References

1. Ohkita M., Kobayashi Y. An application of rationalized Haar functions to solution of linear differential equations. *IEEE Transactions on Circuit and Systems*, 1968, vol. 33, iss. 9, pp. 853–862.
2. Razzaghi M., Ordokhani Y. Solution of differential equations via rationalized Haar functions. *Mathematics and computers in simulation*, 2001, vol. 56, iss. 3, pp. 235–246.
3. Razzaghi M., Ordokhani Y. An application of rationalized Haar functions for variational problems. *Applied Mathematics and Computation*, 2001, vol. 122, iss. 3, pp. 353–364.
4. Lukomskii D. S. Primenenie sistemy Haara dlya resheniya zadachi Koshi [Application of Haar system for solving the Cauchy problem]. *Matematika. Mehanika* [Mathematics. Mechanics], Saratov, Saratov Univ. Press, 2014, iss. 14, pp. 47–50 (in Russian).
5. Lukomskii D. S., Terekhin P. A. Ob ocenke pogreshnosti resheniya zadachi Koshi s pomosch'yu sistem sjatiy i sdvigov [An error estimate for the Cauchy problem by using compression systems and shifts]. *Trudy Matematicheskogo centra imeni N. I. Lobachevskogo* [Proceedings of the Mathematical Centre named N. I. Lobachevsky]. Kazan, Kazan Matnematical Society, 2015, vol. 51, pp. 295–297 (in Russian).

УДК 517.968.23

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ ЯВНОГО РЕШЕНИЯ ТРЕХЭЛЕМЕНТНОЙ ЗАДАЧИ ТИПА КАРЛЕМАНА ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КРУГЕ

Н. Р. Перельман

Перельман Наталья Романовна, ассистент кафедры математики и информатики, Смоленский государственный университет, nataly@mannet.ru

Статья посвящена исследованию трехэлементной краевой задачи типа Карлемана в классе аналитических функций, непрерывно продолжимых на контур в смысле Гельдера, в случае, когда эта задача не редуцируется к двухэлементным краевым задачам. В качестве контура рассматривается единичная окружность. Для определенности исследуется случай обратного сдвига контура. В этом случае решение рассматриваемой задачи сводится к решению системы из двух интегральных уравнений типа Фредгольма второго рода; при этом существенным образом используется теория Ф. Д. Гахова краевой задачи Римана для аналитических функций. На основании этого результата построен алгоритм решения исследуемой задачи. Далее в статье доказывается, что если в краевом условии коэффициенты являются рациональными функциями, а функция сдвига дробно-линейная, то исследуемая краевая задача решается в явном виде (в квадратурах). Затем рассмотрен более простой случай явного решения задачи, когда, кроме вышеуказанных ограничений на коэффициенты и функцию сдвига, требуется еще и аналитическая продолжимость некоторых функций, заданных на контуре, внутрь области. Этот случай иллюстрируется на конкретном примере.

Ключевые слова: краевая задача, сдвиг Карлемана.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-2-159-165

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время важным направлением в исследованиях краевых задач являются многоэлементные краевые задачи для аналитических и полианалитических функций, в том числе и задачи со сдвигом. В статье [1] исследовалась одна из таких задач — трехэлементная задача типа Карлемана для бианалитических функций. В частности, там было показано, что решение такой задачи в случае круговой области сводится к решению двух трехэлементных краевых задач типа Карлемана для аналитических функций (обозначим их для краткости задачи $\boldsymbol{K}_3$).

Для задачи $\boldsymbol{K}_3$ достаточно подробно была исследована ее разрешимость при различных предположениях относительно исходных данных (см., например, [2]).

Однако до недавнего времени не существовало конструктивного алгоритма решения задачи $\boldsymbol{K}_3$ в случае, когда она не редуцируется к двухэлементной задаче. Поэтому разработка такого алгоритма и выявление случаев, когда задача $\boldsymbol{K}_3$ решается в явном виде, является актуальной проблемой.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $T^+ = \{z : |z| < 1\}, L = \{t : |t| = 1\}$.

Будем говорить, что аналитическая в области T^+ функция принадлежит классу $A(T^+) \cap H(L)$, если она непрерывно продолжается на контур L, причем так, что ее граничные значения удовлетворяют условию Гельдера.

Требуется найти все аналитические в области T^+ функции $F(z)$ класса $A(T^+) \cap H(L)$, удовлетворяющие на L условию

$$F^+[\alpha(t)] = A(t)F^+(t) + B(t)\overline{F^+(t)} + h(t), \tag{1}$$

где $A(t)$, $B(t)$, $h(t)$ — заданные на L функции класса $H(L)$, $\alpha(t)$ — прямой или обратный сдвиг контура L, удовлетворяющий условию Карлемана

$$\alpha[\alpha(t)] \equiv t, \tag{2}$$

причем $\alpha'(t) \neq 0$, $\alpha'(t) \in H(L)$.

В монографии Г. С. Литвинчука (см. [2, гл. 6]) установлено, что краевое условие (1) легко приводится к виду

$$A_1(t)F^+(t) = B_1(t)\overline{F^+(t)} + h_1(t), \tag{3}$$

где

$$A_1(t) = 1 - A(t)A[\alpha(t)] - \overline{B(t)}B[\alpha(t)], \tag{4}$$

$$B_1(t) = A[\alpha(t)]B(t) + \overline{A(t)}B[\alpha(t)], \tag{5}$$

$$h_1(t) = A[\alpha(t)]h(t) + B[\alpha(t)]\overline{h(t)} + h[\alpha(t)]. \tag{6}$$

Следовательно, если на контуре L выполняются условия

$$A_1(t) \neq 0, \qquad B_1(t) \neq 0, \qquad h_1(t) \neq 0,$$

то задача $\boldsymbol{K}_3$ вырождается в хорошо исследованную (см., например, [2]) двухэлементную задачу вида (3).

Предположим теперь, что на контуре L выполняются тождества

$$A_1(t) \equiv 0, \qquad B_1(t) \equiv 0, \qquad h_1(t) \equiv 0,$$

которые с учетом обозначений (4)–(6) можно записать в следующей развернутой форме:

$$A(t)A[\alpha(t)] + \overline{B(t)}B[\alpha(t)] \equiv 1, \tag{7}$$

$$A[\alpha(t)]B(t) + \overline{A(t)}B[\alpha(t)] \equiv 0, \tag{8}$$

$$A[\alpha(t)]h(t) + B[\alpha(t)]\overline{h(t)} + h[\alpha(t)] \equiv 0, \tag{9}$$

Случай, когда выполняются условия (7)–(9), назовем *невырожденным* и в дальнейшем будем исследовать задачу $\boldsymbol{K}_3$ только в этом случае при некоторых дополнительных предположениях для коэффициентов задачи.

Для определенности будем исследовать задачу $\boldsymbol{K}_3$ при обратном сдвиге контура.

2. О РЕШЕНИИ НЕВЫРОЖДЕННОЙ ЗАДАЧИ K_3 В НОРМАЛЬНОМ СЛУЧАЕ ПРИ ОБРАТНОМ СДВИГЕ КОНТУРА

Пусть на контуре L выполняются условия (7)–(9), $\alpha(t)$ — обратный сдвиг контура L, а также $A(t) \neq 0$. При указанных предположениях краевое условие (1) можно переписать в следующем виде:

$$F^+[\alpha(t)] = A(t)F^+(t) + Q(t), \tag{10}$$

где $Q(t) = h(t) + B(t)\overline{F^+(t)}$.

Если временно предположить, что $Q(t)$ — известная функция, то равенство (10) представляет собой краевое условие двухэлементной задачи Карлемана, теория которой достаточно подробно изложена, например, в монографии [2].

С учетом (7)–(9) в рассматриваемом случае представляет интерес исследование задачи (10) в следующих трех случаях:

а) $A[\alpha(t)]A(t) - 1 \equiv 0$, $t \in L$;

б) $A[\alpha(t)]A(t) - 1 \neq 0$, $t \in L$;

в) когда выражение $A[\alpha(t)]A(t) - 1$ обращается в нуль в отдельных точках контура L.

В случае а) можно доказать, что с учетом (7) и (8) из $A[\alpha(t)]A(t) - 1 \equiv 0$ следует $B(t) \equiv 0$, т. е. задача $\boldsymbol{K}_3$ здесь равносильна хорошо изученной двухэлементной краевой задаче Карлемана.

Задача $\boldsymbol{K}_3$ в случае в) исследовалась, например, в [3].

В дальнейшем будем рассматривать случай, когда выполняются условия пункта б), т. е.

$$A[\alpha(t)]A(t) - 1 \neq 0, \qquad t \in L. \tag{11}$$

Назовем случай, когда выполняются условия (7)–(9) и (11), *нормальным случаем* задачи $\boldsymbol{K}_3$.

Введем следующие обозначения:

$$G(t) = -\frac{B(t)}{A(t)}, \qquad G_1(t) = \frac{1}{A(t)}, \qquad h_1(t) = -\frac{h(t)}{A(t)},$$

а также пусть $X^{\pm}(z)$ — канонические функции однородной двухэлементной задачи Римана с коэффициентом $G(t)$ и индексом $\chi = \operatorname{Ind} G(t)$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $\alpha(t)$– обратный карлемановский сдвиг контура L и на этом контуре выполняются условия* (7)–(9) *и* (11). *Тогда если $\chi = \operatorname{Ind} G(t) \geqslant 0$, то для того чтобы функция $F^+(z)$ класса $A(T^+) \cap H(L)$ была решением краевой задачи $\boldsymbol{K}_3$, необходимо и достаточно, чтобы ее граничные значения $F^+(t) = \varphi[\alpha(t)], t \in L$, удовлетворяли системе интегральных уравнений типа Фредгольма:*

$$\begin{cases} (U_1\varphi_1)(t) \equiv \varphi_1(t) + \int\limits_L N_1(t,\tau)\varphi_1(\tau)d\tau + \overline{\int\limits_L M_1(t,\tau)\varphi_1(\tau)d\tau} = q_1(t), \\ (U_2\varphi_2)(t) \equiv \varphi_2(t) + \int\limits_L N_2(t,\tau)\varphi_2(\tau)d\tau = q_2(t). \end{cases} \tag{12}$$

Если же $\chi = \operatorname{Ind} G(t) < 0$, то для того чтобы функция $F^+(z)$ класса $A(T^+) \cap H(L)$ была решением краевой задачи $\boldsymbol{K}_3$ необходимо и достаточно, чтобы ее граничные значения $F^+(t) = \varphi[\alpha(t)]$, $t \in L$, удовлетворяли системе интегральных уравнений типа Фредгольма (12), *и, кроме того, функция $F[\alpha(t)] = \varphi(t)$ должна удовлетворять $-\chi - 1$ условиям вида*

$$\int\limits_L \frac{G_1(t)\varphi(t)}{X^+(t)} t^{k-1} dt = -\int\limits_L \frac{h_1(t)}{X^+(t)} t^{k-1} dt, \qquad k = 1, 2, ..., -\chi - 1. \tag{13}$$

Данная теорема сформулирована и полностью доказана автором. Частично ее доказательство приводится, например, в [1].

Замечание 1. В теореме 1 в формулах (12) приняты следующие обозначения:

$$N_1(t,\tau) = B(t)K^-(t,\tau), \qquad M_1(t,\tau) = -\overline{B(t)}K^+(t,\tau), \qquad q_1(t) = B(t)[\overline{q^+(t)} - q^-(t)],$$

$$K^{\pm}(t,\tau) = X^{\pm}(t)K(t,\tau),$$

$$K(t,\tau) = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{A(\tau)X^+(\tau)}\frac{1}{\tau - t} - \frac{1}{A(t)X^+(t)}\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)}\right), \tag{14}$$

$$q^+(t) = \frac{1}{2}h_1(t) + \frac{X^+(t)}{2\pi i}\int\limits_L \frac{h_1(\tau)}{X^+(\tau)}\frac{d\tau}{\tau - t} + X^+(t)P_\chi(t),$$

$$q^-(t) = -\frac{1}{2}\frac{X^-(t)}{X^+(t)}h_1(t) + \frac{X^-(t)}{2\pi i}\int\limits_L \frac{h_1(\tau)}{X^+(\tau)}\frac{d\tau}{\tau - t} + X^-(t)P_\chi(t),$$

$P_\chi(t)$ — многочлен с произвольными комплексными коэффициентами степени не выше χ,

$$N_2(t,\tau) = -K^+[\alpha(t),\tau], q_2(t) = q^+[\alpha(t)].$$

Замечание 2. При $\chi < 0$ в формулах (12) нужно положить $P_\chi(t) \equiv 0$.

Таким образом, для решения задачи $\boldsymbol{K}_3$ в нормальном случае можно использовать следующий алгоритм:

1. Находим индекс $\chi = \operatorname{Ind} G(t)$, канонические функции $X^{\pm}(z)$ однородной задачи Римана для аналитических функций с коэффициентом $G(t)$ и далее по формулам из замечания 1 функции $K^{\pm}(t,\tau)$, $q^{\pm}(t)$. Затем переходим к пункту 2.

2. Составляем первое интегральное уравнение типа Фредгольма из системы (12). Решая его (в случае его разрешимости), находим все его решения и переходим к п. 3. Если же данное уравнение неразрешимо, то неразрешима и задача $\boldsymbol{K}_3$.

3. Если $\chi = \operatorname{Ind} G(t) \geqslant 0$, то среди решений $\varphi(t)$ первого интегрального уравнения системы (12) выбираем только те $\widetilde{\varphi}(t)$, которые удовлетворяют и второму интегральному уравнению системы (12) (т. е. находим решения системы (12)), а затем переходим к п. 4.

Если же $\chi = \operatorname{Ind} G(t) < 0$, то сначала среди решений $\varphi(t)$ первого интегрального уравнения системы (12) выбираем только те, для которых выполняются условия (13), а затем из выбранных таким образом решений первого интегрального уравнения системы (12) отбираем только те $\widetilde{\varphi}(t)$, которые удовлетворяют и второму интегральному уравнению системы (12) (т. е. находим решения системы (12)), а затем переходим к п. 4.

В случае, когда система (12) неразрешима, задача $\boldsymbol{K}_3$ тоже неразрешима.

4. Находим общее решение исходной задачи $\boldsymbol{K}_3$ по формуле

$$F^{+}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\widetilde{\varphi}[\alpha(t)]}{t-z}dt, z \in T^{+}.$$

3. О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ K_3 В ЯВНОМ ВИДЕ

Будем говорить (см. также [4, с. 130]), что краевая задача $\boldsymbol{K}_3$ допускает явное решение, если ее общее решение удается построить, используя только формулы Ф. Д. Гахова для решения обычной скалярной задачи Римана для аналитических функций, а также решая конечное число систем линейных алгебраических уравнений, для которых матрица системы может быть выписана в квадратурах.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Если ядро $K(t,\tau)$, задаваемое формулой* (14)*, является вырожденным, то задача $\boldsymbol{K}_3$, коэффициенты и функция сдвига которой удовлетворяют всем ограничениям нормального случая, решается в явном виде.*

Доказательство. Пусть ядро $K(t,\tau)$ является вырожденным, т. е. представимо в виде

$$K(t,\tau) = \sum_{j=1}^{m} \mu_j(t)\eta_j(\tau).$$

Тогда система (12) примет вид

$$\begin{cases} \varphi(t) + \sum\limits_{j=1}^{m} B(t)X^{-}(t)\mu_j(t)\lambda_j + \sum\limits_{j=1}^{m} (-B(t))\overline{X^{+}(t)\mu_j(t)}\overline{\lambda_j} = q_1(t), \\ \varphi(t) + \sum\limits_{j=1}^{m} -X^{+}[\alpha(t)]\mu_j[\alpha(t)]\lambda_j = q_2(t), \end{cases} \tag{15}$$

где $\lambda_j = \int\limits_L \eta_j(\tau)\varphi(\tau)d\tau$, $j = 1, 2, ..., m$.

Умножив обе части уравнений системы (15) на $\eta_k(t)$ $(k = 1, 2, ..., m)$ и проинтегрировав по L, получим следующую систему:

$$\begin{cases} \lambda_k + \sum\limits_{j=1}^{m} A_{kj}\lambda_j + \sum\limits_{j=1}^{m} B_{kj}\overline{\lambda_j} = D_k, \\ \lambda_k + \sum\limits_{j=1}^{m} C_{kj}\lambda_j = F_k, \end{cases}$$

где $A_{kj} = \int\limits_L a_j(t)\eta_k(t)dt$, $a_j(t) = B(t)X^-(t)\mu_j(t)$, $B_{kj} = \int\limits_L b_j(t)\eta_k(t)dt$, $b_j(t) = -B(t)\overline{X^+(t)\mu_j(t)}$, $D_k = \int\limits_L \eta_k(t)q_1(t)dt$, $C_{kj} = \int\limits_L c_j(t)\eta_k(t)dt$, $c_j(t) = -X^+[\alpha(t)]\mu_j[\alpha(t)]$, $F_k = \int\limits_L \eta_k(t)q_2(t)dt$, $j = 1, 2, ..., m$, $k = 1, 2, ..., m$. Пусть $\lambda_k = \rho_{2k-1} + i\rho_{2k}$, $A_{kj} = a_{k2j-1} + ia_{k2j}$, $B_{kj} = b_{k2j-1} + ib_{k2j}$, $C_{kj} = c_{k2j-1} + ic_{k2j}$, $D_{kj} = d_{k2j-1} + id_{k2j}$, $F_{kj} = f_{k2j-1} + if_{k2j}$, $j = 1, 2, ..., m$, $k = 1, 2, ..., m$.

Тогда последняя система равносильна следующей системе линейных алгебраических уравнений (записанной в векторно-матричной форме):

$$AX = B, \tag{16}$$

где $X = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ ... \\ \rho_{2m} \end{pmatrix}$ — неизвестный вектор, элементы же вектора $B = \begin{pmatrix} d_1 \\ ... \\ d_{2m} \\ f_1 \\ ... \\ f_{2m} \end{pmatrix}$ и матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 + a_{11} + b_{11} & -a_{12} + b_{12} & ... & a_{12m-1} + b_{12m-1} & -a_{12m} + b_{12m} \\ a_{12} + b_{12} & 1 + a_{11} - b_{11} & ... & a_{12m} + b_{12m} & a_{12m-1} - b_{12m-1} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} + b_{m1} & -a_{m2} + b_{m2} & ... & 1 + a_{m2m-1} + b_{m2m-1} & -a_{m2m} + b_{m2m} \\ a_{m2} + b_{m2} & a_{m1} - b_{m1} & ... & a_{m2m} + b_{m2m} & 1 + a_{m2m-1} - b_{m2m-1} \\ 1 + c_{11} & -c_{12} & ... & c_{12m-1} & -c_{12m} \\ c_{12} & 1 + c_{11} & ... & c_{12m} & c_{12m-1} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ c_{m1} & -c_{m2} & ... & 1 + c_{m2m-1} & -c_{m2m} \\ c_{m2} & c_{m1} & ... & c_{m2m} & 1 + c_{m2m-1} \end{pmatrix}$$

являются вполне определенными действительными числами.

Предположим, что система алгебраических уравнений, представленная в виде (16), является совместной, и r — ранг матрицы A. Тогда, решая систему (16), находим значения параметров ρ_q $(q = 1, 2, ..., 2m)$, причем ровно r из этих параметров линейно выражаются через остальные $2m - r$ произвольных параметров.

Далее, подставив найденные числа $\lambda_k = \rho_{2k-1} + i\rho_{2k}$ $(k = 1, 2, ..., 2m)$ в любое из уравнений системы (15), определяем значение функции $\varphi(t)$, т. е. получаем решение системы (12) с вырожденным ядром $K(t, \tau)$. Затем, если $\chi \geqslant 0$, то по формуле

$$F^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\varphi[\alpha(t)]}{t - z} dt, \qquad z \in T^+,$$

находим решение $\boldsymbol{K}_3$. Если же $\chi < 0$, то прежде чем подставлять $\varphi(t)$ в указанную формулу, сначала отбираем те из них, которые удовлетворяют условию (13).

Таким образом, если ядро $K(t, \tau)$, задаваемое формулой (14), является вырожденным, то решение задачи $\boldsymbol{K}_3$, если оно существует, может быть получено в явном виде. □

Следствие. *Если в краевом условии задачи* $\boldsymbol{K}_3$ *коэффициенты* $A(t), B(t), h(t)$ *являются рациональными функциями, функция обратного сдвига является дробно-линейной, а также выполняются условия* (7)–(9) *и* (11)*, то краевая задача* $\boldsymbol{K}_3$ *решается в явном виде.*

Доказательство. Известно (см. [2, с. 28]), что обратный дробно-линейный сдвиг контура $L = \{t : |t| = 1\}$, удовлетворяющий условию Карлемана, имеет вид

$$\alpha(t) = \frac{t - c}{\overline{c}t - 1}, \tag{17}$$

где c — комплексное число, $|c| > 1$.

Докажем, что если $\alpha(t)$ имеет вид (17) и $A(t)$, $B(t)$, $h(t)$ — рациональные функции, то ядро $K(t,\tau)$, определяемое формулой (14), является вырожденным.

Действительно, с учетом (17) $K(t,\tau)$ можно переписать в виде

$$K(t,\tau)=\frac{1}{2\pi i}\left[\frac{1}{A(\tau)X^+(\tau)}-\frac{1}{A(t)X^+(t)}\right]\frac{1}{\tau-t}+\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{A(t)X^+(t)}\frac{\overline{c}}{\overline{c}\tau-1}.$$

Рассмотрим отдельно $W(t,\tau)=\dfrac{1}{2\pi i}\left[\dfrac{1}{A(\tau)X^+(\tau)}-\dfrac{1}{A(t)X^+(t)}\right]\dfrac{1}{\tau-t}$. Так как $G(t)=-\dfrac{B(t)}{A(t)}$ — рациональная функция, $X^+(z)$ — одна из канонических функций однородной задачи Римана с коэффициентом $G(t)$, то и $X^+(t)$ — тоже рациональная функция. Следовательно, $\dfrac{1}{A(t)X^+(t)}$ — рациональная функция. Значит (см., например, [4, с. 131]), $W(t,\tau)$ — вырожденное ядро. Тогда и ядро $K(t,\tau)$ — вырожденное, а следовательно, в силу теоремы 2 задача $\boldsymbol{K}_3$ решается в явном виде. □

Замечание 3. Отметим, что усилив условия вышеуказанного следствия, можно добиться отсутствия в системе (12) интегральных членов. Например, если потребовать, чтобы $\chi=\operatorname{Ind}G(t)\geqslant 0$, а также чтобы $\dfrac{1}{A(t)}$ и $\dfrac{h(t)}{A(t)}$ были аналитически продолжимы в T^+, то система (12) примет вид

$$\begin{cases}F^+(t)=\overline{X^-(t)P_\chi(t)},\\ F^+(t)=h[\alpha(t)]\ -A[\alpha(t)]X^+[\alpha(t)]P_\chi[\alpha(t)]+A[\alpha(t)]\overline{X^-[\alpha(t)]P_\chi[\alpha(t)]}.\end{cases}$$

Пример. Найти все аналитические в круге T^+ функции $F(z)$ класса $A(T^+)\cap H(L)$, удовлетворяющие на $L=\{t:|t|=1\}$ краевому условию

$$F^+[\alpha(t)]=\frac{i}{t}F^+(t)+(1+i)\overline{F^+(t)}+\left(-\frac{i}{t}-i\right),\qquad t\in L,$$

где $\alpha(t)=\frac{1}{t}$.

Решение. Здесь $A(t)=\dfrac{i}{t}$, $B(t)=1+i$, $h(t)=-\dfrac{i}{t}-i$, $\alpha(t)=\dfrac{1}{t}$, $G(t)=(-1+i)t$, $\chi=\operatorname{Ind}G(t)=1$, $X^+(z)=-1+i$, $X^-(z)=\dfrac{1}{z}$.

Заметим, что при таком выборе коэффициентов и функции сдвига будут выполняться условия следствия из теоремы 2; $\chi\geqslant 0$ и $\dfrac{1}{A(t)},\dfrac{h(t)}{A(t)}$ аналитически продолжимы в T^+. Тогда краевое условие задачи равносильно системе

$$\begin{cases}F^+(t)=\overline{c_0}t+\overline{c_1},\\ F^+(t)=t(c_0+i(\overline{c_1}+c_0-1))+(c_1+i(\overline{c_0}+c_1-1)),\end{cases}$$

где c_0, c_1 — произвольные комплексные постоянные.

Решением такой системы будет $F^+(t)=(a_0-ib_0)t+(1-a_0-2b_0-ib_0)$, где a_0, b_0 — произвольные действительные постоянные, а следовательно, функция $F^+(z)=(a_0-ib_0)z+(1-a_0-2b_0-ib_0)$ будет решением исходной задачи.

Библиографический список

1. *Перельман Н. Р., Расулов К. М.* Трехэлементная задача типа Карлемана для бианалитических функций в круге // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып 2. С. 18–26.
2. *Литвинчук Г. С.* Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М : Наука, 1977. 448 с.
3. *Перельман Н. Р., Расулов К. М.* Трехэлементная односторонняя краевая задача для аналитических функций с обратным сдвигом Карлемана в исключительном случае // Вестн. Брянск. гос. ун-та. 2012. № 4(2). С. 46–53.
4. *Расулов К. М.* Метод сопряжения для аналитических функций и некоторые его приложения. Смоленск : Изд-во СмолГУ, 2013. 189 с.

A Case of an Explicit Solutions for the Three-element Problem of Carleman Type for Analytic Functions in a Circle

N. R. Perelman

Natalia R. Perelman, Smolensk State University, 4, Przheval'skogo st., 214000, Smolensk, Russia, nataly@mannet.ru

The article investigates the three-element Carleman boundary value problem in the class of analytic functions, continuous extension to the contour in the Holder sense, when this problem can not be reduced to a two-element boundary value problems . The unit circle is considered as the contour .To be specific, we study a case of inverse shift. In this case, the solution of the problem is reduced to solving a system of two integral equations of Fredholm second kind; thus significantly used the theory of F. D. Gakhov about Riemann boundary value problem for analytic functions. Based on this result, an algorithm for the solution of the problem is built. Then it is proved that if the boundary condition coefficients are rational functions , and shift a linear-fractional function, then the boundary value problem is solved in an explicit form (in quadrature).Then we consider a simple case of an explicit solution of the problem, when in addition to the above restrictions on the coefficients and shift function is required also analytic continuation of some functions defined on the contour, inside the area. This case is illustrated by a concrete example.

Key words: boundary value problem, Carleman shift.

References

1. Perelman N. R., Rasulov K. M. Three-element problem of Carleman type for bianalitic functions in a circle. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2012, vol. 12, iss. 2, pp. 18–26 (in Russian).
2. Litvinchuk G. S. *Solvability theory of boundary value problems and singular integral equations with shift.* Dordrecht; Boston, Kluwer Academic Publ., 2000, 378 p. DOI: 10.1007/978-94-011-4363-9. (Russ. ed. : Litvinchuk G. S. Kraevye zadachi i singuliarnye integral'nye uravneniia so sdvigom. Moscow, Nauka, 1977, 448 p.)
3. Perelman N. R., Rasulov K. M. Three-element Carleman boundary value problem with a reverce shift for analytic functions on an exceptional case. *Izv. Brjanskogo Gos. Univ.* [The Bryansk State Univ. Herald], 2012, no. 4(2), pp. 46–53 (in Russian).
4. Rasulov K. M. *Metod soprjazhenija analiticheskih funkcij i nekotorye ego prilozhenija*[Conjugation method of analytic functions and some of its applications]. Smolensk, SmolGU Publ., 2013, 189 p. (in Russian).

УДК 517.927.25

РАЗЛОЖЕНИЕ ПО КОРНЕВЫМ ФУНКЦИЯМ СИЛЬНО НЕРЕГУЛЯРНОГО ПУЧКА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

В. С. Рыхлов

Рыхлов Виктор Сергеевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений и прикладной математики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, RykhlovVS@yandex.ru

Рассматривается квадратичный сильно нерегулярный пучок обыкновенных дифференциальных операторов второго порядка с постоянными коэффициентами и с кратным корнем характеристического уравнения. Находятся суммы двукратных разложений в биортогональный ряд Фурье по корневым функциям таких пучков и, как следствие, необходимое и достаточное условие сходимости указанных разложений к разлагаемой вектор-функции. Это необходимое и достаточное условие является дифференциальным уравнением, связывающим компоненты разлагаемой вектор-функции. При этом на разлагаемую вектор-функцию накладываются некоторые условия гладкости и требования обращения в нуль ее компонент и некторых их производных на концах основного отрезка.

Ключевые слова: квадратичный пучок дифференциальных операторов, кратная характеристика, кратный корень характеристического уравнения, сильно нерегулярный пучок, двукратное разложение по собственным функциям, двукратное разложение по корневым элементам, биортогональный ряд по корневым элементам, производные цепочки, условия кратной разложимости.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-2-165-174