polynomials on a finite interval of the real axis]. *Izvestiia AN SSSR. Ser. matematicheskaia*, 1958, vol. 22, no. 3, pp. 337–354 (in Russian).

7. Freud G. Über die Approximation Reelen Stetiger Functionen Durch Gewohnliche Polinome. *Math. Ann.*, 1959, vol. 137, no. 1, pp. 17–25.

8. Teljakovskii S. A. Two theorems on approximation of functions by algebraic polynomials. *Mat. Sb. (N. S.)*, 1966, vol. 70(112), no. 2, pp. 252–265 (in Russian).

9. Brudnyi Yu. A. The approximation of functions by algebraic polynomials. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 1968, vol. 2, no. 4, pp. 735–743. DOI: 10.1070/IM1968v002n04ABEH000662

10. Lorentz G. G., Zeller K. L. Degree of Approximation by Monotone Polynomials. II. *J. Approx. Theory*, 1969, vol. 2, no. 3, pp. 265–269.

11. Shevchuk I. A. *Priblizhenie mnogochlenami i sledy nepreryvnykh na otrezke funktsii* [Approximation by polynomials and traces continuous on the interval functions]. Kiev, Naukova dumka, 1992. 225 p. (in Russian)

12. Shvedov A. S. Jackson's theorem in L^p, $0 < p < 1$, for algebraic polynomials, and orders of comonotone approximations. *Math. Notes*, 1979, vol. 25, no. 1, pp. 57–63.

13. Shvedov A. S. Komonotonnoe priblizhenie funktsii mnogochlenami [Comonotone approximation of functions by polynomials]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 1980, vol. 250, no. 1, pp. 39–42 (in Russian).

14. Dzyadyk V. K. *Vvedenie v teoriiu ravnomernogo priblizheniia funktsii polinomami* [Introduction to the theory of uniform approximation of functions by polynomials]. Moscow, Nauka, 1977, 512 p. (in Russian)

УДК 512.572

О ТОЖДЕСТВАХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА В АЛГЕБРАХ ПУАССОНА

С. М. Рацеев

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информационной безопасности и теории управления, Ульяновский государственный университет, RatseevSM@mail.ru

В работе рассматриваются так называемые customary и extended customary тождества в алгебрах Пуассона. Показано, что последовательность коразмерностей $\{r_n(V)\}_{n\geq 1}$ любого extended customary пространства многообразия алгебр Пуассона V над произвольным полем либо ограничена полиномом, либо не ниже показательной функции с основанием степени, равной 2. При этом если данная последовательность ограничена полиномом, то найдется такой многочлен $R(x)$ с рациональными коэффициентами, что $r_n(V) = R(n)$ для всех достаточно больших n. Приводится нижняя и верхняя границы для многочленов $R(x)$ произвольной фиксированной степени.

Ключевые слова: алгебра Пуассона, многообразие алгебр, рост многообразия.

Векторное пространство A над полем K с двумя K-биллинейными операциями умножения «$\cdot$» и «$\{,\}$» называется алгеброй Пуассона, если относительно операции «$\cdot$» пространство A является коммутативной ассоциативной алгеброй с единицей, относительно операции «$\{,\}$» — алгеброй Ли, и данные операции связаны правилом Лейбница:

$$\{a \cdot b, c\} = a \cdot \{b, c\} + \{a, c\} \cdot b, \qquad a, b, c \in A.$$

Алгебры Пуассона возникают в различных разделах алгебры, дифференциальной геометрии, топологии, современной теоретической физики и т. д.

Пусть $F(X)$ — свободная алгебра Пуассона, где $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ — счетное множество свободных образующих. Обозначим через P_n пространство в $F(X)$, состоящее из полилинейных элементов степени n от переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Выделим в пространстве P_{2n} подпространство Q_{2n}, порожденное элементами вида

$$\{x_{a_1}, x_{a_2}\} \cdot \{x_{a_3}, x_{a_4}\} \cdot \ldots \cdot \{x_{a_{2n-1}}, x_{a_{2n}}\}.$$

Тогда данное пространство есть линейная оболочка следующих элементов:

$$\begin{gathered} Q_{2n} = \langle \{x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}\} \cdot \{x_{\tau(3)}, x_{\tau(4)}\} \cdot \ldots \cdot \{x_{\tau(2n-1)}, x_{\tau(2n)}\} \mid \tau \in S_{2n}, \\ \tau(1) < \tau(2),\ \tau(3) < \tau(4), \ldots, \tau(2n-1) < \tau(2n), \\ \tau(1) < \tau(3) < \ldots < \tau(2n-1)\rangle_K. \end{gathered}$$

Обозначим через T_{2n} множество перестановок τ из S_{2n}, которые удовлетворяют указанным выше свойствам. Пространство Q_{2n} было введено Д. Фаркашом (D. R. Farkas) в работах [1,2]. Важность рассмотрения данных пространств показывает следующая теорема.

Теорема 1 [1]. *Пусть* $\mathbf{V}$ — *многообразие алгебр Пуассона над полем нулевой характеристики, в котором выполнено нетривиальное тождество. Тогда в* $\mathbf{V}$ *выполняется нетривиальное тождество вида*

$$\sum_{\tau\in T_{2n}} \alpha_\tau \{x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}\} \cdot \{x_{\tau(3)}, x_{\tau(4)}\} \cdot \ldots \cdot \{x_{\tau(2n-1)}, x_{\tau(2n)}\} = 0, \quad \alpha_\tau \in K.$$

Определим также подпространство R_n в P_n, порожденное элементами вида

$$\{x_{a_1}, x_{a_2}\} \cdot \{x_{a_3}, x_{a_4}\} \cdot \ldots \cdot \{x_{a_{2m-1}}, x_{a_{2m}}\} \cdot x_{\alpha_{2m+1}} \cdot \ldots \cdot x_{\alpha_n}.$$

Тогда пространство R_n является линейной оболочкой элементов следующего вида:

$$\begin{gathered} R_n = \langle \{x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}\} \cdot \{x_{\tau(3)}, x_{\tau(4)}\} \cdot \ldots \cdot \{x_{\tau(2m-1)}, x_{\tau(2m)}\} \cdot x_{\tau(2m+1)} \cdot \ldots \cdot x_{\tau(n)} \mid, \\ \tau \in S_n, \quad 0 \le 2m \le n, \\ \tau(1) < \tau(2),\ \tau(3) < \tau(4), \ldots, \tau(2m-1) < \tau(2m), \\ \tau(1) < \tau(3) < \ldots < \tau(2m-1), \\ \tau(2m+1) < \tau(2m+2) < \ldots < \tau(n)\rangle_K. \end{gathered}$$

Пусть $\mathbf{V}$ — некоторое многообразие алгебр Пуассона (все необходимые сведения о многообразиях PI-алгебр можно найти, например, в монографиях [3,4]), $Id(\mathbf{V})$ — идеал тождеств многообразия $\mathbf{V}$. Обозначим:

$$\begin{gathered} P_n(\mathbf{V}) = P_n/(P_n \cap Id(\mathbf{V})), \qquad c_n(\mathbf{V}) = \dim P_n(\mathbf{V}), \\ Q_{2n}(\mathbf{V}) = Q_{2n}/(Q_{2n} \cap Id(\mathbf{V})), \qquad q_{2n}(\mathbf{V}) = \dim Q_{2n}(\mathbf{V}), \\ R_n(\mathbf{V}) = R_n/(R_n \cap Id(\mathbf{V})), \qquad r_n(\mathbf{V}) = \dim R_n(\mathbf{V}). \end{gathered}$$

Лемма 1. *Пусть* $F = F(X)$, $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$, *основное поле произвольно и элементы*

$$u_s^{2n}(x_1, \ldots, x_{2n}), \qquad s = 1, \ldots, q_{2n}(F), \tag{1}$$

образуют базис пространства Q_{2n}, $n > 0$. *Тогда полилинейные элементы от переменных* $x_1, \ldots, x_n$ *вида*

$$\begin{gathered} x_1 \cdot \ldots \cdot x_n, \\ x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_{n-2k}} \cdot u_s^{2k}(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{2k}}), \end{gathered} \tag{2}$$

$$2 \le 2k \le n, \qquad s = 1, \ldots, q_{2k}(F), \qquad i_1 < \ldots < i_{n-2k}, \qquad j_1 < \ldots < j_{2k},$$

будут образовывать базис пространства R_n.

Доказательство. Очевидно, что любой элемент из R_n является линейной комбинацией элементов вида (2).

Покажем, что элементы вида (2) линейно независимы в R_n. Предположим противное. Пусть выполнено нетривиальное линейное соотношение:

$$\sum_{\substack{0\le 2k\le n,\ 1\le s\le q_{2k}(F),\\ 1\le j_1<\ldots<j_{2k}\le n}} \alpha^{k,s}_{j_1\ldots j_{2k}} x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_{n-2k}} \cdot u_s^{2k}(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{2k}}) = 0. \tag{3}$$

Выберем такое минимальное значение k, при котором $\alpha^{k,s}_{j_1\ldots j_{2k}} \ne 0$. Подставим в этом случае вместо переменных $x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-2k}}$ единицу. Тогда из (3) будет следовать такое нетривиальное линейное соотношение:

$$\sum_{s=1}^{q_{2k}(F)} \beta_s u_s^{2k}(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{2k}}) = 0,$$

где не все β_s равны 0, что противоречит линейной независимости элементов (1). □

Лемма 2. *Пусть* $\mathbf{V}$ — *некоторое многообразие алгебр Пуассона над произвольным полем. Тогда*

(i) *полилинейные элементы*

$$u_s^{2n}(x_1,\ldots,x_{2n}), \qquad s=1,\ldots,q_{2n}(\mathbf{V}), \tag{4}$$

образуют базис пространства $Q_{2n}(\mathbf{V})$ тогда и только тогда, когда полилинейные элементы от переменных $x_1,\ldots,x_n$ вида

$$\begin{gathered} x_1\cdot\ldots\cdot x_n, \\ x_{i_1}\cdot\ldots\cdot x_{i_{n-2k}}\cdot u_s^{2k}(x_{j_1},\ldots,x_{j_{2k}}), \\ 2\le 2k\le n, \qquad s=1,\ldots,q_{2k}(\mathbf{V}), \qquad i_1<\ldots<i_{n-2k}, \qquad j_1<\ldots<j_{2k}, \end{gathered} \tag{5}$$

образуют базис пространства $R_n(\mathbf{V})$.

(ii) *для любого натурального числа n выполнено равенство*

$$r_n(\mathbf{V}) = 1+\sum_{2\le 2k\le n} C_n^{2k} q_{2k}(\mathbf{V}),$$

где C_n^{2k} — число сочетаний из n по $2k$.

Доказательство. (i) Доказательство линейной независимости элементов вида (5) аналогично доказательству линейной независимости элементов вида (2) в лемме 1. Поэтому остается показать, что любой элемент из $R_n(\mathbf{V})$ линейно выражается через элементы вида (5). Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)\in R_n(\mathbf{V})$.

Дополним элементы (4) до базиса пространства Q_{2k}, $0\le 2k\le n$:

$$u_s^{2k}(x_1,\ldots,x_{2k}),\ v_t^{2k}(x_1,\ldots,x_{2k}),\ s=1,\ldots,q_{2k}(\mathbf{V}),\ t=1,\ldots,q_{2k}(F)-q_{2k}(\mathbf{V}).$$

Тогда из леммы 1 следует, что элемент $f(x_1,\ldots,x_n)$ представим в виде следующей линейной комбинации:

$$\begin{aligned} f(x_1,\ldots,x_n) = &\sum_{\substack{0\le 2k\le n,\ 1\le s\le q_{2k}(\mathbf{V}),\\ 1\le j_1<\ldots<j_{2k}\le n}} \alpha^{k,s}_{j_1\ldots j_{2k}} x_{i_1}\cdot\ldots\cdot x_{i_{n-2k}}\cdot u_s^{2k}(x_{j_1},\ldots,x_{j_{2k}}) + \\ &+ \sum_{\substack{0\le 2k\le n,\ 1\le t\le q_{2k}(F)-q_{2k}(\mathbf{V}),\\ 1\le j_1<\ldots<j_{2k}\le n}} \beta^{k,t}_{j_1\ldots j_{2k}} x_{i_1}\cdot\ldots\cdot x_{i_{n-2k}}\cdot v_t^{2k}(x_{j_1},\ldots,x_{j_{2k}}). \end{aligned} \tag{6}$$

Предположим, что в равенстве (6) хотя бы один из элементов $\beta^{k,t}_{j_1\ldots j_{2k}}$ не равен нулю. Выберем такое минимальное значение k, при котором $\beta^{k,t}_{j_1\ldots j_{2k}}\ne 0$. Подставим вместо переменных $x_{i_1},\ldots,x_{i_{n-2k}}$ единицу. Получим такое равенство:

$$f(1,\ldots,x_{j_1},\ldots,x_{j_{2k}},\ldots,1) = \sum_{s=1}^{q_{2k}(\mathbf{V})} \epsilon_s u_s^{2k}(x_{j_1},\ldots,x_{j_{2k}}) + \sum_{t=1}^{q_{2k}(F)-q_{2k}(\mathbf{V})} \delta_t v_t^{2k}(x_{j_1},\ldots,x_{j_{2k}}), \tag{7}$$

где не все δ_t равны 0. Так как левая часть равенства (7) принадлежит $Q_{2k}(\mathbf{V})$ и не все δ_t равны 0, то элементы вида (4) не являются базисом пространства $Q_{2k}(\mathbf{V})$. Противоречие.

Пункт (ii) следует из пункта (i). □

Теорема 2. *Пусть $\mathbf{V}$ — нетривиальное многообразие алгебр Пуассона над произвольным полем. Тогда либо*

1) *$r_n(\mathbf{V})\ge 2^{n-1}$ для любого n,*

либо

2) *найдется такой многочлен $a_{2N}x^{2N}+\ldots+a_1x+a_0$ степени $2N\ge 0$ из кольца $\mathbb{Q}[x]$, что для любого $n\ge 2N$ будет выполнено равенство*

$$r_n(\mathbf{V}) = a_{2N}n^{2N}+\ldots+a_1n+a_0, \qquad a_{2N}\ne 0,$$

причем либо

2a) *$r_n(\mathbf{V})\ge 1+\dfrac{n(n-1)}{2}$, $n\ge 1$, и $\dfrac{1}{(2N)!}\le a_{2N}\le \dfrac{1}{N!2^N}$,*

либо

2b) *$r_n(\mathbf{V})=1$ для любого n.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{r_n(\mathbf{V})\}_{n\geq 1}$ не ограничена полиномом. Тогда из предложения 5 работы [5] следует, что для любого целого положительного n выполнено неравенство $q_{2n}(\mathbf{V})>0$. С учетом леммы 2, получаем:

$$r_n(\mathbf{V})=1+\sum_{2\leq 2k\leq n} C_n^{2k}q_{2k}(\mathbf{V})\geq 1+\sum_{2\leq 2k\leq n} C_n^{2k}=2^{n-1}.$$

Пусть теперь последовательность $\{r_n(\mathbf{V})\}_{n\geq 1}$ ограничена полиномом. Пусть N — максимальное число, при котором $q_{2N}(\mathbf{V})>0$. Тогда из леммы 2 следует, что для любого $n\geq 2N$ будет выполнено равенство

$$r_n(\mathbf{V})=1+\sum_{k=1}^{N} C_n^{2k}q_{2k}(\mathbf{V}),$$

т. е.найдется такой многочлен степени $2N\geq 0$ с рациональными коэффициентами, что для любого $n\geq 2N$

$$r_n(\mathbf{V})=a_{2N}n^{2N}+\ldots+a_1n+a_0,\qquad a_{2N}\neq 0.$$

Пусть $N>0$. Так как $q_{2n}(F)=\dfrac{(2n)!}{n!2^n}$ для любого n [6], то для любого $n\geq 2N$ будет выполнено двойное неравенство:

$$\sum_{k=0}^{N} C_n^{2k}\leq r_n(\mathbf{V})\leq\sum_{k=0}^{N} C_n^{2k}\cdot\frac{(2k)!}{k!2^k}\,. \tag{8}$$

Поэтому

$$\frac{1}{(2N)!}\leq a_{2N}\leq\frac{1}{N!2^N}\,.$$

При этом заметим, что

$$r_n(\mathbf{V})\geq 1+C_n^2\cdot q_2(\mathbf{V})\geq 1+\frac{n(n-1)}{2}\,.$$

Если $N=0$, то $r_n(\mathbf{V})=1$ для любого n. □

Пусть Λ_{2n} — алгебра Грассмана с единицей, $2n$ образующими элементами $\{e_1,\ldots,e_{2n}\}$ и операцией умножения «$\wedge$». Введем в алгебре Λ_{2n} два новых умножения:

$$a\cdot b=\frac{1}{2}(a\wedge b+b\wedge a),\qquad \{a,b\}=a\wedge b-b\wedge a,\qquad a,b\in\Lambda_{2n}.$$

Обозначим полученную алгебру Пуассона $(\Lambda_{2n},+,\cdot,\{,\})$ через G_{2n}.

Лемма 3 [5]. *Пусть N — произвольное натуральное число. Для алгебры Пуассона G_{2N} над полем нулевой характеристики верны следующие утверждения:*

(i) *полилинейные тождества*

$$\{x,y,z\}=0,\qquad \{x_1,y_1\}\cdot\ldots\cdot\{x_{N+1},y_{N+1}\}=0 \tag{9}$$

порождают идеал тождеств алгебры G_{2N};

(ii) *последовательность $\{r_n(G_{2N})\}_{n\geq 1}$ достигает нижней границы в неравенстве* (8)*:*

$$c_n(G_{2N})=r_n(G_{2N})=\sum_{k=0}^{N} C_n^{2k},\qquad n\geq 2N,$$

при этом $a_{2N}=\dfrac{1}{(2N)!}$.

Следующая лемма, в частности, показывает, что многообразие, порожденное алгеброй G_2, является наименьшим многообразием алгебр Пуассона в классе всех многообразий алгебр Пуассона, имеющих рост не ниже полиномиального.

Лемма 4 [5]. *Для алгебры G_2 над полем нулевой характеристики верны следующие утверждения:*

(i) *тождества*

$$\{x_1,x_2,x_3\}=0,\qquad \{x_1,x_2\}\cdot\{x_3,x_4\}=0$$

порождают идеал тождеств алгебры G_2;

(ii) $q_2(G_2) = 1$, $q_{2n}(G_2) = 0$, $n \geq 2$,

$$c_n(G_2) = r_n(G_2) = 1 + \frac{n(n-1)}{2}, \qquad n \geq 1;$$

(iii) многообразие $var(G_2)$ является наименьшим многообразием среди всех многообразий алгебр Пуассона $\mathbf{V}$, у которых последовательность $\{r_n(\mathbf{V})\}_{n\geq 1}$ ($\{c_n(\mathbf{V})\}_{n\geq 1}$) растет не ниже полинома, т. е.если для некоторого многообразия $\mathbf{V}$ последовательность $\{r_n(\mathbf{V})\}_{n\geq 1}$ ($\{c_n(\mathbf{V})\}_{n\geq 1}$) растет не ниже полинома, то $G_2 \in \mathbf{V}$.

Заметим, что существует бесконечно много попарно различных многообразий алгебр Пуассона $\mathbf{V}$, у которых последовательность $\{r_n(\mathbf{V})\}_{n\geq 1}$ достигает нижней границы полиномиального роста. Пусть $SU_N = SU_N(K)$ — алгебра строго верхнетреугольных матриц порядка N над полем K и операцией умножения $\wedge$. В векторном пространстве $SU_N \oplus K$ над полем K определим две операции умножения $\cdot$ и $\{,\}$ следующим образом:

$$(a+\alpha)\cdot(b+\beta) = (\beta a + \alpha b) + \alpha\beta,$$
$$\{a+\alpha, b+\beta\} = [a,b],$$

где $[a,b] = a\wedge b - b\wedge a$, $a,b \in SU_N$, $\alpha,\beta \in K$. Полученную алгебру Пуассона $(SU_N \oplus K, \cdot, \{,\}, K)$ обозначим через PSU_N.

Лемма 5 [7]. *Для алгебры Пуассона PSU_N над полем нулевой характеристики верны следующие утверждения:*

(i) полилинейные тождества

$$\{x_1,x_2\}\cdot\{x_3,x_4\} = 0, \qquad \{x_1,x_2,\ldots,x_N\} = 0$$

порождают идеал тождеств алгебры PSU_N;

(ii) $q_2(PSU_N) = 1$, $q_{2n}(PSU_N) = 0$, $n > 1$,

$$r_n(PSU_N) = 1 + \frac{n(n-1)}{2}, \qquad n \geq 1,$$
$$c_n(PSU_N) = 1 + \sum_{k=2}^{min\{n,N-1\}} C_n^k\cdot(k-1)!, \qquad n \geq 1.$$

Библиографический список

1. *Farkas D. R.* Poisson polynomial identities // Comm. Algebra. 1998. Vol. 26, № 2. P. 401–416.
2. *Farkas D. R.* Poisson polynomial identities. II // Arch. Math. (Basel). 1999. Vol. 72, № 4. P. 252–260.
3. *Бахтурин Ю. А.* Тождества в алгебрах Ли. М. : Наука, 1985.
4. *Giambruno A., Zaicev M. V.* Polynomial Identities and Asymptotic Methods. Math. Surv. and Monographs. Providence, R.I. : American Math. Soc., 2005. Vol. 122.
5. *Рацеев С. М.* Алгебры Пуассона полиномиального роста // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 3. С. 700–711.
6. *Mishchenko S. P., Petrogradsky V. M., Regev A.* Poisson PI algebras // Trans. Amer. Math. Soc. 2007. Vol. 359, № 10. P. 4669–4694.
7. *Череватенко О. И.* О лиево нильпотентных алгебрах Пуассона // Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика, физика. 2012. № 23(142), вып. 29. С. 14–16.

On Poisson Customary Polynomial Identities

S. M. Ratseev

Ulyanovsk State University, 42, Leo Tolstoy str., 432017, Ulyanovsk, Russia, RatseevSM@mail.ru

We study Poisson customary and Poisson extended customary polynomials. We show that the sequence of codimensions $\{r_n(V)\}_{n\geq 1}$ of every extended customary space of variety V of Poisson algebras over an arbitrary field is either bounded by a polynomial or at least exponential. Furthermore, if this sequence is bounded by polynomial then there is a polynomial R(x) with rational coefficients such that $r_n(V) = R(n)$ for all sufficiently large n. We present lower and upper bounds for the polynomials R(x) of an arbitrary fixed degree.

Key words: Poisson algebra, variety of algebras, growth of a variety.

References

1. Farkas D. R. Poisson polynomial identities. *Comm. Algebra*, 1998, vol. 26, no. 2, pp. 401–416.
2. Farkas D. R. Poisson polynomial identities. II. *Arch. Math. (Basel)*, 1999, vol. 72, no. 4, pp. 252–260.
3. Bahturin Yu. A. *Identical relations in Lie algebras*. Utrecht, VNU Sci. Press, 1987. 309 p. (Rus. ed. : Bahturin Yu. A. Tozhdestva v algebrah Li. Moscow, Nauka, 1985).
4. *Giambruno A., Zaicev M. V.* Polynomial Identities and Asymptotic Methods. *Math. Surv. and Monographs*. Providence, R.I., American Math. Soc., 2005, vol. 122.
5. *Ratseev S. M.* Poisson algebras of polynomial growth. *Siberian Math. J.* 2013, vol. 54, no. 3, pp. 555–565.
6. Mishchenko S. P., Petrogradsky V. M., Regev A. Poisson PI algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2007, vol. 359, no. 10, pp. 4669–4694.
7. *Cherevatenko O. I.* On nilpotent Leibnitz algebras. *Nauchnyye vedomosti BelGU. Ser. Matematika. Fizika* [Belgorod State University Scientific Bulletin. Ser. Mathematics. Physics], 2012, no. 23(142), iss. 29, pp. 14–16.

УДК 517.54

НОВЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА С БЕСКОНЕЧНЫМ ИНДЕКСОМ

Р. Б. Салимов[1], Э. Н. Карабашева[2]

[1] Доктор физико-мататематических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики, Казанский государственный архитектурно-строительный университет, salimov@5354.ru

[2] Аспирант кафедры высшей математики, Казанский государственный архитектурно-строительный университет, enkarabasheva@bk.ru

В работе рассматривается краевая задача Римана с бесконечным индексом, когда краевое условие задачи задается на действительной оси комплексной плоскости. Для решения этой задачи используется подход, основанный на устранении бесконечного разрыва аргумента коэффициента краевого условия и аналогичный тому, с помощью которого в случае конечного индекса задачи ранее в работах Ф. Д. Гахова устранялись разрывы коэффициента краевого условия с помощью специально подобранных функций, отличных от используемых в настоящей работе.

Ключевые слова: краевая задача Римана, аналитическая функция, бесконечный индекс.

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть D^+ и D^- — соответственно верхняя и нижняя полуплоскости в плоскости переменного $z = x + iy$ с действительной осью L, $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ — функции, аналитические соответственно в областях D^+ и D^-. Требуется определить функции $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$, ограниченные в областях D^+ и D^- соответственно, если их граничные значения удовлетворяют условию

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t),\ t \in L, \tag{1}$$

в котором $G(t)$, $g(t)$ — заданные на L функции. В случае, когда $\ln G(t)$ и $g(t)$ — функции, удовлетворяющие условию H_L (условию Гёльдера) всюду на L, включая окрестность точки $t = \infty$ [1, с. 67], решение задачи (1) дано в монографиях [1, с. 136–139; 2, с. 118–121]. Решение задачи зависит от её индекса, равного $\big(\arg G(+\infty) - \arg G(-\infty)\big)/2\pi$.

Начало исследованиям задачи (1) в случае, когда ее индекс бесконечен, т. е. $\arg G(+\infty) - \arg G(-\infty) = \infty$, было положено Н. В. Говоровым. Результаты его работ в дальнейшем вошли в монографию [3]. Этой проблеме посвящен ряд работ других авторов; отметим из них статьи [4–7], в которых изучены новые случаи задачи Римана с бесконечным индексом, в статье [8] рассмотрен особый случай задачи, в [9] изучен случай, когда в задаче (1) при $g(t) \equiv 0$ в качестве L берется произвольный гладкий замкнутый контур, в окрестностях некоторых точек которого $\arg G(t)$ неограничен.

Авторы указанного ряда работ решение задачи (1) получают путем построения канонического решения — частного решения соответствующей однородной задачи:

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t), \qquad t \in L, \tag{2}$$

обладающего нужными свойствами, аналогично тому, как это было сделано ранее Н. В. Говоровым.