

ИНФОРМАТИКА

УДК 681.03.06:531.383:532.516

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В СОСНЫХ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБОЛОЧКАХ, СОДЕРЖАЩИХ ВЯЗКУЮ НЕСЖИМАЕМУЮ ЖИДКОСТЬ МЕЖДУ НИМИ

А. Ю. Блинкова, А. Д. Ковалев, И. А. Ковалева, Л. И. Могилевич*

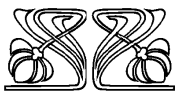
Саратовский государственный университет

E-mail: anblinkova@yandex.ru, irinakovaleva1406@gmail.com, irinakovaleva1406@gmail.com

*Московский государственный университет путей сообщения

(Поволжский филиал), Саратов

E-mail: Mogilevich@sgu.ru



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ

Настоящее исследование посвящено анализу распространения нелинейных волн деформаций в упругих физически нелинейных сосных цилиндрических оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость между ними. Волновые процессы в упругой цилиндрической оболочке без взаимодействия с жидкостью ранее исследованы с позиций теории солитонов. Наличие жидкости потребовало разработки новой математической модели и компьютерного моделирования процессов, происходящих в рассматриваемой системе.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, нелинейные волны деформации, гидроупругость, вязкая несжимаемая жидкость, солитон, базис Грёбнера.

Mathematical and Computer Modeling of Nonlinear Waves Dynamics in a Coaxial Physically Nonlinear Shells with Viscous Incompressible Fluid between Them

A. Yu. Blinkova, A. D. Kovalev, I. A. Kovaleva, L. I. Mogilevich

This study focuses on the analysis of nonlinear wave propagation deformations in the elastic physically nonlinear coaxial cylindrical shells containing a viscous incompressible fluid between them. Wave processes in an elastic cylindrical shell without interacting with fluid were previously studied from the standpoint of the theory of solitons. The presence of fluid required developing a new mathematical model and computer modeling of processes occurring in the system.

Key words: cylinder shell, non-linear deformation waves, hydroelasticity, viscous incompressible liquid, solitary wave, Gröbner basis.

Приведение систем алгебраических, дифференциальных и разностных уравнений к канонической форме, называемой базисом Грёбнера [1], представляет собой качественный аналитический метод исследования соответствующих математических моделей.

В частности, при поиске частных решений дифференциальных уравнений методом неопределённых коэффициентов возникают переопределённые системы алгебраических уравнений. Построение базиса Грёбнера позволяет проверить совместность системы, определить, обладает ли система конечным или бесконечным числом решений, а в ряде случаев построить решения в явном виде.

Не для всех моделей, описываемых уравнениями в частных производных, удаётся построить аналитические решения и в этом случае для их исследования можно применять численные эксперименты на соответствующих разностных схемах. Так, для построения разностных схем из первоначально заданных базовых разностных соотноше-



ний, аппроксимирующих исходную систему дифференциальных уравнений, строится базис Грёбнера разностного идеала. Из этого базиса, иногда в нелинейном и всегда в линейном случае, можно извлечь разностную схему, которую невозможно построить традиционными методами генерации разностных схем. Зачастую такие разностные схемы обладают уникальными свойствами, хорошо передающими физику процессов, описываемых исходными дифференциальными уравнениями [2].

Кроме того, знание базиса Грёбнера даёт возможность проверить совместность исходных разностных соотношений, определить произвол в решении, посчитав полином Гильберта, и, применяя специальный вид допустимого упорядочения при его построении, получить другое представление первоначальных разностных соотношений.

В представленной работе данная техника будет использована в качестве примера для анализа распространения нелинейных волн деформаций в упругих физически нелинейных соосных цилиндрических оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость между ними.

1. Волновые процессы в упругой цилиндрической оболочке без взаимодействия с жидкостью ранее исследованы в [3, 4] с позиций теории солитонов. Рассмотрим бесконечно длинные соосные упругие цилиндрические оболочки, между которыми находится вязкая несжимаемая жидкость. Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости и уравнения неразрывности в цилиндрической системе координат r, ϑ, x записываются в случае осесимметричного течения в виде [5]

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_r}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= \nu \left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial x^2} - \frac{V_r}{r^2} \right), \\ \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_x}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \nu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} \right), \\ \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_x}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

На границах с оболочками выполняются условия прилипания жидкости:

$$V_r = -\frac{\partial W^{(i)}}{\partial t}, \quad V_x = \frac{\partial U^{(i)}}{\partial t} \quad \text{при} \quad r = R_i - W^{(i)}. \quad (2)$$

В формулах (1) и (2) V_r, V_x — проекции вектора скорости жидкости на оси цилиндрической системы координат; t — время; p — давление; ρ — плотность; ν — кинематический коэффициент вязкости; $U^{(i)}$ — продольное упругое перемещение оболочек по оси x ; $W^{(i)}$ — прогиб, положительный к центру кривизны оболочки; R_1 — внутренний радиус внешней оболочки; R_2 — внешний радиус внутренней оболочки ($R_1 = R_2 + \delta$); δ — толщина слоя жидкости в кольцевом сечении трубы; $i = 1$ относится к внешней, а $i = 2$ — к внутренней оболочке.

Записывая уравнения движения элемента цилиндрических оболочек в перемещениях для модели Кирхгофа–Ляве, считаем материал нелинейно-упругим с кубической зависимостью интенсивности напряжений σ_1 от интенсивности деформаций e_1 [6]:

$$\sigma_1 = E e_1 + m e_1^3, \quad (3)$$

где E — модуль Юнга; m — константа материала, определяемая из опытов на растяжение или сжатие.

Кроме этого, учтем конструкционное демпфирование в материале оболочки, характеризуемое величиной, пропорциональной $\partial W^{(i)}/\partial t$, добавляемой к Даламберовой силе инерции [7].

Уравнения динамики физически нелинейных оболочек с учетом (3) записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{E^{(i)} h_0^{(i)}}{1 - \mu_0^{(i)2}} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - \mu_0^{(i)} \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right\} + \frac{4}{3} \frac{m^{(i)} h_0^{(i)}}{1 - \mu_0^{(i)2}} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \right)^3 - \right. \\ \left. - \left(1 + \mu_0^{(i)} \right) \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right) - \mu_0^{(i)} \left(\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^3 \right\} - \rho_0^{(i)} h_0^{(i)} \frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial t^2} = -q_x^{(i)}, \\ \frac{E^{(i)} h_0^{(i)}}{1 - \mu_0^{(i)2}} \left\langle \frac{h_0^{(i)2}}{12} \frac{\partial^4 W^{(i)}}{\partial x^4} - \frac{\mu_0^{(i)}}{R^{(i)}} \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{W^{(i)}}{R^{(i)2}} \right\rangle + \frac{4}{3} \frac{m^{(i)} h_0^{(i)}}{1 - \mu_0^{(i)2}} \frac{1}{R^{(i)}} \left[\mu_0^{(i)} \left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \right)^3 - \right. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & - \left(1 + \mu_0^{(i)} \right) \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right) - \left(\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^3 \Big] + \rho_0^{(i)} h_0^{(i)} \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial t^2} + \\
 & + \varepsilon_g^{(i)} \rho_0^{(i)} h_0^{(i)} \frac{\partial W^{(i)}}{\partial t} = q_n (-1)^{i-1}, \tag{4}
 \end{aligned}$$

Здесь $\varepsilon_g^{(i)}$ — коэффициент демпфирования; $\rho_0^{(i)}$ — плотность материала оболочки; $\mu_0^{(i)}$ — коэффициент Пуассона; $R^{(i)}$ — радиусы срединной поверхности оболочек; $h_0^{(i)}$ — толщины оболочек ($h_0^{(1)}/2 = R_1 - R_1$, $h_0^{(2)}/2 = R_2 - R_2$); $c_0^{(i)}$ — скорость звука в материале оболочки; $q_x^{(i)}, q_n$ — напряжения со стороны жидкости, находящейся внутри кольцевого сечения.

Если снести напряжения на невозмущенную поверхность оболочек ($W^{(i)} \ll R_i$), то можно считать, что поверхностные напряжения со стороны жидкости определяются формулами

$$q_x^{(i)} = \left[\rho \nu \left(\frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial x} \right) \right]_{r=R_i}, \quad q_n = \left[-p + 2\rho \nu \frac{\partial V_r}{\partial r} \right]_{r=R_i}. \tag{5}$$

2. Принимая за характерную длину — длину волны l и считая, что соосные оболочки изготовлены из одного материала, т. е. опуская индекс i у $E, m, \rho_0, \mu_0, \varepsilon_g$, перейдем к безразмерным переменным для исследования уравнений (4)

$$W^{(i)} = w_m u_3^{(i)}, \quad U^{(i)} = u_m u_1^{(i)}, \quad t^* = \frac{c_0}{l} t, \quad x^* = \frac{x}{l}, \quad c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho_0 (1 - \mu_0^2)}}. \tag{6}$$

Положим

$$\begin{aligned}
 \frac{w_m}{l} &= \varepsilon = o(1), & \frac{w_m}{R^{(i)}} &= O(\varepsilon), & \frac{R^{(i)}}{l} &= O(\varepsilon^{1/2}), \\
 \frac{h_0^{(i)}}{R^{(i)}} &= O(\varepsilon), & \varepsilon_g \frac{R^{(i)}}{c_0} &= O(\varepsilon^{3/2}), & \frac{E}{m} &= O(\varepsilon),
 \end{aligned} \tag{7}$$

где $\varepsilon \ll 1$ — малый параметр в задаче (4).

Применим метод двухмасштабных асимптотических разложений, вводя независимые переменные в виде

$$\xi = x^* - ct^*, \quad \tau = \varepsilon t^*, \tag{8}$$

где c — безразмерная неизвестная скорость волны, τ — внутренняя переменная, а зависимые переменные представлены в виде разложения по малому параметру ε :

$$u_1^{(i)} = u_{10}^{(i)} + \varepsilon u_{11}^{(i)} + \dots, \quad u_3^{(i)} = u_{30}^{(i)} + \varepsilon u_{31}^{(i)} + \dots \tag{9}$$

Подставляя (6), (8), (9) в уравнения (4) с учетом оценок (7), получим в нулевом приближении по ε линейную систему уравнений, из которой следует связь

$$\frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30}^{(i)} = \mu_0 \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} \tag{10}$$

и определяется безразмерная скорость волны

$$c^2 = 1 - \mu_0^2. \tag{11}$$

Из следующего приближения по ε , учитывая (10) и (11), находится система уравнений, являющихся составными для $u_{10}^{(i)}$:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{R^{(i)}}{l} \right)^2 \frac{\mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} \frac{\partial^4 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^4} + \frac{2m}{E\varepsilon} \left(\frac{u_m}{l} \right)^2 (1 - \mu_0 + \mu_0^2) \sqrt{1 - \mu_0^2} \left(\frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^2} - \\
 & - \varepsilon_g \frac{R^{(i)2}}{c_0 l \varepsilon} \frac{\mu_0^2}{2} \frac{\partial^3 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^3} = - \frac{l^2}{\varepsilon u_m \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} \frac{1}{2\sqrt{1 - \mu_0^2}} \left[q_x^{(i)} - \mu_0 \frac{R^{(i)}}{l} \frac{\partial q_n}{\partial \xi} (-1)^{i-1} \right]. \tag{12}
 \end{aligned}$$



В случае отсутствия жидкости правая часть уравнений (12) равна нулю и система распадается на два одинаковых уравнения, представляющих модифицированные уравнения Кортевега — де Вриза — Бюргера для

$$\frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} = \frac{w_m l}{\mu_0 u_m R^{(i)}} u_{30}^{(i)}.$$

3. Для определения правой части уравнения (12) введем безразмерные переменные и параметры

$$\begin{aligned} V_r = w_m \frac{c_0}{l} v_r, \quad V_x = w_m \frac{c_0}{R_1} v_x, \quad r^* = \frac{r - R_2}{\delta}, \quad t^* = \frac{c_0}{l} t, \quad x^* = \frac{x}{l}, \quad p = \frac{\rho \nu c_0 l w_m}{\delta^3} P; \\ \psi = \frac{\delta}{R_2} = o(1), \quad \lambda = \frac{w_m}{\delta} = \frac{w_m R_2}{R_2 \delta} = O\left(\frac{\varepsilon}{\psi}\right), \\ \frac{\delta}{l} = \frac{\delta}{R_2} \frac{R_2}{l} = \psi \frac{R_2}{l} \ll 1, \quad \psi \ll 1, \quad \lambda \ll 1. \end{aligned} \quad (13)$$

Подставляя (13) в уравнения гидродинамики (1) и граничные условия (2), представим безразмерные скорость и давление в виде разложения по малому параметру λ :

$$v_x = v_x^0 + \lambda v_x^1 + \dots, \quad v_r = v_r^0 + \lambda v_r^1 + \dots, \quad P = P^0 + \lambda P^1 + \dots \quad (14)$$

В нулевом приближении по ψ ($\delta/l \approx 0$ — гидравлическая теория смазки), считая $(\delta/l)(\delta c_0/\nu) \ll 1$ (ползущие течения [6, 7]), и в нулевом приближении по λ получаем уравнения гидродинамики (классические уравнения гидродинамической теории смазки):

$$\frac{\partial P^0}{\partial r^*} = 0, \quad \frac{\partial P^0}{\partial x^*} = \frac{\partial^2 v_x^0}{\partial r^{*2}}, \quad \frac{\partial v_r^0}{\partial r^*} + \frac{\partial v_x^0}{\partial x^*} = 0 \quad (15)$$

и граничные условия

$$\begin{aligned} v_r^0 = -\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*}, \quad v_x^0 = 0 \quad \text{при} \quad r^* = 1, \\ v_r^0 = -\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*}, \quad v_x^0 = 0 \quad \text{при} \quad r^* = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Из решения задачи (15), (16) следует, что

$$\begin{aligned} P^0 = 12 \int \left[\int \left(\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} \right) dx^* \right] dx^*, \\ \left[\frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \right]_{r^*=1} = 6 \int \left(\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} \right) dx^*, \\ \left[\frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \right]_{r^*=0} = 6 \int \left(\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} \right) dx^*. \end{aligned} \quad (17)$$

Учитывая, что были введены переменные (8), (9), а также имея соотношения (10) и (11), из (17) получим

$$P^0 = 12\sqrt{1 - \mu_0^2} \int (u_{30}^{(1)} - u_{30}^{(2)}) d\xi = 12\mu_0 \sqrt{1 - \mu_0^2} \frac{w_m}{w_m l} (R^{(1)} u_{10}^{(1)} - R^{(2)} u_{10}^{(2)}). \quad (18)$$

С принятой точностью по $\varepsilon, \psi, \lambda$ из (5) найдем

$$q_x^{(i)} = \left[\rho \nu \frac{w_m c_0}{\delta^2} \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \right]_{r^*=1,0}, \quad q_n = -\rho \nu \frac{w_m c_0}{\delta^2} \frac{l}{\delta} P, \quad \frac{q_x^{(i)}}{q_n} = O\left(\frac{\delta}{l}\right)$$

и, следовательно, $q_x^{(i)} \ll q_n$ и в правой части уравнения (12) остается выражение

$$6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0^{(i)}} \frac{\nu}{\delta c_0 \varepsilon} \left[\frac{R^{(i)} R^{(2)}}{\delta^2} \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{R^{(i)} R^{(1)}}{\delta^2} \frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi} \right] (-1)^{i-1}. \quad (19)$$



С принятой точностью по ψ, ε положим

$$R^{(1)} \approx R^{(2)} = R, \quad h_0^{(1)} \approx h_0^{(2)} = h_0.$$

Подставляя (19) в уравнение (12), окончательно получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{R}{l} \right)^2 \frac{\mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} \frac{\partial^4 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^4} + \frac{2m}{E\varepsilon} \left(\frac{u_m}{l} \right)^2 (1 - \mu_0 + \mu_0^2) \sqrt{1 - \mu_0^2} \left(\frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^2} - \\ - \varepsilon_g \frac{R^2}{c_0 l \varepsilon} \frac{\mu_0^2}{2} \frac{\partial^3 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^3} - 6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{\nu}{\delta c_0 \varepsilon} \left(\frac{R}{\delta} \right)^2 \left(\frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} \right) (-1)^i = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Легко видеть, что замена

$$\frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi} = c\varphi^{(1)}, \quad \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} = c\varphi^{(2)}, \quad \eta = c_1 \xi, \quad t = c_2 \tau \quad (21)$$

позволяет записать систему уравнений (20) в виде

$$\varphi^{(i)}_t + \varphi^{(i)}_{\eta\eta\eta} + 6\varphi^{(i)2} \varphi^{(i)}_{\eta} - \sigma_g \varphi^{(i)}_{\eta\eta} - (\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}) (-1)^i = 0. \quad (22)$$

Постоянные c, c_1, c_2 определяются при подстановке (21) в (20) и имеют вид

$$c_2 = 6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{\nu}{\delta c_0 \varepsilon} \left(\frac{R}{\delta} \right)^2, \quad c_1 = \left[c_2 \varepsilon \left(\frac{l}{R} \right)^2 \frac{2}{\mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}} \right]^{1/3}, \quad c = \left[3 \frac{E}{2m} \frac{R^2}{u_m^2} \frac{\mu_0^2}{1 - \mu_0 + \mu_0^2} \right]^{1/2} c_1.$$

При этом вводится обозначение

$$\sigma_g = \varepsilon_g \frac{R^2}{c_0 l \varepsilon} \frac{\mu_0^2}{2} \frac{c_1^2}{c_2}.$$

В случае отсутствия жидкости последние два слагаемых $(\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)})$ в уравнениях (22) исчезают, и система распадается на два независимых уравнения МКдВ-Б (модифицированные уравнения Кортевега-де Вриза-Бюргерса), которые только при $\sigma_g = 0$ превращаются в МКдВ и имеют точное частное решение в виде солитона

$$\varphi = \frac{k}{\text{ch}(k(\eta + \eta_0) - k^3 t)}. \quad (23)$$

Эти решения при $t = 0$ можно взять в качестве начальных условий при решении задачи Коши для системы уравнений (22).

4. Новые решения методом неопределённых коэффициентов для системы уравнений (22) будем искать в виде

$$\theta = k(\eta + \eta_0) - \omega t, \quad \varphi^{(i)} = \frac{e^\theta}{a^{(i)} e^{2\theta} + b^{(i)} e^\theta + c^{(i)}} + d^{(i)}.$$

После подстановки на 11 переменных $a^{(i)}, b^{(i)}, c^{(i)}, d^{(i)}, k, \omega, \sigma_g$ получим достаточно громоздкую систему из 22 уравнений, для исследования которой построен базис Грёбнера.

В результате имеем только одно нетривиальное решения для $\sigma_g = 0$:

$$\theta = k(\eta + \eta_0) - \left(k^3 + \frac{3}{2} b^2 k^5 \right) t, \quad \varphi^{(i)} = \frac{e^\theta}{\frac{1}{4} \frac{b^2 k^2 + 1}{c k^2} e^{2\theta} + b e^\theta + c} + \frac{1}{2} b k^2. \quad (24)$$

Здесь b, c, k — произвольные постоянные. Остальные нетривиальные решения, в том числе и для $\sigma_g \neq 0$, имеют мнимую часть и должны быть отброшены как не физические. Для символьных вычислений была использована свободная система компьютерной алгебры *Matha* [8], а для построения и работы с базисами Грёбнера [9].

Поскольку для решения (24) выполнено $\varphi^{(1)} = \varphi^{(2)}$, то данное решение будет также являться и решением МКдВ и переходить в известное решение (23) при $b = 0, c = 1/(2k)$.



5. Метод конечных объёмов сводится к дискретизации исходных уравнений, представленных в интегральной форме, в противоположность методу конечных разностей, который обычно применяется к исходным уравнениям в их дифференциальной форме. При этом если исходная система обладала законами сохранения, то построенная разностная схема будет обладать хорошими консервативными свойствами просто по построению. Кроме того, при этом подходе упрощается вывод разностных соотношений на границах вычислительной области.

Если исходные уравнения содержат производные выше первого порядка, то метод конечных объёмов нуждается в модификации. Эта модификация получила название интегроинтерполяционного метода, недостатком которого является отход от работы только с интегральными соотношениями и прямая замена производных их конечными разностями. Если на этом этапе добавить интегральные соотношения, связывающие искомые функции с их производными, и затем, использовать алгоритм Бухбергера построения базисов Грёбнера или инволютивный алгоритм, то можно получить соотношения, связывающие только искомые функции [2, 10].

Запишем уравнение (22) в интегральной форме

$$\oint_{\partial\Omega} -(2\varphi^{(i)3} + \varphi^{(i)}_{\eta\eta} - \sigma_g \varphi^{(i)}_{\eta}) dt + \varphi^{(i)} d\eta - \iint_{\Omega} (\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}) (-1)^i dt d\eta = 0 \quad (25)$$

для любой области Ω . Для перехода к дискретной формулировке сопоставим $u^{(i)n}_j = \varphi^{(i)}(t_n, \eta_j)$ и выберем в качестве базового контур, показанный на рис. 1.

Добавим интегральные соотношения:

$$\begin{aligned} \int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} u^{(i)}_{\eta} d\eta &= u^{(i)}(t, \eta_{j+1}) - u^{(i)}(t, \eta_j), \\ \int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} u^{(i)}_{\eta\eta} d\eta &= u^{(i)}_{\eta}(t, \eta_{j+1}) - u^{(i)}_{\eta}(t, \eta_j). \end{aligned} \quad (26)$$

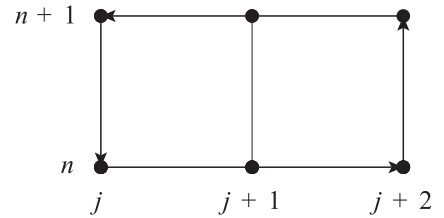


Рис. 1. Базовой контур для уравнения (25)

Используя для интегрирования по времени и по четным производным по η формулу трапеций, а по нечетным производным по η формулу среднего значения, и полагая $t_{n+1} - t_n = \tau$, $\eta_{j+1} - \eta_j = h$, перепишем соотношения (25), (26) в виде

$$\begin{aligned} - \left(\left(2u^{(i)3n}_j + 2u^{(i)3n+1}_j - 2u^{(i)3n}_{j+2} - 2u^{(i)3n+1}_{j+2} \right) + \left(u^{(i)}_{\eta\eta j} + u^{(i)}_{\eta\eta j}^{n+1} - u^{(i)}_{\eta\eta j+2} - u^{(i)}_{\eta\eta j+2}^{n+1} \right) - \right. \\ \left. - \sigma_g \left(u^{(i)}_{\eta j} + u^{(i)}_{\eta j}^{n+1} - u^{(i)}_{\eta j+2} - u^{(i)}_{\eta j+2}^{n+1} \right) \right) \cdot \frac{\tau}{2} \left(u^{(i)}_{t j} + u^{(i)}_{t j}^{n+1} \right) \cdot \frac{\tau}{2} = u^{(i)j}_{j+1} - u^{(i)j}_j, \\ \left(u^{(i)}_{\eta j+1} + u^{(i)}_{\eta j} \right) \cdot \frac{h}{2} = u^{(i)j}_{j+1} - u^{(i)j}_j, \quad u^{(i)}_{\eta\eta j+1} \cdot 2h = u^{(i)j}_{j+2} - u^{(i)j}_{\eta j}. \end{aligned}$$

Вводя сеточные операторы сдвига θ_t , θ_η по переменным t , η соответственно, запишем уравнения в операторной форме:

$$\begin{aligned} -(1 + \theta_t - \theta_\eta^2 - \theta_t \theta_\eta^2) \circ (3u^{(i)2} + u^{(i)}_{\eta\eta} - \sigma_g \varphi_\eta) \cdot \frac{\tau}{2} + (\theta_\eta \theta_t - \theta_\eta) \circ (\theta_t + 1) \circ u^{(i)}_t \cdot \frac{\tau}{2} = (\theta_t - 1) \circ u^{(i)}, \\ (\theta_\eta + 1) \circ u^{(i)}_\eta \cdot \frac{h}{2} = (\theta_\eta - 1) \circ u^{(i)}, \quad \theta_\eta \circ u^{(i)}_{\eta\eta} \cdot 2h = (\theta_\eta^2 - 1) \circ u^{(i)}_\eta. \end{aligned}$$

Выбирая допустимое лексикографическое упорядочение сначала по функциям $u^{(1)}_{\eta\eta} \succ u^{(2)}_{\eta\eta} \succ u^{(1)}_\eta \succ u^{(2)}_\eta \succ u^{(1)} \succ u^{(2)}$, затем по переменным $\theta_t \succ \theta_\eta$, можно построить базис Грёбнера, или инволютивный базис [10]. В результате получим в качестве отдельных элементов авторедуцированного базиса Грёбнера следующие разностные схемы для уравнений (22), аналогичные схеме Кранка–Николсона для уравнения теплопроводности:

$$\begin{aligned} \frac{u^{(i)j}_{j+1} - u^{(i)j}_j}{\tau} + 2 \frac{(u^{(i)3n+1}_{j+1} - u^{(i)3n+1}_{j-1}) + (u^{(i)3n}_{j+1} - u^{(i)3n}_{j-1})}{4h} + \\ + \frac{(u^{(i)j+2} - 2u^{(i)j+1} + 2u^{(i)j-1} - u^{(i)j-2}) + (u^{(i)j}_{j+2} - 2u^{(i)j}_{j+1} + 2u^{(i)j}_{j-1} - u^{(i)j}_{j-2})}{4h^3} - \end{aligned}$$



$$-\sigma_g \frac{(u^{(i)n+1}_{j+1} - 2u^{(i)n+1}_j + u^{(i)n+1}_{j-1}) + (u^{(i)n}_{j+1} - 2u^{(i)n}_j + u^{(i)n}_{j-1}))}{2h^2} - \frac{u^{(i)n+1}_j + u^{(i)n}_j}{2} (-1)^i = 0.$$

Полученные неявные разностные схемы имеют кубическую нелинейность для следующего временного слоя. При построении решения использована следующая линеаризация

$$v^3_{k+1} = v^3_{k+1} - v^3_k + v^3_k = (v_{k+1} - v_k)(v^2_{k+1} + v_{k+1}v_k + v^2_k) + v^3_k \approx v_{k+1} \cdot 3v^2_k - 2v^3_k.$$

Количество итераций для достижения точности 10^{-12} на следующем временном слое, как правило, не превышало 2. Шаг по времени t брался равным половине шага по переменной η . Программа расчёта была написана на языке Python с использованием пакета SciPy [11] и занимает около 120 строк, включая сам расчёт и построение графиков.

Результаты проведённого компьютерного моделирования представлены на рис. 2–3 и позволяют сделать следующие выводы. В первом случае при $\sigma_g = 0.0$ наличие жидкости между оболочками приводит к возникновению уединённой волны деформации (солитона) и во внутренней оболочке, в которой в начальный момент деформации равнялись нулю (рис. 2). Это процесс происходит за счёт «перекачки» энергии (через слой жидкости) от солитона во внешней оболочке и сопровождается падением амплитуды солитона во внешней оболочке и, как следствие, снижением скорости его распространения.

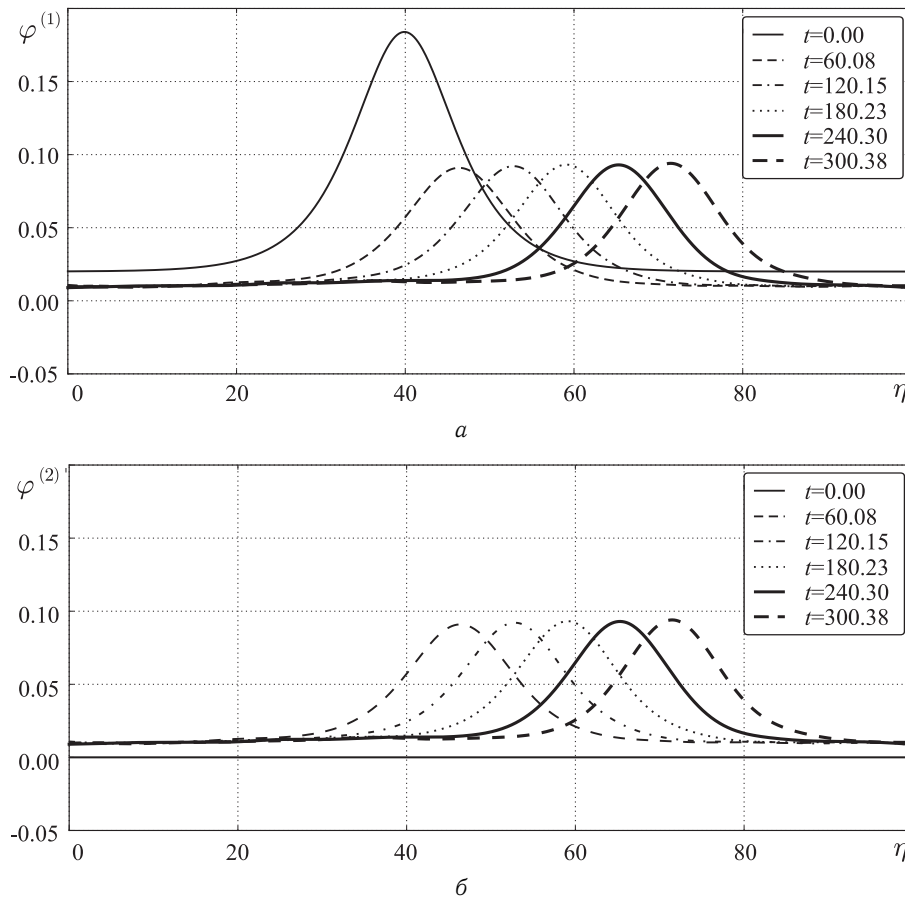


Рис. 2. График численного решения уравнений (22) при $\sigma_g = 0.0$ и с начальным условием, (24) для $\varphi^{(1)}$ (а) с $k = 0.2$, $\eta_0 = 40.0$, $b = 1.0$, $c = 1/(2k)$ и для $\varphi^{(2)} = 0.0$ (б)

В втором случае $\sigma_g \neq 0.0$ и (24) не является точным решением МКДВ-Б. Как и в первом случае, наличие жидкости между оболочками приводит к возникновению волны деформации во внутренней оболочке, в которой в начальный момент деформации равнялись нулю (рис. 3).

Данный процесс происходит за счёт «перекачки» энергии через слой жидкости от возбуждающей волны во внешней оболочке и сопровождается снижением её амплитуды и скорости распространения.



При этом происходит размазывание солитона, что объясняется наличием диссипации (σ_g отлично от нуля в отличие от первого случая). В результате, как и в первом случае, во внешней и внутренней оболочках устанавливается волна деформации постоянной амплитуды и скорости распространения.

Проведенное моделирование позволяет сделать вывод, что рассматриваемая механическая система начинает вести себя как единый трёхслойный пакет с двумя несущими слоями (внешняя и внутренняя оболочки), по которым распространяются волны деформации, и заполнителем — слоя вязкой несжимаемой жидкости.

Проведённое компьютерное исследование новой математической модели с использованием теории базисов Грёбнера позволило найти новое аналитическое решение МКдВ, а также построить качественную разностную схему, которая по построению соответствует исходной непрерывной модели.

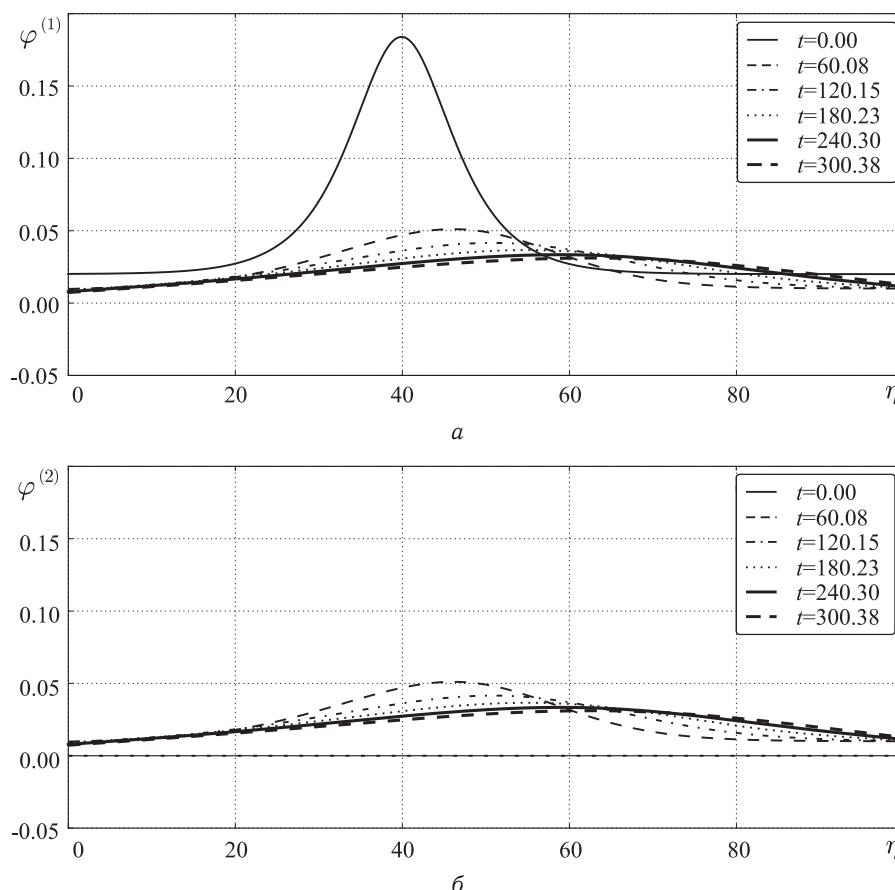


Рис. 3. График численного решения уравнений (22) при $\sigma_g = 1.0$ и с начальным условием, (24) для $\varphi^{(1)}$ (а) с $k = 0.2$, $\eta_0 = 40.0$, $b = 1.0$, $c = 1/(2k)$ и для $\varphi^{(2)} = 0.0$ (б)

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект 10-01-00177-а) и гранта Президента РФ (проект МД-1025.2012.8).

Библиографический список

1. Gröbner Bases and Applications / eds. B. Buchberger, F. Winkler. London Mathematical Society Lectures Notes. Ser. 251. Cambridge University Press, 1998. 522 p.
2. Gerdt V. P., Blinkov Yu. A., Mozzhilkin V. V. Gröbner bases and generation of difference schemes for partial differential equations // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications. 2006. Vol. 2. 26 p. URL: <http://www.emis.de/journals/SIGMA/2006/Paper051/index.html> (дата обращения 28.02.10).
3. Землянухин А. И., Могилевич Л. И. Нелинейные волны деформаций в цилиндрических оболочках // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1995. Т. 3, № 1. С. 52–58.
4. Землянухин А. И., Могилевич Л. И. Нелинейные волны в цилиндрических оболочках: солитоны, симметрия, эволюция / Саратов. гос. техн. ун-т. Саратов, 1999. 132 с.
5. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М. : Дрофа, 2003. 840 с.



6. Каузерер К. Нелинейная механика. М. : Изд-во иностр. лит., 1961. 240 с.
7. Вольмир А. С. Оболочки в потоке жидкости и газа: задачи гидроупругости. М.: Наука, 1979. 320 с.
8. Maxima, a Computer Algebra System. URL: <http://maxima.sourceforge.net/> (дата обращения 28.02.10).
9. Блинков Ю. А., Гердт В. П. Специализированная система компьютерной алгебры GINV // Программирование. 2008. Т. 34, № 2. С. 67–80.
10. Блинков Ю. А., Мозжилкин В. В. Генерация разностных схем для уравнения Бюргера построением базисов Грёбнера // Программирование. 2006. Т. 32, № 2. С. 71–74.
11. SciPy.org. URL: <http://www.scipy.org> (дата обращения 28.02.10).

УДК 519.713

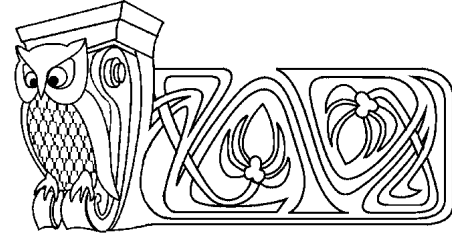
АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБРАЗОВ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ

Д. О. Матов

Саратовский государственный университет
E-mail: MatovDO@info.sgu.ru

Рассматривается подкласс аффинных преобразований геометрических образов автоматов. Приводятся результаты исследования свойств и вида рассматриваемых преобразований.

Ключевые слова: автомат, геометрический образ, аффинное преобразование.



Affine Transformations of Geometrical Images of Finite Automata

D. O. Matov

A subclass of affine transformations on the set of geometrical images of finite automata is investigated. The results about the characteristics and the form of these transformations are described.

Key words: automaton, geometrical image, affine transformation.

ВВЕДЕНИЕ

В статье исследуется поведение конечных детерминированных автоматов, заданных в виде геометрических образов.

При решении различных задач, связанных с автоматами, как правило, используются традиционные способы задания автоматов (таблицы, графы, матрицы переходов и т.п.). Однако находят свое применение и относительно новые способы задания функционирования автоматов. В 1994 году В. А. Твердохлебовым был предложен геометрический подход к изучению автоматов. В рамках этого подхода поведение автомата отображается в геометрических фигурах, в частности, в кривых на плоскости. Была разработана дискретная словарная геометрия, и к изучению поведения автоматов был привлечен аппарат непрерывной математики, в том числе многие инструменты геометрии. Тогда впервые появилось понятие «геометрический образ автомата» как некоторая геометрическая фигура, содержащая в себе всю информацию о его поведении. В 1999 году Л. Б. Тяпаев в рамках геометрического подхода предложил в качестве геометрического образа автомата рассматривать множество точек на плоскости с рациональными координатами. Были рассмотрены многие задачи анализа, синтеза, эквивалентности и распознавания автоматов на основе их задания геометрическими образами [1]. Настоящая статья является продолжением работы [1]. В ней используется предложенный Л. Б. Тяпаевым способ построения геометрических образов автоматов.

Основным объектом исследования являются аффинные преобразования множеств точек, представляющих геометрические образы конечных детерминированных автоматов.

1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОБРАЗЫ АВТОМАТОВ

Пусть автомат $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$, где S — множество состояний, X, Y — входной и выходной алфавиты, $\delta : S \times X \rightarrow S$, $\lambda : S \times X \rightarrow Y$ — функции переходов и выходов соответственно. Пусть $|X| = n$, $|Y| = m$. С инициальным автоматом (A, s) связано автоматное отображение $\Lambda_A^s : X^* \rightarrow Y^*$. Геометрическое пространство Γ для автомата (A, s) определяется по следующему алгоритму [1].