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{\infty}\psi_k^{(i\ell)}\mathbf{p}_\ell^{(i)}(r), \qquad k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{25}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{m=1}^{\infty}K_{ij}^{km}\psi_\ell^{(jm)} = \gamma_\ell\psi_\ell^{(ik)}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad k, \ell = 1, 2, 3, \ldots$$

$$K_{ij}^{km} = \int_0^1\int_0^1[\mathbf{p}_k^{(i)}(r)]^T\mathbf{K}(r,\rho)\mathbf{p}_m^{(j)}(\rho)r\rho\,dr\,d\rho, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n, \qquad k, m = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\tilde{\Delta}^{(k)}(t) = \int_0^1[\tilde{\boldsymbol{\Delta}}_1(\rho,t)]^T\boldsymbol{\varphi}_k(\rho)\rho\,d\rho, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

При этом исходные базисные функции следует строить по формулам (12).

Как и в случае с заданными осадками, в решении в явном виде выделены функции $m_i(r)$:

$$\mathbf{q}(r,t) = \mathbf{D}^{-1}(r)\sum_{i=1}^{n}\left[\mathbf{p}_0^{*(i)}(r)z_i^{(0)}(t) + \sum_{\ell=1}^{\infty}\mathbf{p}_\ell^{*(i)}(r)\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k^{(i\ell)}z^{(k)}(t)\right]$$

или

$$q_i(r,t) = \frac{1}{m_i(r)}\left[p_0^{*(i)}(r)z_i^{(0)}(t) + \sum_{\ell=1}^{\infty}p_\ell^{*(i)}(r)\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k^{(i\ell)}z^{(k)}(t)\right], \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Полностью определив контактные давления под штампами, можно найти и неизвестные осадки. Для этого подействуем оператором $\mathbf{P}_0$ на уравнение (10):

$$c(t)(\mathbf{I} - \mathbf{V}_1)\mathbf{Q}_0(r,t) + (\mathbf{I} - \mathbf{V}_2)\mathbf{P}_0\boldsymbol{\mathcal{F}}\mathbf{Q}(r,t) = \sum_{i=1}^{n}\sqrt{J_{0,i}}\delta_i(t)\mathbf{p}_0^{(i)}(r).$$

Подставив сюда представление для $\mathbf{Q}(r,t)$ и, в частности, для $\mathbf{Q}_0(r,t)$, получим непосредственное уравнение для определения осадок $\delta_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

5. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДВУХ ГРУПП ШТАМПОВ

Наконец, рассмотрим вариант, когда система штампов состоит из двух групп, на одной из которых заданы квазистатические (известны вдавливающие усилия), а на другой кинематические условия (известны осадки). Штампы первой группы пронумеруем от 1 до n_0, а второй — от $n_0 + 1$ до n.

Пусть на части штампов заданы силы $P_\ell(t)$ $(\ell = 1, 2, \ldots, n_0)$, а на части осадки $\delta_p(t)$ $(p = n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots, n)$. Требуется найти контактные давления $q_i(r,t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, осадки $\delta_\ell(t)$ $(\ell = 1, 2, \ldots, n_0)$ и вдавливающие усилия $P_p(t)$ $(p = n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots, n)$.

В этом случае пространство $L_2(\Omega, V)$ необходимо представить в виде прямой суммы ортогональных подпространств $L_2(\Omega, V) = L_2^{(0)}(\Omega, V) \oplus L_2^{(1)}(\Omega, V)$, где $L_2^{(0)}(\Omega, V)$ — евклидово пространство с базисными функциями $\{\mathbf{p}_0^{(\ell)}(r)\}$ $(\ell = 1, 2, \ldots, n_0)$, а $L_2^{(1)}(\Omega, V)$ — гильбертово пространство с базисом $\{\mathbf{p}_0^{(p)}(r), \mathbf{p}_k^{(i)}(r)\}$ $(p = n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots, n,\ i = 1, 2, \ldots, n,\ k = 1, 2, 3, \ldots)$. Подынтегральная функция и правая часть уравнения (10) представимы в виде алгебраической суммы вектор-функций, непрерывных по времени t в $L_2^{(0)}(\Omega, V)$ и $L_2^{(1)}(\Omega, V)$ соответственно, т. е.

$$\mathbf{Q}(r,t) = \mathbf{Q}_0(r,t) + \mathbf{Q}_1(r,t), \qquad \boldsymbol{\Delta}(r,t) = \boldsymbol{\Delta}_0(r,t) + \boldsymbol{\Delta}_1(r,t), \tag{26}$$

где

$$\mathbf{Q}_0(r,t) = \sum_{\ell=1}^{n_0}z_\ell^{(0)}(t)\mathbf{p}_0^{(\ell)}(r), \qquad \boldsymbol{\Delta}_0(r,t) = \sum_{\ell=1}^{n_0}\Delta_\ell(t)\mathbf{p}_0^{(\ell)}(r), \qquad \Delta_\ell(t) = \sqrt{J_{0,\ell}}\delta_\ell(t). \tag{27}$$

Заметим, что в представлении для $\mathbf{Q}(r,t)$ нам известно слагаемое $\mathbf{Q}_0(r,t)$, функция разложения которого определяется частью дополнительных условий из (11):

$$z_\ell^{(0)}(t) = \frac{P_\ell(t)}{\sqrt{J_{0,\ell}}}, \qquad \ell = 1, 2, \ldots, n_0, \tag{28}$$

а слагаемое $\mathbf{Q}_1(r,t)$ требуется найти. Для правой части наоборот — требуется определить $\mathbf{\Delta}_0(r,t)$, а функция $\mathbf{\Delta}_1(r,t)$ известна.

Введем оператор ортогонального проектирования (ортопроектор), который отображает пространство $L_2(\Omega,V)$ в $L_2^{(0)}(\Omega,V)$:

$$\mathbf{P}_0\boldsymbol{\phi}(r,t) = \sum_{\ell=1}^{n_0}\int_0^1 [\boldsymbol{\phi}(\rho,t)]^T \mathbf{p}_0^{(\ell)}(\rho)\rho\,d\rho\,\mathbf{p}_0^{(\ell)}(r). \tag{29}$$

Очевидно, что ортопроектор $\mathbf{P}_1 = \mathbf{I} - \mathbf{P}_0$ переводит пространство $L_2(\Omega,V)$ в $L_2^{(1)}(\Omega,V)$. Кроме того, имеют место следующие соотношения:

$$\mathbf{P}_i\mathbf{Q}(r,t) = \mathbf{Q}_i(r,t), \qquad \mathbf{P}_i\mathbf{\Delta}(r,t) = \mathbf{\Delta}_i(r,t), \qquad i = 0,\,1.$$

Подействуем на уравнение (10) оператором ортогонального проектирования $\mathbf{P}_1$. В результате получим уравнение для определения $\mathbf{Q}_1(r,t)$ с известной правой частью

$$c(t)\mathbf{Q}_1(r,t) + (\mathbf{I}-\mathbf{V}_2)\mathbf{P}_1\boldsymbol{\mathcal{F}}\mathbf{Q}_1(r,t) = -(\mathbf{I}-\mathbf{V}_2)\mathbf{P}_1\boldsymbol{\mathcal{F}}\mathbf{Q}_0(r,t) + \mathbf{\Delta}_1(r,t) = \tilde{\mathbf{\Delta}}_1(r,t). \tag{30}$$

Его решение необходимо строить в виде ряда по собственным функциям оператора $\mathbf{P}_1\boldsymbol{\mathcal{F}}$, который, как можно показать, является вполне непрерывным, самосопряженным и положительно определенным оператором из $L_2^{(1)}(\Omega,V)$ в $L_2^{(1)}(\Omega,V)$. Система собственных функций такого оператора составляет базис пространства $L_2^{(2)}(\Omega,V)$. Спектральная задача для оператора $\mathbf{P}_1\boldsymbol{\mathcal{F}}$ может быть записана в форме

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}_1\boldsymbol{\mathcal{F}}\boldsymbol{\varphi}_j(r) = \gamma_\ell\boldsymbol{\varphi}_j(r),\\
&\boldsymbol{\varphi}_j(r) = \sum_{p=n_0+1}^{n}\psi_j^{(p0)}\mathbf{p}_0^{(p)}(r) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty}\psi_j^{(ik)}\mathbf{p}_k^{(i)}(r), \qquad j=1,2,3,\ldots,\\
&\mathbf{K}(r,\rho) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}K_{ij}^{km}\mathbf{p}_k^{(i)}(r)[\mathbf{p}_m^{(j)}(\rho)]^T,\\
&\sum_{j=n_0+1}^{n}K_{ij}^{k0}\psi_\ell^{(j0)} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{m=1}^{\infty}K_{ij}^{km}\psi_\ell^{(jm)} = \gamma_\ell\psi_\ell^{(ik)},\\
&i = \begin{cases} n_0+1, n_0+2, \ldots, n \text{ при } k=0,\\ 1,2,\ldots,n \text{ при } k=1,2,3,\ldots,\end{cases} \qquad \ell = 1,2,3,\ldots
\end{aligned} \tag{31}$$

Представив искомую функцию $\mathbf{Q}_1(r,t)$ в виде разложения по новым базисным функциям $\boldsymbol{\varphi}_k(r)$ $(k=1,2,3,\ldots)$ в $L_2^{(1)}(\Omega,V)$, т. е.

$$\mathbf{Q}_1(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty}z^{(k)}(t)\boldsymbol{\varphi}_k(r), \tag{32}$$

и подставив это представление в (30), получим уравнение для определения неизвестных функций разложения $z^{(k)}(t)$ $(k=1,2,3,\ldots)$:

$$z^{(k)}(t) = (\mathbf{I}+\mathbf{W}_k)\frac{\Delta^{(k)}(t)}{c(t)+\gamma_k}, \qquad \mathbf{W}_k f(t) = \int_1^t R_k(t,\tau)f(\tau)\,d\tau, \qquad k=1,2,3,\ldots, \tag{33}$$

где $R_k(t,\tau)$ — резольвента ядра $K_k^\circ(t,\tau) = [c(t)K_1(t,\tau)+\gamma_k K_2(t,\tau)]/[c(t)+\gamma_k]$ $(\ell=1,2,3,\ldots)$.

Таким образом, чтобы найти контактные давления $\mathbf{q}(r,t)$ под штампами, необходимо воспользоваться формулами (9), (26)–(28), (31)–(33):

$$\mathbf{q}(r,t) = \mathbf{D}^{-1/2}(r)\mathbf{Q}(r,t), \qquad \mathbf{Q}(r,t) = \sum_{i=1}^{n_0}z_i^{(0)}(t)\mathbf{p}_0^{(i)}(r) + \sum_{k=1}^{\infty}z^{(k)}(t)\boldsymbol{\varphi}_k(r),$$

$$z_i^{(0)}(t) = \frac{P_i(t)}{\sqrt{J_{0,i}}}, \qquad i=1,2,\ldots,n_0, \qquad z^{(k)}(t) = (\mathbf{I}+\mathbf{W}_k)\frac{\Delta^{(k)}(t)}{c(t)+\gamma_k}, \qquad k=1,2,3,\ldots,$$

$$\boldsymbol{\varphi}_k(r) = \sum_{p=n_0+1}^{n}\psi_k^{(p0)}\mathbf{p}_0^{(p)}(r) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{\infty}\psi_k^{(i\ell)}\mathbf{p}_\ell^{(i)}(r), \qquad k=1,2,3,\ldots,$$

$$\sum_{j=n_0+1}^{n} K_{ij}^{k0}\psi_\ell^{(j0)} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{m=1}^{\infty} K_{ij}^{km}\psi_\ell^{(jm)} = \gamma_\ell \psi_\ell^{(ik)},$$

$$i = \begin{cases} n_0+1, n_0+2, \dots, n & \text{при } k=0, \\ 1, 2, \dots, n & \text{при } k = 1,2,3,\dots, \end{cases} \qquad \ell = 1,2,3,\dots$$

$$\tilde{\Delta}^{(k)}(t) = \int_0^1 [\tilde{\mathbf{\Delta}}_1(\rho,t)]^T \boldsymbol{\varphi}_k(\rho)\rho\,d\rho, \qquad k = 1,2,3,\dots$$

При этом исходные базисные функции следует строить по формулам (12). Отметим, что при $n_0 = 0$ (т.е. при известных осадках и неизвестных усилиях) полученные формулы совпадают с (16), а при $n_0 = n$ (т.е. при известных усилиях и неизвестных осадках) — с (25).

Отметим, что, как и в предыдущих двух вариантах, матрица $\mathbf{D}(r)$ выделена в решении явно:

$$\mathbf{q}(r,t) = \mathbf{D}^{-1}(r)\left[\sum_{i=1}^{n_0}\mathbf{p}_0^{*(i)}(r)z_i^{(0)}(t) + \sum_{p=n_0+1}^{n}\mathbf{p}_0^{*(p)}(r)\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k^{(p0)}z^{(k)}(t) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{\infty}\mathbf{p}_\ell^{*(i)}(r)\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k^{(i\ell)}z^{(k)}(t)\right]$$

или

$$q_i(r,t) = \frac{1}{m_i(r)}\left[p_0^{*(i)}(r)z_i^{(0)}(t) + \sum_{\ell=1}^{\infty}p_\ell^{*(i)}(r)\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k^{(i\ell)}z^{(k)}(t)\right], \qquad i = 1,2,\dots,n_0,$$

$$q_i(r,t) = \frac{1}{m_i(r)}\left[p_0^{*(i)}(r)\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k^{(i0)}z^{(k)}(t) + \sum_{\ell=1}^{\infty}p_\ell^{*(i)}(r)\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k^{(i\ell)}z^{(k)}(t)\right], \qquad i = n_0+1, n_0+2,\dots,n.$$

Полностью определив контактные давления под штампами можно найти и неизвестные осадки. Для этого подействуем оператором $\mathbf{P}_0$ на уравнение (10):

$$c(t)(\mathbf{I}-\mathbf{V}_1)\mathbf{Q}_0(r,t) + (\mathbf{I}-\mathbf{V}_2)\mathbf{P}_0\boldsymbol{\mathcal{F}}\mathbf{Q}(r,t) = \sum_{i=1}^{n_0}\sqrt{J_{0,i}}\delta_i(t)\mathbf{p}_0^{(i)}(r).$$

Подставив сюда представление для $\mathbf{Q}(r,t)$ и, в частности, для $\mathbf{Q}_0(r,t)$, получим непосредственное уравнение для определения $\delta_i(t)$ $(i = 1,2,\dots,n_0)$.

ВЫВОДЫ

Поставлена и решена осесимметричная задача о конформном контакте между вязкоупругим стареющим основанием с покрытием и системой жестких штампов. Рассмотрены все варианты постановки задачи. Решения задач получены в аналитическом виде, причем в выражениях для контактных напряжений функции формы подошв штампов выделены явно, что позволяет проводить расчеты для тел с покрытиями, форма которых описывается быстро осциллирующими функциями.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-00991).

Библиографический список

1. *Арутюнян Н. Х., Манжиров А. В.* Контактные задачи теории ползучести. Ереван : Изд-во НАН РА, 1999. 318 с.

2. *Манжиров А. В.* Контактные задачи для неоднородных стареющих вязкоупругих тел // Механика контактных взаимодействий / под ред. И. И. Воровича и В. М. Александрова. М. : Физматлит, 2001. С. 549–565.

3. *Александров В. М., Мхитарян С. М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М. : Наука, 1983. 488 с.

4. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М. : Наука, 1974. 456 с.

5. *Гурса Э.* Курс математического анализа : в 3 т. Т. 3, ч. II : Интегральные уравнения и вариационное исчисление. М.; Л. : ГТТИ, 1934. 318 с.

6. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М. : Наука, 1981. 512 с.

7. *Сегё Г.* Ортогональные многочлены. М. : Физматлит, 1962. 500 с.

8. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М. : Наука, 1976. 496 с.