equations connected with Kontorovich – Lebedev transform. *Prikl. Matem. i Mekhan.* [Appl. Math. Mech.], 1974, vol. 38, no. 6, pp. 1090–1097 (in Russian).
5. Yakubovich S. B. *Index Transforms*. Singapore, New Jersey, London, Hongkong, World Scientific Publishing, 1996, 248 p.
6. Poruchikov V. B., Rappoport J. M. Inversion formulas for modified Kontorovich – Lebedev transforms. *Differetial'niye Uravneniya*. [Differ. Equations], 1984, vol. 20, no. 3, pp. 542–546 (in Russian).
7. Rappoport J. M. Some properties of modified Kontorovich – Lebedev transforms. *Differetial'niye Uravneniya*. [Differ. Equations], 1985, vol. 21, no. 4, pp. 724–727 (in Russian).
8. Rappoport J. M. Some results for modified Kontorovitch – Lebedev integral transforms. *Proceedings of the 7th International Colloquium on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis*, Marcel Dekker Inc., 2000, pp. 473–477.
9. Rappoport J. M. The properties, inequalities and numerical approximation of modified Bessel function. *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, 2006, vol. 25, pp. 454–466.
10. Rappoport J. M. *About modified Kontorovitch – Lebedev integral transforms and their kernels*. Preprint / London, Imperial College of Science, Technology and Medicine, Department of Mathematics, 2009. 09P/001, 31 p.
11. Rappoport J. M. Some integral equations with modified Bessel function. *Proceedings of the 5th ISAAC Congress*, More Progresses in Analysis, World Scientific Publishing, 2009, pp. 269–278.
12. Yakubovich S. B. Beurling's theorems and inversion formulas for certain index transforms. *Opuscula Mathematica*, 2009, vol. 29, no. 1, pp.93–110.

УДК 517.917

ОЦЕНКА СВЕРХУ ЧИСЛА ИНВАРИАНТНЫХ ПРЯМЫХ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ n-Й СТЕПЕНИ

В. Б. Тлячев[1], А. Д. Ушхо[2], Д. С. Ушхо[3]

[1]Доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теоретической физики, Адыгейский государственный университет, Майкоп, Tlyachev@adygnet.ru

[2]Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической физики, Адыгейский государственный университет, Майкоп, Uschho76@rambler.ru

[3]Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, Адыгейский государственный университет, Майкоп, Damirubych@mail.ru

Показано, что полиномиальное векторное поле n-й степени на плоскости имеет не более $2n+1$ $(2n+2)$ инвариантных прямых при n — четном (нечетном) и $n \geq 3$, если оно имеет особую точку, которой инцидентны $n+1$ инвариантных прямых и n параллельных между собой инвариантных прямых с определенным угловым коэффициентом.

Ключевые слова: полиномиальное векторное поле, инвариантная прямая, особая точка, прямая изоклина.

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sum\limits_{i=0}^{n} P_i(x,y) \equiv P(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = \sum\limits_{i=0}^{n} Q_i(x,y) \equiv Q(x,y), \end{cases} \tag{1}$$

где $P_i(x,y) = \sum\limits_{r+s=i} a_{rs}x^r y^s$, и $Q_i(x,y) = \sum\limits_{r+s=i} b_{rs}x^r y^s$, $a_{rs}, b_{rs} \in \mathbb{R}$, $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ — взаимно-простые многочлены.

Определение 1 (см. [1]). Прямую линию $ax+by+c=0$, $a,b,c \in \mathbb{R}$, называют *инвариантной прямой линией* системы (1), если выполняется равенство $aP(x,y)+bQ(x,y) \equiv (ax+by+c)R(x,y)$, где $R(x,y)$ — многочлен с действительными коэффициентами.

Отметим, что степень многочлена $R(x,y)$ не выше $n-1$ [2, с. 17]. Всюду в дальнейшем условимся использовать термин «инвариантная прямая» вместо «инвариантная прямая линия». Понятие «инвариантная прямая» (или «линейный частный интеграл») системы (1) и «интегральная прямая» дифференциального уравнения фазовых траекторий системы (1) являются синонимами [2].

Определение 2 (см. [3]). *Особой точкой* системы (1) называют точку $M(x_0, y_0)$, $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, координаты которой удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} P(x,y) = 0, \\ Q(x,y) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Наряду с термином «особая точка» в качественной теории дифференциальных уравнений используются такие термины, как «состояние равновесия», «точка покоя» [3]. Точки, удовлетворяющие системе (2), называются также особыми точками дифференциального уравнения $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{Q(x,y)}{P(x,y)}$. Понимая, что термины «состояние равновесия» и «точка покоя» свойственны для теории колебаний, а значит, имеют механическое происхождение, мы будем использовать в дальнейшем только термин «особая точка».

Оценке числа инвариантных прямых полиномиальных векторных полей на плоскости посвящено достаточно большое число работ как зарубежных, так и отечественных математиков. Так, в упомянутой нами статье [1] доказано, что число инвариантных прямых системы (1) не превосходит $3n-1$, где $n \geq 2$. В работах [4–6] доказывается, что полиномиальное векторное поле четвертой степени с вырожденной бесконечностью имеет не более 9 инвариантных прямых, в том числе и с комплексными коэффициентами. По определению [4] система (1) называется вырожденной на бесконечности, если $xQ_n(x,y) - yP_n(x,y) \equiv 0$.

В работе [7] доказано, что кубическая система на плоскости имеет инвариантные прямые не более 6 различных направлений.

В данной работе изучается вопрос об оценке сверху числа инвариантных прямых системы (1), имеющей n параллельных между собой инвариантных прямых и особую точку, которой инцидентны $n+1$ инвариантных прямых. Решение данного вопроса позволяет строить в пространстве коэффициентов различные конструкции полиномиальных векторных полей с заданными инвариантными прямыми. А это в свою очередь дает возможность исчерпывающего качественного анализа рассматриваемых динамических систем.

Лемма 1. *Через особую точку системы* (1) *проходит не более* $n+1$ *инвариантных прямых.*

Доказательство. Не уменьшая общности, считаем, что $O(0,0)$ — особая точка системы (1). Инвариантная прямая $y - kx = 0$, проходящая через точку $O(0,0)$, удовлетворяет тождеству:

$$Q(x, kx) - kP(x, kx) \equiv 0. \tag{3}$$

.

Полагая в (3) $x = 1$, получаем уравнение

$$Q(1, k) - kP(1, k) = 0. \tag{4}$$

.

Уравнение (4) является алгебраическим уравнением степени не выше $n+1$, следовательно, оно имеет не более $n+1$ корней по переменной k. Это означает, что число инвариантных прямых системы (1), инцидентных особой точке $O(0,0)$, не превосходит $n+1$. Лемма доказана. □

Лемма 2. *Какие бы* $n+1$ *прямых изоклин системы* (1) *ни взять, среди них найдутся две прямые, на которых эта система индуцирует различные направления.*

Доказательству леммы предпошлем разъяснение по поводу терминологии, используемой в формулировке леммы 2.

Прямой изоклиной системы (1) будем называть прямую $\ell : y - kx - b = 0$, для которой выполняется условие: $Q(x, kx+b) - mP(x, kx+b) \equiv 0$, где m — const, причем если $P(x, kx+b) \equiv 0 (Q(x, kx+b) \equiv 0)$, то ℓ называется изоклиной бесконечности (нуля). Понятно, что в силу взаимной простоты правых частей уравнений системы (1) одновременно не выполнимы тождества $P(x, kx+b) \equiv 0$ и $Q(x, kx+b) \equiv 0$. В статье [8], посвященной изучению векторного поля n-й степени на плоскости, имеющего оси симметрии N-типа, доказана теорема 1, согласно которой ось симметрии N-типа является изоклиной указанного векторного поля. При этом траектории полиномиальной дифференциальной системы пересекают ось симметрии N-типа под прямым углом.

Условимся говорить, что на кривой L индуцировано направление m, если угловой коэффициент касательных к фазовым траекториям системы (1) в точках их пересечения (быть может, касания) с L равен m.

Доказательство леммы 2. Следуя работе [9], применим к системе (1) преобразование $x = \overline{y}$, $y = \overline{x} + m\overline{y}$, переводящее каждую прямую изоклину, на которой индуцировано направление m, в изоклину бесконечности дифференциальной системы:

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{x}}{dt} = \overline{Q}(\overline{x}, \overline{y}) - m\overline{P}(\overline{x}, \overline{y}), \\ \dfrac{d\overline{y}}{dt} = \overline{P}(\overline{x}, \overline{y}), \end{cases} \tag{5}$$

где $\overline{P}(\overline{x}, \overline{y}) = P(\overline{y}, \overline{x} + m\overline{y})$, $\overline{Q}(\overline{x}, \overline{y}) = Q(\overline{y}, \overline{x} + m\overline{y})$. Изоклина бесконечности $\overline{Q}(\overline{x}, \overline{y}) - m\overline{P}(\overline{x}, \overline{y}) = 0$ системы (5) является алгебраической кривой не выше n-го порядка. Следовательно, эта система имеет не более n прямых изоклин бесконечности. Лемма доказана. □

Следствие 1. *Система* (1) *имеет не более n параллельных между собой инвариантных прямых.*

Будем говорить, что система (1) имеет инвариантное множество $M_n^k(k)$, если элементами $M_n^k(k)$ являются n параллельных между собой инвариантных прямых системы (1) с угловым коэффициентом k и только они. Под инвариантным множеством M_A^s будем понимать множество, состоящее из s инвариантных прямых системы (1), инцидентных особой точке A этой же системы.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. *Пусть система* (1) *имеет инвариантное множество M_A^{n+1}. Тогда посредством аффинного преобразования эту систему можно привести к системе (обозначения переменных x, y и t сохраняем)*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x[P_{n-1}(x, y) + P_{n-2}(x, y) + \ldots + P_1(x, y) + a_{00}], \\ \dfrac{dy}{dt} = x[Q_{n-1}(x, y) + P_{n-2}(x, y) + \ldots + P_1(x, y) + a_{00}], \end{cases} \tag{6}$$

где $P_i(x, y)$ — однородные многочлены степени i $(i = \overline{1, n-1})$, $Q_{n-1}(x, y)$ — однородный многочлен степени $n-1$, причем $P_{n-1}(x, y) \not\equiv Q_{n-1}(x, y)$, $a_{00} \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Обозначим через ℓ одну из инвариантных прямых множества M_A^{n+1}. Опишем полуокружность L с центром в точке A, диаметр которой лежит на инвариантной прямой ℓ. Зададим на L направление обхода, например, против часовой стрелки. Пусть ℓ_1, ℓ_2, $\ldots$, ℓ_n — инвариантные прямые множества $M_A^{n+1} \setminus \{\ell\}$ и они пересекают L в точках $W_1, W_2, \ldots, W_n$ соответственно. Нумерация точек W_i $(i = \overline{1, n})$ соответствует выбранному направлению обхода L. С помощью невырожденного преобразования $x = \alpha\overline{x} + \beta\overline{y}$, $y = \gamma\overline{x} + \delta\overline{y}$ [8] переведем прямую ℓ_1 (ℓ_n) в изоклину нуля (бесконечности) или в изоклину бесконечности (нуля). В результате получим систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x[P_{n-1}(x, y) + P_{n-2}(x, y) + \ldots + P_1(x, y) + a_{00}], \\ \dfrac{dy}{dt} = x[Q_{n-1}(x, y) + Q_{n-2}(x, y) + \ldots + Q_1(x, y) + b_{00}], \end{cases} \tag{7}$$

где P_i, Q_i — однородные многочлены степени i $(i = \overline{1, n-1})$, a_{00}, b_{00} — постоянные вещественные числа.

Так как через особую точку $O(0,0)$ системы (7) проходят инвариантные прямые $y = k_i x$ $(i = \overline{1, n-1})$, $k_i \neq 0$, то имеют место следующие системы уравнений:

$$\begin{cases} b_{n-1,0} - a_{n-1,0} + (b_{n-2,1} - a_{n-2,1})k_1 + \ldots + (b_{0,n-1} - a_{0,n-1})k_1^{n-1} = 0, \\ b_{n-1,0} - a_{n-1,0} + (b_{n-2,1} - a_{n-2,1})k_2 + \ldots + (b_{0,n-1} - a_{0,n-1})k_2^{n-1} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{n-1,0} - a_{n-1,0} + (b_{n-2,1} - a_{n-2,1})k_{n-1} + \ldots + (b_{0,n-1} - a_{0,n-1})k_{n-1}^{n-1} = 0; \end{cases} \qquad (\mu_{n-1})$$

$$\begin{cases} b_{n-2,0} - a_{n-2,0} + (b_{n-3,1} - a_{n-3,1})k_1 + \ldots + (b_{0,n-2} - a_{0,n-2})k_1^{n-2} = 0, \\ b_{n-2,0} - a_{n-2,0} + (b_{n-3,1} - a_{n-3,1})k_2 + \ldots + (b_{0,n-2} - a_{0,n-2})k_2^{n-2} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{n-2,0} - a_{n-2,0} + (b_{n-3,1} - a_{n-3,1})k_{n-1} + \ldots + (b_{0,n-2} - a_{0,n-2})k_{n-1}^{n-2} = 0; \end{cases} \qquad (\mu_{n-2})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\begin{cases} b_{20} - a_{20} + (b_{11} - a_{11})k_1 + (b_{02} - a_{02})k_1^2 = 0, \\ b_{20} - a_{20} + (b_{11} - a_{11})k_2 + (b_{02} - a_{02})k_2^2 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{20} - a_{20} + (b_{11} - a_{11})k_{n-1} + (b_{02} - a_{02})k_{n-1}^2 = 0; \end{cases} \qquad (\mu_2)$$

$$\begin{cases} b_{10} - a_{10} + (b_{01} - a_{01})k_1 = 0, \\ b_{10} - a_{10} + (b_{01} - a_{01})k_2 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{10} - a_{10} + (b_{01} - a_{01})k_{n-1} = 0; \end{cases} \qquad (\mu_1)$$

$$\begin{cases} b_{00} = a_{00}. \end{cases} \qquad (\mu_0)$$

Каждая система $\mu_r (1 \leq r \leq n-1)$ является системой линейных однородных уравнений относительно $r+1$ переменных $b_{r-j,j} - a_{r-j,j} (0 \leq j \leq r)$. Так как $k_\alpha \neq k_\beta$, если $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, то матрица системы (μ_{n-2}) является матрицей Вандермонда [10], поэтому (μ_{n-2}) имеет единственное решение и оно является тривиальным. В системах (μ_r) $(1 \leq r \leq n-3)$ рассматриваем подсистему, состоящую из $r+1$ уравнений. Каждая такая подсистема имеет единственное решение, и оно является тривиальным, так как ее определитель является определителем Вандермонда [10].

Таким образом, $P_1(x,y) \equiv Q_1(x,y), P_2(x,y) \equiv Q_2(x,y), \ldots, P_{n-2}(x,y) \equiv Q_{n-2}(x,y)$. В системе (μ_{n-1}) выполняется условие $(b_{n-1,0} - a_{n-1,0})(b_{0,n-1} - a_{0,n-1}) \neq 0$, так как иначе $P_{n-1}(x,y) \equiv Q_{n-1}(x,y)m$, и правые части уравнений системы (1) не являются взаимно простыми. Тем и доказана теорема. □

Следствие 2. *Если система* (1) *имеет инвариантное множество M_A^{n+1}, то она не является системой с вырожденной бесконечностью.*

Справедливость данного утверждения вытекает из определения системы с вырожденной бесконечностью и вида правых частей системы (6).

Лемма 3. *Если система* (1) *имеет инвариантное множество M_A^{n+1} и инвариантную прямую $d \notin M_A^{n+1}$, то d параллельна одной из инвариантных прямых множества M_A^{n+1}.*

В самом деле, предположение об отсутствии инвариантной прямой из множества M_A^{n+1}, параллельной инвариантной прямой d, допускает наличие на прямой d не менее $n+1$ особых точек системы (1). Но это противоречит свойству системы (1) иметь на прямой не более n особых точек (1).

Лемма 4. *Особая точка системы* (6), *через которую не проходит ни одна из координатных осей, принадлежит инвариантной прямой множества $M_0^{n+1} \setminus \{x=0, y=0\}$.*

Доказательство. Пусть $F(x,y)$ — особая точка системы (6), причем $x\cdot y\neq 0$. Координаты точки F удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} P_{n-1}(x,y)+P_{n-2}(x,y)+\ldots+P_1(x,y)+a_{00}=0,\\ Q_{n-1}(x,y)+P_{n-2}(x,y)+\ldots+P_1(x,y)+a_{00}=0. \end{cases} \tag{8}$$

Из (8) следует

$$\begin{gathered}(b_{n-1,0}-a_{n-1,0})x^{n-1}+(b_{n-2,1}-a_{n-2,1})x^{n-2}y+\ldots+\\ +(b_{1,n-2}-a_{1,n-2})xy^{n-2}+(b_{0,n-1}-a_{0,n-1})y^{n-1}=0.\end{gathered} \tag{9}$$

Разделив обе части (9) на x^{n-1}, получим уравнение

$$\begin{gathered}b_{n-1,0}-a_{n-1,0}+(b_{n-2,1}-a_{n-2,1})u+(b_{n-3,2}-a_{n-3,2})u^2+\ldots+\\ +(b_{1,n-2}-a_{1,n-2})u^{n-2}+(b_{0,n-1}-a_{0,n-1})u^{n-1}=0,\end{gathered} \tag{10}$$

где $u=y/x$. При доказательстве теоремы 1 было установлено, что уравнение (10) имеет $n-1$ корней, являющихся угловыми коэффициентами $k_1,k_2,\ldots,k_{n-1}$ инвариантных прямых множества $M_0^{n+1}\setminus\{x=0,y=0\}$. Поэтому особая точка $F(x,y)$ принадлежит одной из инвариантных прямых множества $M_0^{n+1}\setminus\{x=0,y=0\}$. Лемма доказана. $\square$

Предположим, что система (6) имеет инвариантные множества $M_n^k(k)$ и M_0^{n+1}. При этом, не умаляя общности, считаем, что инвариантная прямая ℓ, где $\{\ell\}=M_n^k(k)\cap M_0^{n+1}$, расположена во втором и четвертом квадрантах.

Для удобства дальнейшего изложения введем обозначения:

ℓ_i^+ — инвариантная прямая из множества $M_n^k(k)$, пересекающая положительные полуоси координат;

ℓ_i^- — инвариантная прямая из множества $M_n^k(k)$, пересекающая отрицательные полуоси координат;

R_i^+ — расстояние между ℓ и ℓ_i^+;

R_i^- — расстояние между ℓ и ℓ_i^-. Условимся считать, что $R_i^+>R_j^+$, если $i>j$, $R_i^->R_j^-$, если $i>j$;

A_i^+ (B_i^+) — точка пересечения инвариантной прямой ℓ_i^+ с осью абсцисс (ординат);

A_i^- (B_i^-) — точка пересечения инвариантной прямой ℓ_i^- с осью абсцисс (ординат);

H_i — i-й квадрант без координатных осей $(i=\overline{1,4})$. Пусть L — инвариантная прямая системы (6), где $L\notin M_n^k(k)\cup M_0^{n+1}$. Будем говорить, что L обладает свойством (α), если она пересекает квадранты H_1, H_2, H_3, свойством (β), если она пересекает квадранты H_1, H_3, H_4 и свойством (γ), если она пересекает квадранты H_1, H_2, H_4.

Лемма 5. *Пусть L — инвариантная прямая системы, обладающая свойством (α). Тогда L пересекается с осью абсцисс (ординат) в точке A_1^- (B_1^+).*

Доказательство. Очевидно, прямая L пересекается с осями координат в особых точках. Поэтому существуют инвариантные прямые ℓ_i^+ и ℓ_j^- такие, что $\ell_i^+\cap L=B_i^+$, $\ell_j^-\cap L=A_j^-$. Покажем, что $i=j=1$. Предположим, что $i>1$. Тогда $\ell_i^+\cap L=N_1$, где $N_1\in H_2$. По лемме 4 особая точка системы (6), расположенная в квадранте H_2 или H_4, принадлежит только инвариантной прямой ℓ. Предположение о том, что $j>1$, допускает наличие у системы (6) особой точки $N_2=\ell_1^-\cap L$, где $N_2\in H_2$. Снова приходим к противоречию. Таким образом, инвариантная прямая L проходит через точки A_1^- и B_1^+. Лемма доказана. $\square$

Аналогичными рассуждениями доказывается

Лемма 6. *Пусть L — инвариантная прямая системы* (6)*, обладающая свойством (β). Тогда L проходит через особые точки A_1^+ и B_1^-.*

Лемма 7. *Никакие две инвариантные прямые L_1 и L_2, не принадлежащие множеству $M_n^k(k) \cup M_0^{n+1}$, не могут быть одновременно ни прямыми со свойством (α), ни прямыми со свойством (β).*

Лемма 7 следует из лемм 5 и 6.

Заметим, что система (6) не может иметь инвариантную прямую со свойством (γ), так как эта прямая пересекала бы все $n+1$ инвариантных прямых множества M_0^{n+1}. Это противоречит свойству системы (6) иметь на прямой не более n особых точек. По этой же причине система (6) не имеет инвариантной прямой, не принадлежащей множеству $M_n^k(k) \cup M_0^{n+1}$, и пересекающей квадранты H_2, H_3, H_4. Таким образом, из леммы 7 следует

Лемма 8. *Система* (6) *имеет не более двух инвариантных прямых, не принадлежащих множеству $M_n^k(k) \cup M_0^{n+1}$.*

Лемма 9. *Если система* (6) *имеет две инвариантные прямые L_1 и L_2, не принадлежащие множеству $M_n^k(k) \cup M_0^{n+1}$, то n — нечетно.*

Доказательство. Пусть L_1 и L_2 — инвариантные прямые системы (6), причем $L_i \notin M_n^k(k) \cup M_0^{n+1}$, $i = 1, 2$. В силу леммы 7 одна из прямых L_1 и L_2 обладает свойством (α), а другая — свойством (β). Пусть $L_1(L_2)$ обладает свойством $(\alpha)((\beta))$. Возможны два случая взаимного расположения L_1 и L_2 : а) $L_1 \parallel L_2$; б) $L_1 \cap L_2 \neq \varnothing$. Пусть имеет место случай а). Тогда по лемме 3 существует инвариантная прямая $\ell_1 \in M_0^{n+1} \setminus \{\ell, x = 0, y = 0\}$, такая, что $\ell_1 \parallel L_1 \parallel L_2$. Рассмотрим произвольную инвариантную прямую n_1 из множества $M_0^{n+1} \setminus \{\ell, \ell_1, x = 0, y = 0\}$. Она пересекает L_1 или L_2 в точке $N_1 \in H_1$. Для определенности считаем, что $N_1 = n_1 \cap L_1$. Тогда через N_1 проходит инвариантная прямая из множества $M_n^k(k)$, пересекающая L_2 в точке $N_2 \in H_1$. По лемме 4 через точку N_2 проходит инвариантная прямая $n_2 \in M_0^{n+1} \setminus \{\ell, \ell_1, x = 0, y = 0\}$. Таким образом, все элементы множества $M_0^{n+1} \setminus \{\ell, \ell_1, x = 0, y = 0\}$ можно разбить на пары. Следовательно, $n - 3$ — число инвариантных прямых во множестве $M_0^{n+1} \setminus \{\ell, \ell_1, x = 0, y = 0\}$ четно, поэтому n — нечетно. В случае б) L_1 и L_2 пересекаются в особой точке $N_3 \in H_1 \cup H_3$. Не уменьшая общности, полагаем, что $N_3 \in H_1$. По лемме 4 через особую точку N_3 проходит некоторая инвариантная прямая $\ell_1 \in M_0^{n+1} \setminus \{\ell, x = 0, y = 0\}$. По лемме 3 существуют инвариантные прямые $n_2, n_3 \in M_0^{n+1} \setminus \{\ell, \ell_1, x = 0, y = 0\}$, такие, что $n_2 \parallel L_1$, $n_3 \parallel L_2$. Инвариантная прямая n_2 пересекает L_2 в особой точке N_4, а инвариантная прямая n_3 пересекает L_1 в особой точке N_5. Можно показать средствами аналитической геометрии, что прямая $N_4N_5 \in M_n^k(k)$. Пусть L_3 — произвольная инвариантная прямая из множества $M_0^{n+1} \setminus \{\ell, \ell_1, n_1, n_2, x = 0, y = 0\}$, где L_3 пересекает прямую L в точке $N_6 \in H_1$. Так как все особые точки системы лежат на прямых множества $M_n^k(k)$, то найдется прямая $\ell_2 \in M_n^k(k)$, которая пересекает инвариантную прямую L_2 в точке N_7. По лемме 4 через особую точку N_7 проходит инвариантная прямая множества $M_0^{n+1} \setminus \{\ell, \ell_1, n_1, n_2, x = 0, y = 0\}$. Вновь приходим к выводу, что во множестве $M_0^{n+1} \setminus \{\ell, \ell_1, x = 0, y = 0\}$ содержится четное число инвариантных прямых, то есть n — нечетно. Лемма доказана. □

Следствие 3. *Если n — четно, то система* (6) *имеет не более одной инвариантной прямой, не принадлежащей множеству $M_n^k(k) \cup M_0^{n+1}$.*

Теорема 2. *Если n — четно (нечетно), $n \geq 3$, то число инвариантных прямых системы* (1), *имеющей инвариантные множества $M_n^k(k)$ и M_A^{k+1}, не превосходит $2n+1$ $(2n+2)$.*

Доказательство. Пусть n — четно, тогда в силу следствия 3 система (1) имеет не более одной инвариантной прямой, не принадлежащей множеству $M_n^k(k) \cup M_A^{n+1}$. Поэтому общее число инвариантных прямых системы (1) не больше чем $n + n + 1 = 2n + 1$. При нечетном n по леммам 8 и 9 число инвариантных прямых системы (1) не превосходит $n + n + 2 = 2n + 2$. Теорема доказана. □

Теорема 3. *Если кубическая дифференциальная система на плоскости имеет два инвариантных множества $M_3^k(k)$ и M_A^4 и максимальное число инвариантных прямых, то эта система имеет еще инвариантное множество $M_3^{k_1}(k_1)$, где $k_1 \neq k$, или два инвариантных множества $M_2^{k_2}(k_2)$ и $M_2^{k_3}(k_3)$, где $(k - k_2)(k - k_3) \neq 0$.*

Доказательство. Не сужая общности, рассмотрим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x[P_2(x,y) + ax + by + c], \\ \dfrac{dy}{dt} = y[Q_2(x,y) + ax + by + c], \end{cases} \tag{11}$$

где P_2, Q_2 — однородные многочлены степени 2, причем $P_2(x,y) \not\equiv Q_2(x,y)$. Также считаем, что множество M_0^4 состоит из инвариантных прямых $x = 0$, $y = 0$, ℓ и $n_1 : y - ax = 0$, $a > 0$, ℓ пересекает квадранты H_2 и H_4. Относительно взаимного расположения инвариантных прямых системы (11), принадлежащих множеству $M_3^k(k) \setminus \{\ell\}$, возможны два предположения:

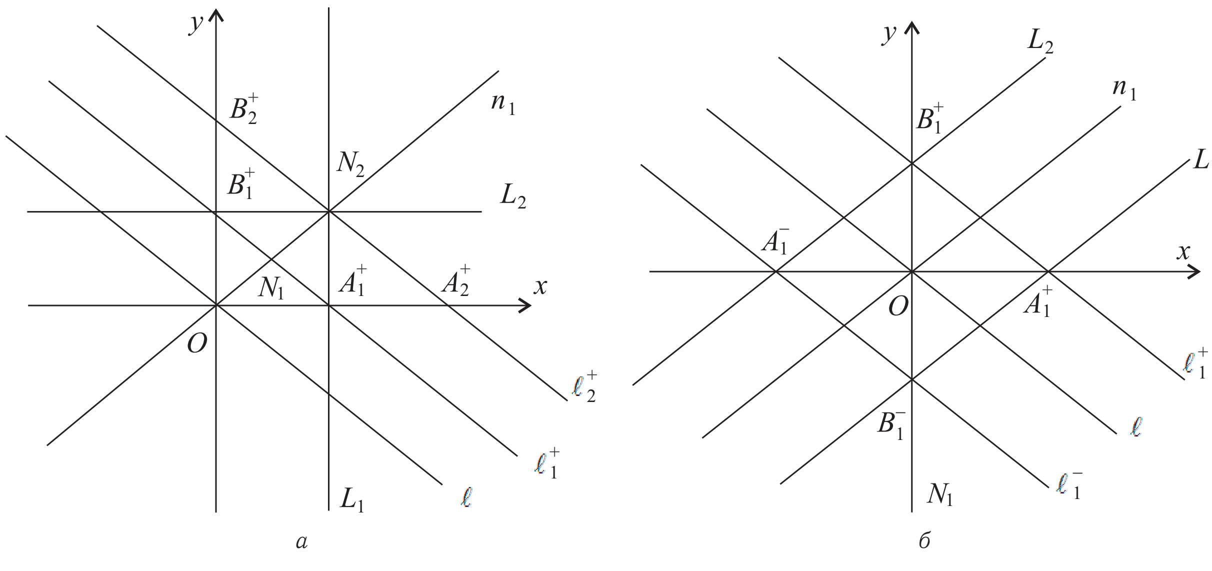
а) они пересекают положительные (или отрицательные) полуоси координат;

б) одна из них пересекает положительные полуоси, а другая — отрицательные полуоси осей координат.

Пусть имеет место случай а), и, для определенности, система имеет инвариантные прямые ℓ_1^+ и ℓ_2^+. Очевидно, на каждой из инвариантных прямых ℓ_1^+ и ℓ_2^+ система (11) имеет три особые точки (рисунок, *а*).

Ни одна из инвариантных прямых L_1 и L_2 не может быть прямой (α)-типа или (β)-типа (максимальное число инвариантных прямых системы (11) равно восьми [11], поэтому кроме прямых множества $M_3^k(k) \cup M_0^4$ система имеет еще две инвариантные прямые). Заметим также, что ни L_1, ни L_2 не проходят ни через одну из особых точек A_2^+ и B_2^+, так как в противном случае система (11) имеет особую точку, принадлежащую множеству $H_2 \cup H_4$, но не лежащую на прямой ℓ. Это противоречит лемме 4. Пусть L_1 проходит через особую точку A_1^+, тогда по лемме 3 L_1 параллельна оси ординат. Аналогично, L_2 проходит через особую точку B_1^+, и L_2 параллельна оси абсцисс.

Таким образом, кроме инвариантных множеств $M_0^4 = \{n_1, x = 0, y = 0, \ell\}$ и $M_3^a(a) = \{\ell, \ell_1^+, \ell_2^+\}$, система (11) имеет инвариантные множества $M_2^0(0) = \{y = 0, L_2\}$ и $M_3^\infty(\infty) = \{x = 0, L_1\}$. Если имеет место случай б), то инвариантные прямые L_1 и L_2 параллельны инвариантной прямой n_1 и проходят через точки A_1^+, B_1^- и A_1^-, B_1^+ соответственно (рисунок, *б*)



Примеры расположения двух параллельных инвариантных прямых кубической дифференциальной системы относительно параллельной им инвариантной прямой ℓ, проходящей через начало координат: *а* — прямые расположены выше прямой ℓ; *б* — прямая ℓ расположена между этими прямыми

В рассматриваемом случае, кроме инвариантных множеств $M_0^4 = \{n_1, x = 0, y = 0, \ell\}$ и $M_3^a(a) = \{\ell, \ell_1^-, \ell_1^+\}$, система имеет инвариантное множество $M_3^k(k) = \{L_1, L_2, n_1\}$. Теорема доказана. □

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В качестве приложения основных результатов данной обобщающей работы мы рассмотрели только кубические дифференциальные системы. В то же время они могут быть использованы при изучении конкретных плоских векторных полей более высоких степеней. Это, в свою очередь, позволит получить классы конкретных векторных полей с заданными свойствами. Например, в [12] дана классификация всех кубических систем, имеющих максимальное количество инвариантных прямых (действительных или комплексных) с учетом их кратности. Доказано, что существует ровно 23 топологически различных класса таких систем. При этом для каждого класса представлены конфигурации инвариантных прямых на диске Пуанкаре. Каждый класс характеризуется набором аффинных инвариантных условий. Аналогичные задачи решаются в [13–15] для кубических систем с инвариантными прямыми суммарной кратностью 7, 8 и 9 соответственно.

Доказанные нами утверждения не дают никаких алгоритмических рекомендаций построения таких классов динамических систем. Поэтому эта проблема остается открытой для дальнейшего исследования.

Работа частично выполнена в рамках Единого заказ-наряда Минобрнауки РФ (*проект* № 451).

Библиографический список

1. *Joan C. A., Grunbaum B., Llibre J.* On the number of invariant straight lines for polynomial differential systems // Pacific J. Math. 1998. Vol. 184, № 2. P. 207–230.
2. *Дружкова Т. А.* Алгебраические дифференциальные уравнения с алгебраическими интегралами : в 2 ч. Ч. 1. Н. Новгород : Изд-во Нижегород. ун-та, 2005. 37 с.
3. *Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г.* Качественная теория динамических систем второго порядка. М. : Наука, 1966. 568 с.
4. *Долов М. В., Чистякова С. А.* О линейных частных интегралах полиномиальных векторных полей четвертой степени с вырожденной бесконечностью. I // Вестн. Нижегород. ун-та. 2010. № 6. С. 132–137.
5. *Долов М. В., Чистякова С. А.* О линейных частных интегралах полиномиальных векторных полей четвертой степени с вырожденной бесконечностью. II // Вестн. Нижегород. ун-та. 2011. № 1. С. 139–148.
6. *Долов М. В., Чистякова С. А.* О линейных частных интегралах полиномиальных векторных полей четвертой степени с вырожденной бесконечностью. III // Вестн. Нижегород. ун-та. 2011. № 2. С. 123–129.
7. *Ушхо А. Д.* Траектории кубической дифференциальной системы на плоскости, имеющей инвариантные прямые шести различных направлений // Вестн. ВГУ. Сер. Физика. Математика. 2012. № 2. С. 224–231.
8. *Тлячев В. Б., Ушхо А. Д., Ушхо Д. С.* Оси симметрии полиномиальных дифференциальных систем на плоскости // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2010. Т. 10, вып. 2. С. 41–49.
9. *Ушхо Д. С.* О прямых изоклинах кубической дифференциальной системы // Труды ФОРА. 2003. № 8. С. 7–21.
10. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. М. : Наука, 1971. 432 с.
11. *Любимова Р. А.* Об одном дифференциальном уравнении с интегральными прямыми // Дифференциальные и интегральные уравнения. Горький : Изд-во Горьков. гос. ун-та, 1977. Вып. 1. С. 19–22.
12. *Llibre J., Vulpe N.* Planar Cubic Polynomial Differential Systems with the Maximum Number of Invariant Straight Lines // Rocky Mountain J. Math. 2006. Vol. 36, № 4. P. 1301–1373.
13. *Llibre J., Vulpe N.* Cubic systems with invariant affine straight lines of total parallel multiplicity seven // Electronic Journal of Differential Equations. 2013. № 274. P. 1–22.
14. *Bujac C., Vulpe N.* Cubic systems with invariant lines of total multiplicity eight and with four distinct infinite singularities. Preprint / Universitat Autònoma de Barcelona. 2013. № 10. P. 1–51. URL: http://www.uab.cat/web/investigacion/prepublicaciones/2013-1345653191763.html (дата обращения: 22.10.2014).
15. *Bujac C.* One new class of cubic systems with maximum number of invariant lines omitted in the classification of J. Llibre and N. Vulpe // Buletinul Academiei de Stiinte a Republicii Moldova (BASM). Matematica. 2014. № 2(75). P. 102–105.

An Estimate from Above of the Number of Invariant Straight Lines of n-th Degree Polynomial Vector Field

V. B. Tlyachev[1], A. D. Ushkho[2], D. S. Ushkho[3]

Adyghe State University, 208, Pervomayskaya st., 385000, Maykop, Russia, tlyachev@adygnet.ru, Uschho76@rambler.ru, Damirubych@mail.ru

It is shown that the n-th degree polynomial vector field in the plane has at most $2n + 1$ $(2n + 2)$ invariant straight lines when n is even (odd) and $n \geq 3$ if it has a singular point for which $n + 1$ invariant straight lines and n parallel invariant straight lines with a certain angular coefficient are incident.

Key words: polynomial vector field, invariant straight line, singular point, isocline.

This work has been partially supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (project no. 451).

References

1. Joan C. A., Grunbaum B., Llibre J. On the number of invariant straight lines for polynomial differential systems. *Pacific Journal of Mathematics*, 1998, vol. 184, no. 2, pp. 207–230. DOI: 10.2140/pjm.1998.184-2.
2. Druzhkova T. A. *Algebraicheskie differentsial'nye uravneniia s algebraicheskimi integralami. Ch. 1.* [Algebraic and differential equations with algebraic integrals. Pt. 1]. Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod Univ. Press, 2005, 37 p. (in Russian).
3. Andronov A. A., Leontovich E. A., Gordon I. I., Maier A. G. *Qualitative Theory of Second-Order Dynamic Systems.* Jerusalem, New York, John Wiley, 1973, 524 p. (Rus. ed. : Andronov A. A., Leontovich E. A., Gordon I. I., Maier A. G. Kachestvennaia teoriia dinamicheskikh sistem vtorogo poriadka. Moscow, Nauka, 1966, 568 p.)
4. Dolov M. V. Chistyakova S. A. On linear partial integrals of polynomial vector fields of the fourth degree with degenerate infinity. I. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta* [Bulletin of the University of Nizhny Novgorod], 2010, no. 6, pp. 132–137 (in Russian).
5. Dolov M. V. Chistyakova S. A. On linear partial integrals of polynomial vector fields of the fourth degree with degenerate infinity. II. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta* [Bulletin of the University of Nizhny Novgorod], 2011, no. 1, pp. 139–148 (in Russian).
6. Dolov M. V. Chistyakova S. A. On linear partial integrals of polynomial vector fields of the fourth degree with degenerate infinity. III. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta* [Bulletin of the University of Nizhny Novgorod], 2011, no. 2, pp. 123–129 (in Russian).
7. Ushkho A. D. Trajectories of cubic differential systems on a the plane with invariant lines of six various directions. *Vestnik Voronezskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Ser.: Fizika. Matematika.* [Proceedings of Voronezh State University. Ser. Physics. Mathematics], 2012, no. 2, pp. 224–231 (in Russian).
8. Tlyachev V. B., Ushkho A. D., Ushkho D. S. Symmetry axes of planar polynomial differential systems. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2010, vol 10, no. 2, pp. 41–49 (in Russian).
9. Ushkho D. S. On straight isoclinal lines of cubic differential system. *Trudy FORA*. [Works of the Adygheya Republic Physical Society], 2003, no. 8, pp. 7–21 (in Russian).
10. Kurosh A. G. *Higher algebra.* Translated from the Russian by George Yankovsky. Reprint of the 1972 translation. Mir, Moscow, 1988, 428 p. (Rus. ed. : Kurosh A. G. Kurs vysshei algebry. Moscow, Nauka, 1971, 432 p.)
11. Lyubimova R. A. On a differential equation with integral straight. *Differentsial'nye i integral'nye uravneniia. Gor'kii: Izd-vo gos. un-ta* [Differential and integral equations], 1977, no. 1, pp. 19–22 (in Russian).
12. Llibre J., Vulpe N. Planar Cubic Polynomial Differential Systems with the Maximum Number of Invariant Straight Lines. *Rocky Mountain J. Math.*, 2006, vol. 36, no. 4, pp. 1301–1373. DOI:10.1216/rmjm/1181069417.
13. Llibre J., Vulpe N. Cubic systems with invariant affine straight lines of total parallel multiplicity seven. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2013, vol. 2013, no. 274, pp. 1–22. Available at: http://ejde.math.txstate.edu/ (Accessed 22, October, 2014).
14. Bujac C., Vulpe N. *Cubic systems with invariant lines of total multiplicity eight and with four distinct infinite singularities.* Preprint / Universitat Autònoma de Barcelona, 2013. no. 10, pp. 1–51. Available at: http://www.uab.cat/web/investigacion/prepublica ciones/2013-1345653191763.html (Accessed 22, October, 2014).
15. Bujac C. One new class of cubic systems with maximum number of invariant lines omitted in the classification of J. Llibre and N. Vulpe. *Buletinul Academiei de Stiinte a Republicii Moldova (BASM). Matematica*, 2014, no. 2(75), pp. 102–105.