References

1. Smirnov V. I., Lebedev N. A. *Functions of a Complex Variable: Constructive Theory*. London, Iliffe Books Ltd., IX, 1968, 488 pp.
2. Privalov A. A. Divergence of nterpolation processes on sets of the second category. *Math. Notes*, 1975, vol. 18, no. 2, pp. 692–694.
3. Shatalina A. V. Divergence of Lagrange Processes on the Unit Circle. *Dep. v VINITI* [Dep. in VINITI], Saratov State University, no. 4060-B90, 19.07.1990, 30 p. (in Russian).
4. K. Prachar. *Raspredelenie prostyh chisel* [The Distribution of Prime Numbers]. Moscow, Mir, 1967. 513 p. (in Russian).

УДК 517.95; 517.984

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ ФУРЬЕ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ПРИ МИНИМАЛЬНЫХ ТРЕБОВАНИЯХ НА ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

А. П. Хромов[1], М. Ш. Бурлуцкая[2]

[1] Доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, KhromovAP@info.sgu.ru

[2] Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, Воронежский государственный университет, bmsh2001@mail.ru

В статье дается новое краткое доказательство теоремы В. А. Чернятина о классическом решении методом Фурье смешанной задачи для волнового уравнения с закрепленными концами при минимальных требованиях на начальные данные. Далее, рассматривается подобная задача для простейшего функционально-дифференциального уравнения первого порядка с инволюцией в случае закрепленного конца, и также получаются результаты окончательного характера. Эти результаты получаются благодаря существенному использованию идей А. Н. Крылова по ускорению сходимости рядов, подобных рядам Фурье. Без доказательства приводятся результаты и для других схожих случаев смешанных задач.

Ключевые слова: смешанная задача, метод Фурье, инволюция, классическое решение, асимптотика собственных значений и собственных функций, система Дирака.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая публикация приурочена к 150-летию со дня рождения выдающихся отечественных ученых В. А. Стеклова (1884–1926) и А. Н. Крылова (1883–1945), внесших весомый вклад в решение смешанных задач методом Фурье.

Обоснование метода Фурье в задачах математической физики традиционно опирается на доказательство равномерной сходимости ряда, представляющего формальное решение задачи, и рядов, полученных его почленным дифференцированием нужное число раз.

Приведем мнение В. А. Стеклова, впервые давшего строгое обоснование метода Фурье: «Необходимость доказывать равномерную сходимость рассматриваемых рядов вытекает из самой сущности метода Ляме – Фурье (Эйлера – Бернулли), дающего выражение искомой функции в виде бесконечного ряда, просуммировать который или преобразовать к виду, удобному для дифференцирования, не представляется возможным» [1, с. 224].

Эта точка зрения сделала метод Фурье очень популярным, было проведено огромное количество исследований и достигнуты значительные успехи.

Информация обзорного характера содержится, в частности, в книгах И. Г. Петровского, В. И. Смирнова, О. А. Ладыженской и В. А. Ильина, В. А. Чернятина [2–7].

Приведем один такой результат из [2]. Рассматривается задача

$$u_{tt} = u_{xx} - q(x)u, \qquad x \in [0,\pi], \qquad t \in (-\infty,+\infty), \tag{0.1}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \tag{0.2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad u_t(x,0) = \psi(x). \tag{0.3}$$

Теорема 0.1 [2, с. 190]. *Если $q(x) \in C[0,\pi]$ и вещественна, $\varphi(x) \in C^3[0,\pi]$, $\psi(x) \in C^2[0,\pi]$,*

$$\varphi(0) = \varphi(\pi) = \varphi''(0) = \varphi''(\pi) = 0, \tag{0.4}$$

$$\psi(0) = \psi(\pi) = 0, \tag{0.5}$$

то ряд, представляющий формальное решение задачи (0.1)–(0.3) *по методу Фурье, и ряды, получающиеся из него дважды почленным дифференцированием по x и t, сходятся абсолютно и равномерно в области $x \in [0, \pi]$, $t \in [-T, T]$ при любом T и, тем самым, сумма $u(x, t)$ данного ряда есть классическое решение.*

В трудном случае числа переменных более двух наиболее глубокие результаты в данном направлении получены О. А. Ладыженской [4] и В. А. Ильиным [6].

Рассмотрим теперь частный случай задачи (0.1)–(0.3) — задачу о колебании струны с закрепленными концами:

$$u_{tt} = u_{xx}, \qquad x \in [0, \pi], \qquad t \in (-\infty, +\infty), \tag{0.6}$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \tag{0.7}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \qquad u_t(x, 0) = 0 \tag{0.8}$$

($\psi(x) \equiv 0$ для простоты). Эта задача впервые была решена Д. Бернулли в 1753 г. и оказала огромное влияние на последующее развитие математики. Она находится в истоке теории рядов Фурье, ортогональных систем, краевых задач на собственные значения и, тем самым, она имеет определяющее значение в современной теории функций, спектральной теории, теории краевых задач в частных производных. Укажем имена крупнейших ученых, принимавших активное участие в разработке данного направления: Д. Бернулли, Эйлер, Фурье, Пуассон, Штурм, Лиувилль, Коши, Пуанкаре, Крылов, Стеклов, Петровский.

Формальное решение задачи (0.6)–(0.8) методом Фурье есть:

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi, \sin n\xi) \sin nx \cos nt, \tag{0.9}$$

где $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в $L_2[0, \pi]$. По теореме 0.1 соотношение (0.9) есть классическое решение, если $\varphi(x) \in C^3[0, 1]$, и удовлетворяет условиям (0.4) и оно получено за счет законности почленного дифференцирования дважды по x и t ряда (0.9). В то же время известно, что решение задачи (0.6)–(0.8) имеет место и при естественных минимальных условиях на функцию $\varphi(x)$, когда она удовлетворяет условиям (0.4), но при этом является только дважды непрерывно дифференцируемой.

В этом случае дважды почленную дифференцируемость ряда (0.9) доказать уже невозможно. Более того, при некоторых $\varphi(x)$ ряд, полученный после дважды почленного дифференцирования, может даже расходиться (при $t = 0$ получаем обычный ряд Фурье произвольной непрерывной функции).

Попробуем, несмотря на это, и в таком случае получить из ряда (0.9) решение задачи (это хорошо известный факт). Сам ряд (0.9) сходится абсолютно и равномерно при $x \in [0, \pi]$ и $t \in (-\infty, +\infty)$. Представим его в виде суммы двух рядов Σ_+ и Σ_-, где

$$\Sigma_\pm = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi, \sin n\xi) \sin n(x \pm t).$$

Теперь каждый из этих рядов есть уже ряд Фурье.

Рассмотрим ряд

$$\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi, \sin n\xi) \sin nx$$

при всех $x \in (-\infty, +\infty)$ и пусть $\widetilde{\varphi}(x)$ — его сумма. Тогда $\widetilde{\varphi}(x)$ есть нечетное периодическое продолжение функции $\varphi(x)$ на всю вещественную ось. В силу естественных условий на функцию $\varphi(x)$ получаем, что $\widetilde{\varphi}(x) \in C^2(-\infty, +\infty)$. Поэтому имеем:

$$u(x, t) = \frac{\widetilde{\varphi}(x + t) + \widetilde{\varphi}(x - t)}{2}, \tag{0.10}$$

и отсюда легко следует, что $u(x, t)$ из (0.10) есть классическое решение задачи (0.6)–(0.8).

Таким образом, не прибегая к почленному дифференцированию ряда (0.9), мы сначала сделали преобразование этого ряда, а уже потом решили вопрос о его гладкости.

По поводу задачи (0.6)–(0.8) приведем высказывание В. А. Стеклова [1, с. 205]: «Этот классический пример показывает, что только что указанные ограничения (наши естественные условия. — *А. Х., М. Б.*) вызываются самой сущностью задачи, и нет оснований рассчитывать на возможность освободиться от некоторых из них при исследовании общего случая. Сравнивая затем результат, полученный для рассматриваемого простейшего случая, с общими теоремами п. 24 или п. 26 (в нашем случае с теоремой 0.1. — *А. Х., М. Б.*), можем признать дополнительные ограничения (т. е. условие $\varphi(x) \in C^3[0,\pi]$. — *А. Х., М. Б.*), которые несомненно должны возникать при общей постановке вопроса и которые действительно имеются в этих теоремах, сравнительно незначительными и устранимыми лишь в частных наиболее простых случаях, подобно указанному в предыдущем пункте» (т. е. задача (0.6)–(0.8). — *А. Х., М. Б.*)

Таким образом, В. А. Стеклов здесь опять обращает внимание на то, что ослабление условий на исходные данные при использовании метода Фурье в общем случае является трудной проблемой.

Теперь приступим к более тщательному рассмотрению этого вопроса и с этой целью обратимся к книге крупнейшего ученого (кораблестроителя, математика и механика) А. Н. Крылова «О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах». Впервые эта книга вышла в 1913 г. и с той поры много раз переиздавалась без существенных изменений (5-е изд. — в 1950 г., уже после смерти А. Н. Крылова). В предисловии к пятому изданию В. И. Смирнов написал: «До настоящего времени книга А. Н. Крылова представляет единственное большое руководство по математической физике первой половины XIX века, а с другой стороны, большое внимание уделено приложениям методов математической физики к конкретным практически важным техническим задачам» [8, с. 6]. В этой книге есть очень интересная глава (гл. VI), посвященная улучшению сходимости рядов Фурье и им подобных.

Прием А. Н. Крылова продемонстрируем на примере ряда Фурье:

$$\Sigma = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx, \qquad x \in [0,\pi], \tag{0.11}$$

и исследуем вопрос о гладкости суммы этого ряда. В общем случае при отсутствии информации, кроме той, что a_n есть коэффициенты Фурье, ничего сказать нельзя. Если нам известно, что исходная функция гладкая, кусочно-гладкая и т. п., то можно получить интегрированием по частям асимптотику коэффициентов Фурье, причем главные части асимптотики получаются за счет точек разрыва функции, следующие — за счет разрыва производных и т. д.

Рассмотрим обратную задачу: по асимптотике коэффициентов Фурье получить информацию о гладкости функции.

Пусть, например, $a_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{\alpha_n}{n^2}$, где через α_n обозначены любые числа, удовлетворяющие условию $\sum |\alpha_n|^2 < \infty$. Если ничего не делать с рядом (0.11), то ничего нельзя сказать и о гладкости его суммы. Разобьем теперь ряд на два ряда:

$$\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2,$$

где

$$\Sigma_1 = \sum \frac{1}{n} \sin nx, \qquad \Sigma_2 = \sum \frac{\alpha_n}{n^2} \sin nx.$$

Тогда можно утверждать следующее: ряд Σ_2 и соответствующий ему почленно дифференцированный ряд сходятся абсолютно и равномерно (из-за сходимости ряда $\sum \dfrac{\alpha_n}{n}$ по неравенству Коши–Буняковского); ряд же Σ_1 имеет сумму, равную $\pi - x$ при $x \in [0,\pi]$. Значит, мы получаем информацию о гладкости суммы ряда (0.11) без его почленного дифференцирования. Если же $a_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{\alpha_n}{n^3}$, то получаем информацию о гладкости производной от суммы ряда и т. д.

Таким образом, мы сумели узнать информацию о гладкости ряда (0.11) путем его расщепления на два, один из которых точно вычисляется, а другой можно почленно дифференцировать нужное число раз (эта процедура немного напоминает нам решение задачи (0.6)–(0.8), когда мы разбивали ряд (0.9) на два). О данном способе А. Н. Крылов сказал следующее: «Этого приема я не встречал ни в руководствах, ни в литературе, хотя, по его простоте и очевидности, я не смею утверждать, что он является новым» ([8, с. 9]). С помощью этого приема он дал, в частности, хорошее качественное исследование рядов в случае вынужденных колебаний. Еще слова А. Н. Крылова: «Этот прием не только дает практическую возможность с удобством пользоваться такими рядами в приложениях, получая желаемую степень точности, взяв самое ограниченное число $(3-5)$ членов преобразованного ряда, но часто приводит к представлению суммы предложенного ряда в замкнутой форме под видом разрывной функции. Этот же прием дает возможность находить производные от функций, представленных такими рядами Фурье, почленное дифференцирование которых недопустимо» ([8, с. 9]). И еще ([8, с. 227]): «Изложенный прием усиления быстроты сходимости рядов Фурье и нахождения производных от функций, ими представляемых, может служить для доказательства или проверки того, что представляемая рядом функция действительно удовлетворяет тому дифференциальному уравнению, как решение коего она найдена, хотя бы самый ряд и нельзя было дифференцировать почленно требуемое число раз. Предлагается в виде задачи сделать такую проверку для величины u, данной на с. 170 и представляющей решение задачи о колебании струны». Об ускорении сходимости рядов Фурье сказано также в [9]. Отметим еще роль данного метода в вычислительной математике (см. [10, 11]).

В исследованиях метода Фурье можно сказать, что прием А. Н. Крылова является ключом к изучению смешанной задачи. В самом деле, формальное разложение решения по методу Фурье включает и собственные значения, и собственные функции соответствующих спектральных задач. Используя асимптотику собственных значений и собственных функций, можно попытаться вместо почленного дифференцирования формальных разложений разбить их на части, такие, что одни, более простые по структуре, но медленно сходящиеся, можно изучать, минуя почленное дифференцирование, а другие, быстро убывающие, уже можно изучать, используя почленное дифференцирование.

Лишь в 80-х гг. прошлого века В. А. Чернятин [7, 12–17] предпринял такую попытку изучения формальных разложений по методу Фурье и успешно изучил ряд смешанных задач. В результате требования гладкости исходных данных уже становятся минимальными.

Заметим, что указанная выше идея просматривается уже в задаче (0.6)–(0.8) колебания струны. Именно, исходя из формального решения (это не ряд Фурье) мы представляем его в виде суммы двух рядов Фурье с коэффициентами, выражающимися через исходные данные, и нужную информацию о гладкости мы получаем из структуры решения, не прибегая к почленному дифференцированию формального ряда.

В. А. Чернятин же в случае волнового уравнения представлял формальное решение в виде суммы двух рядов, один из которых допускает почленное дифференцирование два раза (идея ускорения сходимости), а другой можно представить в виде суммы двух рядов Фурье, которые можно вычислить явно, и поэтому отсюда, как и в случае уравнения струны, мы получим нужную информацию. Разумеется, во всех вопросах, связанных с методом Фурье, важная роль, которую впервые понял В. А. Стеклов, принадлежит замкнутости как тригонометрической системы, так и системы собственных функций.

Тем самым результаты В. А. Стеклова, А. Н. Крылова и В. А. Чернятина являются крупным вкладом в развитие метода Фурье. Они поднимают метод Фурье на новую высоту, предельно расширяя границы его применения (т. е. при минимальных условиях на исходные данные) и ставят много интересных и очень важных вопросов и в теории функций, и в краевых задачах в частных производных. Разумеется, достижение новых успехов в данном направлении связано с большими трудностями, и оно делает метод Фурье еще более привлекательным для исследований.

Остановимся на содержании статьи.

В параграфе 1 приводится новое краткое доказательство замечательной теоремы В. А. Чернятина о классическом решении по методу Фурье смешанной задачи (0.1)–(0.3) (для простоты берем $\psi(x) \equiv 0$) при естественных минимальных условиях на $\varphi(x)$. В параграфе 2 без доказательств приводятся другие результаты В. А. Чернятина. В параграфе 3 рассматривается смешанная задача для уравнения первого порядка с инволюцией. Приведем простейший пример такого уравнения:

$$\frac{1}{i}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \left.\frac{\partial u(\xi,t)}{\partial \xi}\right|_{\xi=1-x} + q(x)u\,(x,t)\,, \tag{0.12}$$

где $x \in [0,1]$, $t \in (-\infty,\infty)$. Уравнения с инволюцией имеют давнюю историю и активно исследуются в настоящее время [18–29].

Если $q(x) \equiv 0$, то уравнение (0.12) есть один из корней квадратных (в смысле дифференцирования) из уравнения струны. В самом деле, если $u(x,t)$ удовлетворяет (0.12), то

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(i\,\frac{\partial u(1-x,t)}{\partial(1-x)}\right) =$$
$$= i\frac{\partial}{\partial(1-x)}\left(\frac{\partial u(1-x,t)}{\partial t}\right) = i^2\frac{\partial}{\partial(1-x)}\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}.$$

Уравнение (0.12) есть простейшее уравнение первого порядка с инволюцией. При решении смешанных задач для таких уравнений по методу Фурье спектральная задача сводится к системе Дирака, т. е. вместо уравнения Штурма – Лиувилля нам приходится связываться с системой Дирака. Спектральная задача для уравнения (0.12) интересна и своими приложениями к задаче на собственные значения для интегральных уравнений [21, 23, 24]. Так же, как и в параграфе 1, мы для одного самого простого (но лишь по форме) случая приводим подробные доказательства. В параграфе 4 приводятся без доказательства другие результаты по смешанным задачам с инволюцией [30–34].

Введение и параграфы 1, 2 написаны А. П. Хромовым, параграфы 3, 4 — М. Ш. Бурлуцкой и А. П. Хромовым.

1. ТЕОРЕМА В. А. ЧЕРНЯТИНА

Рассмотрим следующую смешанную задачу:

$$u_{tt(x,t)} = u_{xx}(x,t) - q(x)u(x,t), \tag{1.1}$$
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \tag{1.2}$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = 0, \tag{1.3}$$

где $q(x) \in C[0,\pi]$ и вещественна.

Под классическим решением задачи (1.1)–(1.3) понимаем функцию $u(x,t)$, дважды непрерывно дифференцируемую по x и t при $x \in [0,\pi]$, $t \in (-\infty,+\infty)$ и удовлетворяющую (1.1)–(1.3).

Естественные минимальные требования на $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) \in C^2[0,\pi], \qquad \varphi(0) = \varphi(\pi) = \varphi''(0) = \varphi''(\pi) = 0 \tag{1.4}$$

(условия $\varphi''(0) = \varphi''(\pi) = 0$ следуют из (1.1)).

Будем искать классическое решение задачи (1.1)–(1.3) по методу Фурье при условиях (1.4). Формальное решение по методу Фурье есть:

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}(R_\lambda\varphi)(x)\cos\sqrt{\lambda}t\,d\lambda + \sum_{|\lambda_n|>r}(\varphi,\varphi_n)\,\varphi_n(x)\cos\sqrt{\lambda_n}t, \tag{1.5}$$

где R_λ — резольвента оператора L: $Ly = -y'' + q(x)y$, $y(0) = y(\pi) = 0$, λ_n — собственные значения оператора L, а $\varphi_n(x)$ — соответствующие собственные функции, для которых $\|\varphi_n\| = 1$ ($\|\cdot\|$ — норма в $L_2[0,\pi]$), $r > 0$ фиксировано. Появление интеграла в (1.5) вызвано тем, что нумерация собственных значений λ_n привязана к их асимптотике, и потому некоторое конечное число собственных значений с малыми модулями не занумеровано.

1.1. Асимптотика собственных значений и собственных функций

Оператор L самосопряженный, и для λ_n имеет место [35, с. 71].

Теорема 1.1. *Все λ_n вещественные, достаточно большие по модулю простые и для них справедлива асимптотика*

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n}, \qquad n = n_0, n_0+1, \ldots\ . \tag{1.6}$$

Здесь и в дальнейшем одними и теми же обозначениями, α и α_n, будем обозначать произвольные числа (в том числе и комплексные), лишь бы $\sum|\alpha_n|^2 < \infty$.

Замечание. Грубая асимптотика

$$\sqrt{\lambda_n} = n + O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{1.7}$$

хорошо известна.

Займемся асимптотикой собственных функций. Воспользуемся оператором преобразования [35, с. 17, 23]: для решения $y(x,\mu)$ уравнения

$$y'' - q(x)y + \mu^2 y = 0 \tag{1.8}$$

с условиями $y(0,\mu) = 0$, $y'(0,\mu) = \mu$ имеет место формула

$$y(x,\mu) = \sin \mu x + \int\limits_0^x K(x,t) \sin \mu t \, dt, \tag{1.9}$$

где $K(x,t)$ непрерывно дифференцируема по x и t и $K(x,0) = 0$.

Теорема 1.2. *Если $\mu_n = \sqrt{\lambda_n}$ из (1.6), то*

$$y(x,\mu_n) = \sin nx + \frac{r(x)}{n} \cos nx + \frac{1}{n} \int\limits_0^x K_t(x,t) \cos nt \, dt + O\left(\frac{\alpha_n}{n}\right), \tag{1.10}$$

где $r(x) \in C[0,\pi]$ и оценка $O(\cdot)$ равномерна по x.

Доказательство. Имеем:

$$\sin \mu_n x = \sin nx + \gamma_n x \cos nx + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \tag{1.11}$$

где $\gamma_n = \frac{1}{n}(\alpha + \alpha_n)$. Далее

$$\int\limits_0^x K(x,t) \sin \mu_n t \, dt = \int\limits_0^x K(x,t) \sin nt \, dt + \gamma_n \int\limits_0^x K(x,t) t \cos nt \, dt + O\left(\frac{1}{n^2}\right) =$$

$$= \int\limits_0^x K(x,t) \sin nt \, dt + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{\cos nx}{n} K(x,x) + \frac{1}{n} \int\limits_0^x K_t(x,t) \cos nt \, dt + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{1.12}$$

Из (1.11) и (1.12) следует (1.10). □

Этот результат нам нужен лишь для следующей очевидной в силу теоремы 1.2 леммы.

Лемма 1.1. *Если $f(x) \in C[0,1]$, то*

$$(f, y(x,\mu_n)) = (f, \sin nx) + \frac{\alpha_n}{n}. \tag{1.13}$$

Лемма 1.2. *Имеют место асимптотические формулы:*

$$y(x,\mu_n) = \sin nx + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad y'(x,\mu_n) = n \cos nx + O(1), \quad y''(x,\mu_n) = -n^2 \sin nx + O(n).$$

Этот результат легко следует из (1.7) и (1.9). Не требуется уточненных формул для собственных значений и собственных функций.

Лемма 1.3. *Имеют место асимптотические формулы:*

$$\cos \mu_n t = \cos nt + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad \frac{d}{dt}(\cos \mu_n t) = -n \sin nt + O(1), \quad \frac{d^2}{dt^2}(\cos \mu_n t) = -n^2 \cos nt + O(n),$$

где оценки $O(\cdot)$ равномерны по $t \in [-T,T]$ при любом фиксированном $T > 0$.

Эта лемма легко следует из (1.7).

1.2. Преобразование формального ряда (1.5)

По условиям (1.4) $\varphi(x) \in D_L$ (области определения оператора L). Тогда

$$(\varphi, \varphi_n) = \frac{1}{\lambda_n}(\varphi, L\varphi_n) = \frac{1}{\lambda_n}(L\varphi, \varphi_n) = \frac{1}{\lambda_n}(g, \varphi_n),$$

где $g(x) = L\varphi(x) = -\varphi''(x) + q(x)\varphi(x)$. Тогда ряд в (1.5), который впредь будем обозначать Σ, имеет вид

$$\Sigma = \sum \frac{1}{\lambda_n}(g, \varphi_n)\varphi_n(x)\cos\sqrt{\lambda_n}t \tag{1.14}$$

(для краткости $|\lambda_n| > r$ в знаке суммы справа опускаем).

Лемма 1.4. *Имеет место асимптотика*

$$\frac{1}{\lambda_n}(g, \varphi_n) = \frac{(g, \varphi_n^0)}{n^2} + \frac{\alpha_n}{n^3}, \tag{1.15}$$

где $\varphi_n^0(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\sin nx.$

Доказательство. По лемме 1.2

$$\|y(x, \mu_n)\| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right],$$

и так как $\varphi_n(x) = \dfrac{y(x,\mu_n)}{\|y(x,\mu_n)\|}$, то по лемме 1.1 получаем (1.15). □

Из леммы 1.4 следует

Лемма 1.5. *Имеет место представление*

$$\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2, \tag{1.16}$$

где

$$\Sigma_1 = \sum \frac{(g, \varphi_n^0)}{n^2}\varphi_n(x)\cos\sqrt{\lambda_n}\,t, \qquad \Sigma_2 = \sum \frac{\alpha_n}{n^3}\varphi_n(x)\cos\sqrt{\lambda_n}\,t.$$

Лемма 1.6. *Имеет место представление*

$$\Sigma_1 = \Sigma_3 + \Sigma_4, \tag{1.17}$$

где $\Sigma_3 = \dfrac{2}{\pi}\sum\dfrac{(g, \sin nx)}{n^2}\sin nx\cos nt$, $\Sigma_4 = \sum a_n(x,t)$, $a_n(x,t) = \dfrac{(g,\varphi_n^0)}{n^2}[\varphi_n(x)\cos\sqrt{\lambda_n}\,t - \varphi_n^0(x)\cos nt]$.

Лемма 1.7. *Ряды Σ_2, Σ_4 и ряды, получающиеся из них почленным дифференцированием два раза по x и t, сходятся абсолютно и равномерно по $x \in [0,1]$ и $t \in [T,T]$, где T — любое фиксированное положительное число.*

Доказательство. Заключение о ряде Σ_2 получаем из оценок

$$\varphi_n^{(s)}(x) = O(n^s), \qquad \frac{d^s}{dt^s}\cos\sqrt{\lambda_n}\,t = O(n^s), \qquad s = 0,1,2,$$

легко следуемых из лемм 1.2 и 1.3 и абсолютной сходимости ряда $\sum\alpha_n/n$ по неравенству Коши – Буняковского. Обратимся к ряду Σ_4. Представим

$$a_n(x,t) = a_{1,n}(x,t) + a_{2,n}(x,t), \tag{1.18}$$

где

$$a_{1,n}(x,t) = \frac{(g,\varphi_n^0)}{n^2}[\varphi_n(x) - \varphi_n^0(x)]\cos\sqrt{\lambda_n}\,t,$$
$$a_{2,n}(x,t) = \frac{(g,\varphi_n^0)}{n^2}\varphi_n^0(x)[\cos\sqrt{\lambda_n}\,t - \cos nt].$$

В силу лемм 1.2 и 1.3 имеем оценки

$$\frac{d^s}{dx^s}a_{j,n}(x,t) = O\left(\frac{\alpha_n}{n^2}n^{-1+s}\right), \quad j = 1,2, \quad s = 0,1,2,$$

и утверждение леммы для Σ_4 получаем так же, как и для ряда Σ_2. □

Лемма 1.8. *Ряд* $u_0(x,t) = \dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(g,\sin nx)}{n^2}\sin nx\cos nt$ *является классическим решением задачи* (0.6)–(0.8)*, когда вместо* $\varphi(x)$ *берется* $\varphi_1(x) = L_0^{-1}g$*, где* L_0 *есть* L *при* $q(x)\equiv 0$.

Доказательство. Имеем $\dfrac{1}{n^2}\sin nx = L_0^{-1}(\sin nx)$, и тогда наш ряд есть

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_1,\sin nx)\sin nx\cos nt. \tag{1.19}$$

Так как

$$\varphi_1(x) = L_0^{-1}g = -\int\limits_0^x (x-t)g(t)\,dt + \frac{x}{\pi}\int\limits_0^\pi(\pi-t)g(t)\,dt,$$

то $\varphi_1(x)$ удовлетворяет условиям (1.4) и поэтому $u_0(x,t)$, равное (1.19), есть классическое решение задачи (0.6)–(0.8) для уравнения струны при $\varphi(x)$, равной $\varphi_1(x)$. □

Лемма 1.9. *Для формального решения* (1.5) *имеет место формула*

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t), \tag{1.20}$$

где $u_0(x,t)$ *из леммы 1.8,*

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}(R_\lambda\varphi)(x)\cos\sqrt{\lambda}\,t\,d\lambda - \frac{2}{\pi}\sum_{n^2\le r}\frac{(g,\sin nx)}{n^2}\sin nx\cos nt,$$

$$u_2(x,t) = \sum_{|\lambda_n|>r}\left[\frac{1}{\lambda_n}(g,\varphi_n)\,\varphi_n(x)\cos\sqrt{\lambda_n}\,t - \frac{(g,\varphi_n^0)}{n^2}\,\varphi_n^0(x)\cos nt\right].$$

Утверждение леммы следует из (1.14), если учесть, что $\Sigma_2+\Sigma_4$ есть $u_2(x,t)$.

Таким образом, (1.20) и есть реализация рекомендаций А. Н. Крылова по усилению быстроты сходимости рядов Фурье и им подобных: ряд $u_2(x,t)$ имеет ускоренную сходимость, и его можно почленно дифференцировать два раза, $u_0(x,t)$ дважды дифференцируема по x и t как решение уравнения струны, $u_1(x,t)$ дважды дифференцируемая как конечная сумма. Тем самым решен важный вопрос о гладкости формального решения при минимальных условиях на $\varphi(x)$.

1.3. Классическое решение смешанной задачи

Завершаем доказательство следующего замечательного результата В. А. Чернятина.

Теорема 1.3. *Формальное решение* (1.5) *есть классическое решение смешанной задачи* (1.1)–(1.3) *при минимальных условиях* (1.4) *на* $\varphi(x)$.

Доказательство. В том, что $u(x,t)$ удовлетворяет граничным и начальным условиям, убеждаемся тривиально, поскольку ряд (1.5) в силу (1.14) один раз по x и t можно законно почленно дифференцировать, не прибегая к процедуре ускорения сходимости. Далее, в силу (1.20) $u(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируема. Докажем, что $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1.1). Обозначим через M оператор $M = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$. Тогда по лемме 1.8

$$Mu_0 = 0. \tag{1.21}$$

Далее, имеем:

$$Mu_1 = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} M\left((R_\lambda\varphi)\cos\sqrt{\lambda}\,t\right)\,d\lambda. \tag{1.22}$$

Но

$$M\left((R_\lambda\varphi)\cos\sqrt{\lambda}\,t\right) = q(x)\varphi(x)\cos\sqrt{\lambda}\,t - q(x)(R_\lambda\varphi)\cos\sqrt{\lambda}\,t.$$

Поэтому из (1.22) получаем:

$$Mu_1 = \frac{q(x)}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}(R_\lambda\varphi)\cos\sqrt{\lambda}\,t\,dt. \tag{1.23}$$

Далее, в силу ускоренной сходимости ряда $u_2(x,t)$ имеем:

$$Mu_2 = \sum_{|\lambda_n|>r} Mv_n,$$

где v_n — общий член ряда $u_2(x,t)$. Имеем

$$Mv_n = \frac{1}{\lambda_n}(g,\varphi_n)\,M\left(\varphi_n(x)\cos\sqrt{\lambda_n}\,t\right) = \frac{1}{\lambda_n}(g,\varphi_n)\left(-q(x)\varphi_n(x)\cos\sqrt{\lambda_n}\,t\right),$$

и, значит, $Mu_2 = -q(x)u_2$. Теорема доказана. □

Замечание. Если брать $u_t(x,0)=\psi(x)$ вместо $u_t(x,0)=0$, то надо требовать, чтобы $\psi(x)\in C^1[0,\pi]$ и $\psi(0)=\psi(\pi)=0$.

2. ДРУГИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ В. А. ЧЕРНЯТИНА

Приведем другие результаты В. А. Чернятина [7], полученные методом Фурье с привлечением идей А. Н. Крылова.

2.1. Неоднородная смешанная задача:

$$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) - q(x)u(x,t) + f(x,t), \tag{2.1}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \qquad t\in[0,T], \tag{2.2}$$

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0. \tag{2.3}$$

Предполагаем, что $q(x)\in C^2[0,\pi]$ и вещественна, $f(x,t)\in C^{2,0}(\overline{Q})$, $f(0,t)=f(\pi,t)=0$, $t\in[0,T]$, $\overline{Q}=\{(x,t)\,|\,x\in[0,\pi], t\in[0,T]\}$.

Теорема 2.1. *При указанных условиях классическое решение задачи* (2.1)–(2.3) *существует и имеет вид*

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{y_n(x)}{\omega_n}\int_0^t F_n(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau,$$

$F_n(\tau)=\int_0^\pi f(x,\tau)y_n(x)\,dx$, *где везде в этом параграфе* $y_n(x)$ *нормированная собственная функция для собственного значения* ω_n^2 *оператора* L: $Ly=-y''+q(x)y$, $y(0)=y(\pi)=0$.

В [7] приведен и более сильный результат, который не приводим из-за громоздкости.

2.2. Смешанная задача для уравнения Шредингера:

$$iu_t(x,t) = -u_{xx}(x,t) + q(x)u(x,t), \tag{2.4}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \qquad t\in[0,T], \tag{2.5}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad x\in[0,\pi]. \tag{2.6}$$

Считаем, что $q(x)\in C[0,\pi]$ и вещественна, $\varphi(x)\in C^2[0,\pi]$, $\varphi(0)=\varphi(\pi)=\varphi''(0)=\varphi''(\pi)=0$.

Теорема 2.2. *Существует хотя бы одна пара* $q(x)$, $\varphi(x)$, *для которой смешанная задача* (2.4)–(2.6) *не имеет классического решения.*

Теорема 2.3. *Для существования классического решения задачи* (2.4)–(2.6) *достаточно дополнительно потребовать сходимости ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\vartheta_n e^{-in^2t}\sin nx,$$

где $\vartheta_n=(\varphi(x)q(x)-\varphi''(x),\sin nx)$ *к функции класса* $C(\overline{Q})$ *в метрике* $L^2(Q)$. *Это решение имеет вид*

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n e^{-i\omega_n^2 t}y_n(x),$$

где $\Phi_n=(\varphi,y_n)$.

Также в [7] есть и более сильный результат.

2.3. Смешанная задача для уравнения теплопроводности:

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) - q(x)u(x,t) + f(x,t), \tag{2.7}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \qquad t \in [0,T], \tag{2.8}$$

$$u(x,0) = 0, \qquad x \in [0,\pi]. \tag{2.9}$$

Предполагаем, что $q(x) \in C[0,\pi]$ и вещественна, $f(x,t) \in C(\overline{Q})$, и выполняется условие Гельдера $|f(x,t') - f(x,t)| \le B|t'-t|^{\alpha}$, $t', t \in [0,T]$, $1/2 \le \alpha \le 1$, и B не зависит от $x \in [0,\pi]$.

Теорема 2.4. *При указанных условиях смешанная задача* (2.7)–(2.9) *имеет классическое решение, представимое в виде*

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x) \int_0^t F_n(\tau) e^{-\omega_n^2(t-\tau)} d\tau,$$

где $F_n(\tau)$ те же, что и в п. 2.1.

3. СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

В этом параграфе рассмотрим следующую смешанную задачу:

$$\frac{1}{\beta i}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial u(\xi,t)}{\partial \xi}\Big|_{\xi=1-x} + q(x)u(x,t), \quad x \in [0,1], \quad t \in (-\infty,+\infty), \tag{3.1}$$

$$u(0,t) = 0, \qquad u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in [0,1], \tag{3.2}$$

где β — вещественное число, $\beta \ne 0$, $q(x) \in C^1[0,1]$ и вещественна, $\varphi(x)$ удовлетворяет естественным условиям для классического решения:

$$\varphi(x) \in C^1[0,1], \quad \varphi(0) = \varphi'(1) = 0. \tag{3.3}$$

Решение ищется в классе функций, непрерывно дифференцируемых по обеим переменным в полосе $[0,1] \times (-\infty,+\infty)$.

3.1. Случай симметрического потенциала

Это случай [30], когда

$$q(x) = q(1-x), \tag{3.4}$$

и здесь можно брать $q(x) \in C[0,1]$.

Получим явную формулу для классического решения, напоминающую формулу решения уравнения струны.

Спектральная задача по методу Фурье есть

$$y'(1-x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \tag{3.5}$$

$$y(0) = 0. \tag{3.6}$$

Найдем решение задачи (3.5)–(3.6). Выполняя в (3.5) замену x на $1-x$ и полагая $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T$, где $z_1(x) = y(x)$, $z_2(x) = y(1-x)$ (T — знак транспонирования), получим следующую систему уравнений относительно $z(x)$:

$$Bz'(x) + P(x)z(x) = \lambda z(x), \tag{3.7}$$

где $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $P(x) = \operatorname{diag}(q(x), q(1-x)) = \operatorname{diag}(q(x), q(x))$.

Верно и обратное: если $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T$ — решение (3.7) и $z_1(x) = z_2(1-x)$, то $y(x) = z_1(x)$ есть решение уравнения (3.5).

Лемма 3.1. *Общее решение системы* (3.7) *имеет вид*

$$z(x) = z(x,\lambda) = \Gamma V(x,\lambda)c, \tag{3.8}$$

где $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$, $V(x,\lambda) = \mathrm{diag}\,\left(u_1(x)e^{-\lambda ix}, u_2(x)e^{\lambda ix}\right)$, $u_1(x) = \exp\left(i\int_0^x q(t)\,dt\right)$, $u_2(x) = \exp\left(-i\int_0^x q(t)\,dt\right)$, $c = (c_1, c_2)^T$, c_k — *произвольные постоянные.*

Доказательство. Выполним в (3.7) замену $z = \Gamma v$. Получим:

$$v_1'(x) - iq(x)v_1(x) = -\lambda i v_1(x), \qquad v_2'(x) + iq(x)v_2(x) = \lambda i v_2(x).$$

Отсюда

$$v_1(x) = v_1(x,\lambda) = c_1 u_1(x)e^{-\lambda ix}, \qquad v_2(x) = v_2(x,\lambda) = c_2 u_2(x)e^{\lambda ix}.$$

□

Лемма 3.2. *Общее решение уравнения* (3.5) *имеет вид*

$$y(x) = y(x,\lambda) = c\varphi(x,\lambda), \tag{3.9}$$

где $\varphi(x,\lambda) = u_1(x)e^{-i\int\limits_0^1 q(t)\,dt}e^{\lambda i(1-x)} - iu_2(x)e^{\lambda ix}$, c — *произвольная постоянная.*

Доказательство. Как было показано выше, функция $y(x) = z_1(x)$ является решением (3.5), если $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T$ удовлетворяет (3.7) и $z_1(x) = z_2(1-x)$. Отсюда, в частности, получаем условие $z_1(0) = z_2(1)$, откуда по лемме 3.1 получаем $c_1 = c_2 u_2(1)e^{\lambda i}$. Тогда

$$y(x) = z_1(x) = c_1 u_1(x)e^{-\lambda ix} - ic_2 u_2(x)e^{\lambda ix} = c_2\varphi(x,\lambda),$$

что доказывает (3.9). □

Лемма 3.3. *Собственные значения краевой задачи* (3.5)–(3.6) *есть*

$$\lambda_n = 2\pi n + a, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{3.10}$$

где $a = \dfrac{\pi}{2} + \int\limits_0^1 q(t)\,dt$, *а соответствующие собственные функции имеют вид*

$$y_n(x) = p(1-x)e^{2\pi ni(1-x)} - ip(x)e^{2\pi nix}, \tag{3.11}$$

где $p(x) = u_2(x)e^{aix}$.

Доказательство. Согласно (3.6) и (3.9) для собственных значений имеем уравнение $\varphi(0,\lambda) = 0$, корни которого есть (3.10).

Найдем собственные функции $y_n(x) = \varphi(x,\lambda_n)$. Из условия $q(x) = q(1-x)$ получаем $u_1(x) = e^{ia}u_2(1-x)$. Поэтому

$$y_n(x) = u_2(1-x)e^{ia(1-x)}e^{2\pi ni(1-x)} - iu_2(x)e^{aix}e^{2\pi nix},$$

откуда следует (3.11). □

Исследуем свойства системы $y_n(x)$.

Лемма 3.4. *Функции* $y_n(x)$ $(n \in \mathbb{Z})$ *образуют ортогональную систему, полную в* $L_2[0,1]$.

Доказательство. Обозначим через L оператор

$$Ly = y'(1-x) + q(x)y(x), \quad y(0) = 0,$$

собственными функциями которого являются $y_n(x)$. Так как $L = L^*$, то $y_n(x)$ ортогональны.

Докажем полноту. Пусть $f \in L_2[0,1]$ и f ортогональна y_n, $n \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$(y_n, f) = \int_0^1 \left[\overline{f(1-x)} - i\overline{f(x)}\right] p(x)e^{2\pi nix}\,dx = 0.$$

Отсюда имеем:

$$f(1-x) + if(x) \equiv 0, \qquad x \in [0,1].$$

Значит, $f(x) = 0$ почти всюду. □

Замечание. Из леммы 3.4 следует, что собственные значения (3.10) однократны.

Лемма 3.5. *Пусть* $y_n^0(x) = y_n(x)/\|y_n\|$ ($\|\cdot\|$ — *норма в* $L_2[0,1]$). *Тогда* $y_n^0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,y_n(x)$.

Доказательство. Имеем:

$$\|y_n\|^2 = \int_0^1 y_n(x)\overline{y_n(x)}\,dx = \int_0^1 p(1-x)\overline{p(1-x)}\,dx + \int_0^1 p(x)\overline{p(x)}\,dx +$$
$$+i\int_0^1 p(1-x)\overline{p(x)}e^{-4\pi nix}\,dx - i\int_0^1 p(x)\overline{p(1-x)}e^{4\pi nix}\,dx = 2\int_0^1 |p(x)|^2\,dx = 2.$$

Лемма 3.6. *Если $f(x) \in D_L$ (D_L — область определения оператора L в пространстве $L_2[0,1]$), то ее ряд Фурье по системе $\{y_n(x)\}$ сходится абсолютно и равномерно на $[0,1]$.*

Доказательство. Ряд Фурье функции $f(x)$ по системе $\{y_n(x)\}$ есть

$$\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty}(f,y_n)y_n(x) = \sum_{-\infty}^{\infty}(f,y_n^0)y_n^0(x).$$

Пусть вещественное число μ_0 не является собственным значением оператора L. Положим $(L-\mu_0 E)f = g$ (E — единичный оператор). Тогда $f = R_{\mu_0}g$, где R_λ есть резольвента оператора L. Так как $y_n^0 = (\lambda_n - \mu_0)R_{\mu_0}y_n^0$, то

$$(f,y_n^0) = (R_{\mu_0}g, y_n^0) = (g, R_{\mu_0}y_n^0) = \frac{1}{\overline{\lambda_n} - \mu_0}\,(g,y_n^0).$$

Поэтому

$$\sum_{-\infty}^{\infty}(f,y_n^0)y_n^0(x) = \sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\overline{\lambda_n}-\mu_0}(g,y_n^0)y_n^0(x).$$

Так как $\dfrac{1}{\lambda_n-\mu_0} = O\left(\dfrac{1}{n}\right)$, а $\sum\limits_{-\infty}^{\infty}|(g,y_n^0)|^2 < \infty$, то утверждение леммы следует из неравенства Коши – Буняковского и равномерной ограниченности $y_n^0(x)$. □

Из леммы 3.6 следует, что ряд $\sum|c_n|$, где $c_n = (f,y_n^0)$, сходится. Поэтому функция

$$f_0(x) = \sum_{-\infty}^{\infty}c_n e^{2\pi nix}$$

непрерывна на $(-\infty,\infty)$ и периодическая с периодом 1.

Лемма 3.7. *Если $f(x)$ из леммы 3.6 есть $\varphi(x)$, то при $x\in[0,1]$ имеет место формула*

$$f_0(x) = \frac{1}{2p(x)}\left[i\varphi(x) + \varphi(1-x)\right]. \tag{3.12}$$

Доказательство. Согласно лемме 3.6 при $x\in[0,1]$ имеем:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}(\varphi,y_n)y_n(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}c_n y_n(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}c_n\left[p(1-x)e^{2\pi ni(1-x)} - ip(x)e^{2\pi nix}\right],$$

откуда

$$\varphi(x) = p(1-x)f_0(1-x) - ip(x)f_0(x). \tag{3.13}$$

Отсюда

$$\varphi(1-x) = p(x)f_0(x) - ip(1-x)f_0(1-x). \tag{3.14}$$

Из (3.13) и (3.14) получаем:

$$i\varphi(x) + \varphi(1-x) = 2p(x)f_0(x). \tag{3.15}$$

Из (3.15) следует (3.12). □

Замечание. Функция $f_0(x)$ в силу своей периодичности однозначно определяется на всей оси заданием ее лишь на отрезке $[0,1]$. Таким образом, $f_0(x)$ определяется не рядом, а по формуле (3.12).

Лемма 3.8. *Если $\varphi(x)\in C^1[0,1]$, $\varphi(0) = \varphi'(1) = 0$, то $f_0(x)$ непрерывно дифференцируема на всей вещественной оси.*

Доказательство. Из (3.12) следует, что $f_0(x)$ непрерывно дифференцируема на $[0,1]$ (в концевых точках имеются в виду односторонние производные). В силу периодичности $f_0(x)$ непрерывно дифференцируема всюду на $(-\infty,+\infty)$, кроме точек $x=n$ (n – целое). Покажем, что $f_0'(n-0)=f_0'(n+0)$. В силу периодичности $f_0(x)$ достаточно установить, что

$$f_0'(0+0)=f_0'(0-0). \tag{3.16}$$

Дифференцируя (3.15), получим:

$$i\varphi'(x)-\varphi'(1-x)=2p'(x)f_0(x)+2p(x)f_0'(x). \tag{3.17}$$

Из (3.17), условия леммы и соотношений $f_0(0)=f_0(1)$, $f_0'(1-0)=f_0'(0-0)$ имеем:

$$2p'(0)f_0(0)+2p(0)f_0'(0+0)=i\varphi'(0), \qquad 2p'(1)f_0(0)+2p(1)f_0'(0-0)=-\varphi'(0),$$

откуда

$$2[p'(0)+ip'(1)]f_0(0)+2[p(0)f_0'(0+0)+ip(1)f_0'(0-0)]=0. \tag{3.18}$$

Так как $p(0)=1$, $p(1)=\exp\left(-i\int_0^1 q(t)\,dt\right)e^{ia}=e^{\pi i/2}=i$, $u_2'(x)=-iq(x)u_2(x)$, $p'(0)=-iq(0)+ia$, $p'(1)=q(1)-a$, а также $q(0)=q(1)$, то $p'(0)+ip'(1)=0$, и из (3.18) следует (3.16). □

Замечание. Условие $\varphi'(1)=0$ является естественным в силу дифференциального уравнения.

Согласно методу Фурье решение $u(x,t)$ задачи (3.1)–(3.2) представляется формальным рядом:

$$\sum_{-\infty}^{\infty}(\varphi,y_n^0)y_n^0(x)e^{\lambda_n\beta it}=\sum_{-\infty}^{\infty}c_ny_n(x)e^{\lambda_n\beta it}, \tag{3.19}$$

где $c_n=\frac{1}{2}(\varphi,y_n)$.

Лемма 3.9. *Ряд* (3.19) *сходится абсолютно и равномерно по* $x\in[0,1]$ *и* $t\in(-\infty,\infty)$, *и для его суммы имеет место формула*

$$\sum_{-\infty}^{\infty}c_ny_n(x)e^{\lambda_n\beta it}=e^{a\beta it}\big[p(1-x)f_0(1-x+\beta t)-ip(x)f_0(x+\beta t)\big], \tag{3.20}$$

где $p(x)=u_2(x)e^{iax}$.

Доказательство. Сходимость ряда (3.19) следует из леммы 3.6. Далее, имеем:

$$\sum_{-\infty}^{\infty}c_ny_n(x)e^{\lambda_n\beta it}=\sum_{-\infty}^{\infty}c_n\big[p(1-x)e^{2\pi ni(1-x)}-ip(x)e^{2\pi nix}\big]e^{\lambda_n\beta it}=$$
$$=e^{a\beta it}\Big[p(1-x)\sum_{-\infty}^{\infty}c_ne^{2\pi ni(1-x+\beta t)}-ip(x)\sum_{-\infty}^{\infty}c_ne^{2\pi ni(x+\beta t)}\Big],$$

откуда следует (3.20). □

Теорема 3.1. *Если* $\varphi(x)\in C^1[0,1]$, $\varphi(0)=\varphi'(1)=0$, $q(x)\in C[0,1]$, $q(x)=q(1-x)$, *то классическое решение задачи* (3.1)–(3.2) *существует и имеет вид*

$$u(x,t)=e^{a\beta it}\big[p(1-x)f_0(1-x+\beta t)-ip(x)f_0(x+\beta t)\big], \tag{3.21}$$

где $p(x)=\exp\left(aix-i\int\limits_0^x q(t)\,dt\right)$, $f_0(x)$ — *периодическая с периодом* 1 *функция, причем на отрезке* $[0,1]$

$$f_0(x)=\frac{1}{2p(x)}\big[i\varphi(x)+\varphi(1-x)\big]. \tag{3.22}$$

Доказательство. Как установлено выше, если функцию $f_0(x)$, заданную с помощью (3.22), продолжить периодически с периодом 1 на всю ось, то получим непрерывно дифференцируемую всюду функцию. Проверим теперь, что $u(x,t)$, заданная формулой (3.21), является решением смешанной задачи (3.1)–(3.2).

Сначала покажем, что $u(x,t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (3.1). Имеем:

$$\frac{1}{\beta i}u_t(x,t) = ae^{a\beta it}\big[p(1-x)f_0(1-x+\beta t) - ip(x)f_0(x+\beta t)\big]+$$
$$+\frac{1}{i}e^{a\beta it}\big[p(1-x)f_0'(1-x+\beta t) - ip(x)f_0'(x+\beta t)\big],$$
$$u_\xi(\xi,t)\Big|_{\xi=1-x} = e^{a\beta it}\big[-p'(1-\xi)f_0(1-\xi+\beta t) - p(1-\xi)f_0'(1-\xi+\beta t)-$$
$$-ip'(\xi)f_0(\xi+\beta t) - ip(\xi)f_0'(\xi+\beta t)\big]\Big|_{\xi=1-x} =$$
$$= e^{a\beta it}\big[-p'(x)f_0(x+\beta t) - p(x)f_0'(x+\beta t)-$$
$$-ip'(1-x)f_0(1-x+\beta t) - ip(1-x)f_0'(1-x+\beta t)\big].$$

Подставляя данные соотношения в (3.1), получим:

$$e^{a\beta it}\Big\{f_0(1-x+\beta t)\big[ap(1-x) + ip'(1-x) - p(1-x)q(x)\big]+$$
$$+f_0(x+\beta t)\big[-aip(x) + p'(x) + ip(x)q(x)\big]+$$
$$+f_0'(1-x+\beta t)\big[\frac{1}{i}p(1-x) + ip(1-x)\big]+f_0'(x+\beta t)\big[-p(x)+p(x)\big]\Big\}.$$

Последние две квадратные скобки равны нулю. Подставляя явные выражения для $p(x)$ и $p'(x)$, получим, что первая и вторая квадратные скобки также равны нулю, т. е. $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (3.1).

Далее, при $x \in [0,1]$ имеем:

$$u(x,0) = p(1-x)f_0(1-x) - ip(x)f_0(x) = \varphi(x),$$

Наконец,

$$u(0,t) = e^{a\beta it}\big[p(1)f_0(\beta t) - ip(0)f_0(\beta t)\big] = 0,$$

т. е. начальное и краевое условия выполнены. □

3.2. Общий случай [31]

3.2.1. Асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций задачи (3.5)–(3.6)

Приведем задачу (3.5)–(3.6) к задаче в пространстве вектор-функций размерности 2. Положим $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T$, где $z_1(x) = y(x)$, $z_2(x) = y(1-x)$. Тогда из уравнения в (3.5) получим векторно-матричное уравнение:

$$Bz'(x) + P(x)z(x) = \lambda z(x), \tag{3.23}$$

где $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $P(x) = \begin{pmatrix} q(x) & 0 \\ 0 & q(1-x) \end{pmatrix}$ и $z_1(x) = z_2(1-x)$. Более того, справедливо следующее утверждение.

Лемма 3.10. *Число λ является собственным значением, а $y(x)$ — собственной функцией краевой задачи* (3.5)–(3.6) *тогда и только тогда, когда $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T = (y(x), y(1-x))^T$, является ненулевым решением системы* (3.23) *с краевыми условиями:*

$$z_1(0) = 0, \quad z_1(1/2) = z_2(1/2). \tag{3.24}$$

Нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Лемма 3.11. *Пусть $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$, $H(x) = \operatorname{diag}(h_1(x), h_2(x))$, где $h_k(x) = e^{-\int_0^x p_k(t)\,dt}$, $k = 1,2$, $p_1(x) = -p_2(x) = -\frac{i}{2}[q(x) + q(1-x)]$. Замена $z(x) = \Gamma H(x)u(x)$, где $u = (u_1, u_2)^T$, приводит систему* (3.23) *к виду*

$$u'(x) + Q(x)u(x) = \lambda Du(x), \tag{3.25}$$

где $D = \operatorname{diag}(-i,i)$, $\quad Q(x) = \begin{pmatrix} 0 & q_2(x) \\ q_1(x) & 0 \end{pmatrix}$, $\quad q_1(x) = \frac{1}{2}[q(1-x)-q(x)]e^{i\left[\int_0^x q(t)\,dt + \int_{1-x}^1 q(t)\,dt\right]}$, $q_2(x) = \frac{1}{2}[q(1-x)-q(x)]e^{-i\left[\int_0^x q(t)\,dt + \int_{1-x}^1 q(t)\,dt\right]}$.

Замечание. Легко проверить, что функции $h_k(x)$ удовлетворяют соотношению

$$h_1(x) = e^{i\int_0^1 q(t)\,dt} h_2(1-x). \tag{3.26}$$

Для удобства обозначим в (3.25) $\mu = -\lambda i$. Тогда $\lambda D = \mu\widetilde{D}$, где $\widetilde{D} = \operatorname{diag}(1,-1)$ и уравнение (3.25) примет вид

$$u'(x) + Q(x)u(x) = \mu\widetilde{D}u(x). \tag{3.27}$$

Уравнение (3.27) представляет собой двумерное уравнение Дирака. Для общего решения этого уравнения известна следующая асимптотическая формула

$$u(x,\mu) = U(x,\mu)e^{\mu\widetilde{D}x}c, \tag{3.28}$$

где $U(x,\mu) = E + O\left(\mu^{-1}\right)$, E — единичная матрица 2×2, $c = (c_1,c_2)^T$ — произвольный вектор, матрица-функция $O\left(\mu^{-1}\right)$, регулярна[1] в полуплоскостях $\operatorname{Re}\mu \ge 0$ и $\operatorname{Re}\mu \le 0$ при $|\mu|$ достаточно больших.

Дадим уточнение асимптотических формул (3.28).

Теорема 3.2. *Если* $\operatorname{Re}\mu \ge 0$, $q_j(x) \in C^1[0,1]$, *то для общего решения уравнения* (3.27) *имеем следующую асимптотическую формулу:*

$$u(x,\mu) = U(x,\mu)e^{\mu\widetilde{D}x}c,$$

где $U(x,\mu) = (u_{ij}(x,\mu))_{i,j=1,2}$, $c = (c_1,c_2)^T$ *— произвольный вектор и*

$$u_{11}(x,\mu) = 1 + \frac{1}{2\mu}\int_0^x q_1(t)q_2(t)\,dt + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right),$$

$$u_{12}(x,\mu) = \frac{1}{2\mu}\left(q_2(x) - q_2(1)e^{-2\mu(1-x)} + \int_x^1 e^{2\mu(x-t)}q_2'(t)\,dt\right) + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right),$$

$$u_{21}(x,\mu) = -\frac{1}{2\mu}\left(q_1(x) - q_1(0)e^{-2\mu x} - \int_0^x e^{-2\mu(x-t)}q_1'(t)\,dt\right) + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right),$$

$$u_{22}(x,\mu) = 1 - \frac{1}{2\mu}\int_0^x q_1(t)q_2(t)\,dt + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right).$$

Доказательство. Представляя уравнение (3.27) в покомпонентном виде:

$$u_1'(x) - \mu u_1(x) = -q_2(x)u_2(x), \tag{3.29}$$

$$u_2'(x) + \mu u_2(x) = -q_1(x)u_1(x), \tag{3.30}$$

интегрируя (3.29) и (3.30) и выполняя замену $w_1(x) = u_1(x)e^{-\mu x}$, $w_2(x) = u_2(x)e^{\mu x}$, получим:

$$w_1(x) = c_1 - \int_0^x e^{-2\mu t}q_2(t)w_2(t)\,dt, \tag{3.31}$$

$$w_2(x) = c_2 - \int_0^x e^{2\mu t}q_1(t)w_1(t)\,dt. \tag{3.32}$$

[1]Под регулярностью понимается аналитичность функции внутри области и непрерывность на границе.

Выполним подстановку (3.32) в (3.31):

$$w_1(x) = c_1 - c_2 \int\limits_0^x e^{-2\mu t} q_2(t)\,dt + \int\limits_0^x e^{2\mu t} q_1(t) w_1(t)\,dt \int\limits_t^x e^{-2\mu\tau} q_2(\tau)\,d\tau. \tag{3.33}$$

Полагая $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ и учитывая, что

$$\int\limits_t^x e^{-2\mu\tau} q_2(\tau)\,d\tau = O\left(\mu^{-1} e^{-2\mu t}\right), \tag{3.34}$$

получим $w_1(x) = 1 + O\left(\mu^{-1}\right)$, и отсюда из (3.32) $w_2(x) = O\left(\mu^{-1} e^{2\mu x}\right)$.

Далее, положим $c_2 = 1$ и подставим (3.31) в (3.32). Тогда

$$w_2(x) = 1 - \varphi(x,\mu)\left[c_1 - \int\limits_0^x e^{-2\mu t} q_2(t) w_2(t)\,dt\right] + \int\limits_0^x e^{-2\mu t} q_2(t)\varphi(t,\mu)\,dt, \tag{3.35}$$

где $\varphi(x,\mu) = \int\limits_0^x e^{2\mu t} q_1(t)\,dt = O\left(\mu^{-1} e^{2\mu x}\right)$. Полагая $c_1 = \int\limits_0^1 e^{-2\mu t} q_2(t) w_2(t)\,dt$, получим из (3.35), что $w_2(x) = 1 + O\left(\mu^{-1}\right)$, а $w_1(x) = O\left(\mu^{-1} e^{-2\mu x}\right)$. Отсюда, в частности, легко следует (3.28).

Теперь дадим уточнение $w_1(x)$ и $w_2(x)$. В случае $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ обозначим $w_1(x) = w_{11}(x)$, $w_2(x) = w_{21}(x)$. Имеем:

$$\int\limits_t^x e^{-2\mu\tau} q_2(\tau)\,d\tau = -\frac{1}{2\mu} e^{-2\mu\tau} q_2(\tau)\Big|_t^x + \frac{1}{2\mu}\int\limits_t^x e^{-2\mu\tau} q_2'(\tau)\,d\tau.$$

Тогда, поставляя найденную асимптотику для $w_1(x) = w_{11}(x)$ в (3.33) при $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, получим:

$$w_{11}(x) = 1 - \int\limits_0^x e^{2\mu t} q_1(t)\,dt \int\limits_t^x e^{-2\mu\tau} q_2(\tau)\,d\tau + O\left(\mu^{-2}\right). \tag{3.36}$$

Так как

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^x e^{2\mu t} q_1(t)\,dt \int\limits_t^x e^{-2\mu\tau} q_2(\tau)\,d\tau = \\
&= \int\limits_0^x e^{2\mu t} q_1(t)\Big[-\frac{1}{2\mu} q_2(x) e^{-2\mu x} + \frac{1}{2\mu} q_2(t) e^{-2\mu t}\Big]\,dt + \int\limits_0^x e^{2\mu t} q_1(t)\,dt\,\frac{1}{2\mu}\int\limits_t^x e^{-2\mu\tau} q_2'(\tau)\,d\tau = \\
&= O\left(\mu^{-2}\right) + \frac{1}{2\mu}\int\limits_0^x q_1(t) q_2(t)\,dt + \frac{1}{2\mu}\int\limits_0^x e^{-2\mu\tau} q_2'(\tau)\,d\tau \int\limits_0^\tau e^{2\mu t} q_1(t)\,dt = \\
&= \frac{1}{2\mu}\int\limits_0^x q_1(t) q_2(t)\,dt + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right),
\end{aligned}$$

то из (3.36) получим:

$$w_{11}(x) = 1 - \frac{1}{2\mu}\int\limits_0^x q_1(t) q_2(t)\,dt + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right). \tag{3.37}$$

Подставим (3.37) в (3.31) при $c_2 = 0$. Тогда

$$w_2(x) = w_{21}(x) = -\int\limits_0^x e^{2\mu t} q_1(t)\,dt + O\left(\frac{1}{\mu^2} e^{2\mu x}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2\mu}\left[q_1(x)e^{2\mu x} - q_1(0) - \int\limits_0^x e^{2\mu t}q_1'(t)\,dt\right] + O\left(\frac{1}{\mu^2}e^{2\mu x}\right).$$

Аналогичные формулы получаются для $w_1(x) = w_{12}(x)$, $w_2(x) = w_{22}(x)$ при втором выборе c_1 и c_2. Образуем матрицу $W(x,\mu) = (w_{ij}(x))_1^2$. Тогда матрица $U(x,\mu) = e^{\mu Dx}W(x,\mu)e^{-\mu Dx}$ — искомая. □

Аналогичный результат может быть получен при $\operatorname{Re}\mu \le 0$.

Всюду, далее, для определенности будем считать, что $\operatorname{Re}\mu \ge 0$, соответственно $\operatorname{Re}\lambda i \le 0$ (противоположный случай рассматривается аналогично).

По лемме 3.2 имеем:

$$\begin{aligned} z_1(x) &= c_1e^{\mu x}\big[h_1(x)u_{11}(x) - ih_2(x)u_{21}(x)\big] + c_2e^{-\mu x}\big[h_1(x)u_{12}(x) - ih_2(x)u_{22}(x)\big], \\ z_2(x) &= c_1e^{\mu x}\big[-ih_1(x)u_{11}(x) + h_2(x)u_{21}(x)\big] + c_2e^{-\mu x}\big[-ih_1(x)u_{12}(x) + h_2(x)u_{22}(x)\big] \end{aligned} \tag{3.38}$$

(здесь для удобства аргументы λ и μ у соответствующих функций опущены). Из краевых условий (3.24) получим следующее уравнение для собственных значений:

$$\begin{vmatrix} u_{11}(0) - iu_{21}(0) & u_{12}(0) - iu_{22}(0) \\ e^{\frac{\mu}{2}}\left[h_2\left(\frac12\right)u_{21}\left(\frac12\right) - h_1\left(\frac12\right)u_{11}\left(\frac12\right)\right] & e^{-\frac{\mu}{2}}\left[h_2\left(\frac12\right)u_{21}\left(\frac12\right) - h_1\left(\frac12\right)u_{11}\left(\frac12\right)\right] \end{vmatrix} = 0. \tag{3.39}$$

Для получения простейших асимптотических оценок собственных значений используем сначала u_{ij} из (3.28). Обозначая $[1] = 1 + O\left(\mu^{-1}\right)$, имеем

$$u_{kk}(x,\mu) = [1], \quad u_{kj}(x,\mu) = O\left(\mu^{-1}\right), \qquad k,j = 1,2, k \ne j. \tag{3.40}$$

Поэтому уравнение (3.39) примет вид

$$\begin{vmatrix} [1] & -i[1] + O\left(\frac{1}{\mu}\right) \\ e^{\frac{\mu}{2}}\left[-h_1\left(\frac12\right)[1] + O\left(\frac{1}{\mu}\right)\right] & e^{-\frac{\mu}{2}}\left[h_2\left(\frac12\right)[1] + O\left(\frac{1}{\mu}\right)\right] \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда, учитывая, что $\dfrac{h_2(1/2)}{h_1(1/2)} = e^{-i\int\limits_0^1 q(t)\,dt}$, получим $e^{\mu} = -ie^{-i\int\limits_0^1 q(t)\,dt}[1]$, откуда

$$\mu_n = -\left(\frac{\pi}{2} + \int\limits_0^1 q(t)\,dt\right)i - 2\pi ni + O(\mu^{-1}),$$

и $O\left(\mu^{-1}\right) = O\left(1/n\right)$. Вычисляя теперь $\lambda_n = i\mu_n$, придем к следующему утверждению.

Теорема 3.3. *Для собственных значений λ_n задачи* (3.23)–(3.24) *имеют место асимптотические формулы:*

$$\lambda_n = \lambda_n^0 + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n = \pm n_0, \pm(n_0+1), \ldots, \tag{3.41}$$

где $\lambda_n^0 = 2\pi n + a$, $a = \pi/2 + \int\limits_0^1 q(t)\,dt$, и n_0 — некоторое достаточно большое натуральное число. При этом собственные значения, достаточно большие по модулю, — простые.

Замечание. Следует иметь в виду, что существование собственных значений проводится традиционно с применением теоремы Руше. Для этого следует учесть, что асимптотические формулы (3.28) имеют место при $\operatorname{Re}\mu \ge -h$, $\operatorname{Re}\mu \le h$, где $h > 0$ — любое.

Для того чтобы получить более тонкие оценки для собственных значений, воспользуемся в уравнении (3.39) значениями $u_{ij}(1/2)$ и $u_{ij}(0)$, вычисленными по уточненным формулам из теоремы 3.2 при $\mu = \mu_n$.

Лемма 3.12. *Для любого целого числа k, любой функции $s(x) \in C[0,1]$ и $p = \pm 1$ имеем:*

$$e^{k\mu_n} = \alpha + O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{3.42}$$

$$\int_0^{1/2} e^{2p\mu_n t} s(t)\, dt = \alpha_n + O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{3.43}$$

$$\int_0^{1} e^{2p\mu_n t} s(t)\, dt = \alpha_n + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{3.44}$$

Лемма 3.13. *Для значений функций $u_{ij}(x,\mu_n)$ из теоремы 3.2 справедливы следующие асимптотические формулы:*

$$u_{11}(0) = 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \qquad u_{12}(0) = \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$u_{22}(0) = 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \qquad u_{21}(0) = O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$u_{11}\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \qquad u_{12}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$u_{22}\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \qquad u_{21}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

(аргумент μ_n для удобства опускаем).

Теорема 3.4. *Для собственных значений λ_n задачи* (3.23)–(3.24) *имеют место уточненные асимптотические формулы:*

$$\lambda_n = \lambda_n^0 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \qquad n = \pm n_0, \pm(n_0+1), \ldots, \tag{3.45}$$

где λ_n^0 определяется так же, как и в теореме 3.3.

Доказательство. Используя в уравнении (3.39) оценки из леммы 3.13, получим:

$$e^{-\mu/2} h_2\left(\frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = i e^{\mu/2} h_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

и, следовательно,

$$e^{\mu} = -i e^{-i\int\limits_0^1 q(t)\,dt}\left(1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = e^{-\pi/2i - 2\pi n i - i\int\limits_0^1 q(t)\,dt} e^{\frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)}.$$

Поэтому для μ_n имеем следующие уточненные асимптотические формулы:

$$\mu_n = -\lambda_n^0 i + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

откуда следует (3.45). □

Перейдем к исследованию асимптотики собственных функций задачи (3.5)–(3.6). В силу леммы 3.10 собственная функция, отвечающая значению λ_n, есть $y_n(x) = z_1(x,\lambda_n)$, где $z_1(x,\lambda_n)$ определена соотношением из (3.38), и, следовательно,

$$\begin{aligned} y_n(x) = c_1\big[h_1(x) e^{-\lambda_n i x} u_{11}(x,\mu_n) - i h_2(x) e^{-\lambda_n i x} u_{21}(x,\mu_n)\big] + \\ + c_2\big[h_1(x) e^{\lambda_n i x} u_{12}(x,\mu_n) - i h_2(x) e^{\lambda_n i x} u_{22}(x,\mu_n)\big]. \end{aligned} \tag{3.46}$$

Теорема 3.5. *Для собственных функций оператора L имеют место асимптотические формулы:*

$$y_n(x) = y_n^0(x) + O\left(\frac{1}{n}\right), \qquad n = \pm n_0, \pm(n_0+1), \ldots,$$

где $y_n^0(x) = e^{\lambda_n^0 i(1-x)} h_2(1-x) - i e^{\lambda_n^0 i x} h_2(x)$, функция $h_2(x)$ та же, что и в лемме 3.11.

Доказательство. Воспользуемся оценками (3.40) и полученной из них асимптотикой (3.41) для собственных значений.

Из (3.46) и краевого условия $y_n(0) = 0$ имеем:

$$c_1[u_{11}(0) - iu_{21}(0)] + c_2[u_{12}(0) - iu_{22}(0)] = c_1[1] - ic_2[1] = 0,$$

откуда $c_1 = c_2 i[1]$. Положим $c_2 = 1$, тогда $c_1 = i[1]$. Так как $e^{-\lambda_n ix} = e^{-\lambda_n^0 ix}[1]$, $e^{\lambda_n ix} = e^{\lambda_n^0 ix}[1]$, то из (3.46) и (3.40) получим:

$$y_n(x) = i[1]e^{-\lambda_n ix}\left[h_1(x)[1] - ih_2(x)O\left(\frac{1}{n}\right)\right] + e^{\lambda_n ix}\left[h_1(x)O\left(\frac{1}{n}\right) - ih_2(x)[1]\right] =$$
$$= ie^{-\lambda_n^0 ix}[1]\left[h_1(x) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right] + e^{\lambda_n^0 ix}[1]\left[-ih_2(x) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right] =$$
$$= i\left(e^{-\lambda_n^0 ix}h_1(x) - e^{\lambda_n^0 ix}h_2(x)\right) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Положим $y_n^0(x) = i\left(e^{-\lambda_n^0 ix}h_1(x) - e^{\lambda_n^0 ix}h_2(x)\right)$. Из (3.26) следует, что

$$h_1(x) = e^{-\pi/2i}e^{\pi/2i + i\int\limits_0^1 q(t)\,dt}h_2(1-x) = -ie^{ai}h_2(1-x) = -ie^{\lambda_n^0 i}h_2(1-x).$$

Тогда

$$y_n^0(x) = e^{-\lambda_n^0 ix}e^{\lambda_n^0 i}h_2(1-x) - ie^{\lambda_n^0 ix}h_2(x) = e^{\lambda_n^0 i(1-x)}h_2(1-x) - ie^{\lambda_n^0 ix}h_2(x),$$

откуда следует утверждение теоремы. □

Чтобы получить более тонкие оценки для собственных функций, используем уточненные оценки (3.45) для собственных значений и асимптотики из теоремы 3.2.

Теорема 3.6. *Для собственных функций оператора L имеют место уточненные асимптотические формулы:*

$$y_n(x) = y_n^0(x) + \Omega_{1n}(x) + \Omega_{2n}(x) + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

где $y_n^0(x)$ определяется так же как в теореме 3.5, и

$$\Omega_{1n}(x) = \frac{1}{n}\left[b(x)e^{-\lambda_n^0 ix} + b(x)e^{\lambda_n^0 ix} + b(x)\alpha_n e^{-\lambda_n^0 ix} + b(x)\alpha_n e^{\lambda_n^0 ix}\right],$$
$$\Omega_{2n}(x) = \frac{1}{n}\Big[b(x)\int\limits_0^x e^{-\lambda_n^0 it}q_1'\left(\frac{x+t}{2}\right)dt + b(x)\int\limits_0^x e^{\lambda_n^0 it}q_1'\left(\frac{x-t}{2}\right)dt +$$
$$+ b(x)\int\limits_0^x e^{\lambda_n^0 it}q_2'\left(\frac{x+t}{2}\right)dt + b(x)\int\limits_0^x e^{-\lambda_n^0 it}q_2'\left(\frac{x-t}{2}\right)dt\Big]$$

(через $b(x)$ обозначаем различные непрерывные функции из некоторого конечного набора).

Доказательство. Из (3.46) и краевого условия $y_n(0) = 0$, используя оценки из леммы 3.13, имеем:

$$c_1\left[1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] + c_2\left[-i + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] = 0,$$

откуда

$$c_1 = ic_2\left[1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]. \tag{3.47}$$

Так как

$$e^{\pm\lambda_n ix} = e^{\pm\lambda_n^0 ix}\left(1 + \frac{\alpha}{n}x + \frac{\alpha_n}{n}x\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

то по теореме 3.2 получим:

$$e^{-\lambda_n ix}u_{11}(x,\mu_n) = e^{-\lambda_n^0 ix}\left(1 + \frac{\alpha}{n}x + \frac{\alpha_n}{n}x\right)\left(1 + \frac{b(x)}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) =$$

$$= e^{-\lambda_n^0 ix}\left(1+\frac{b(x)}{n}+\frac{\alpha_n}{n}\,b(x)\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right), \tag{3.48}$$

$$e^{\lambda_n ix}u_{22}(x,\mu) = e^{\lambda_n^0 ix}\left(1+\frac{\alpha}{n}\,x+\frac{\alpha_n}{n}\,x\right)\left(1+\frac{b(x)}{n}\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right) =$$

$$= e^{\lambda_n^0 ix}\left(1+\frac{b(x)}{n}+\frac{\alpha_n}{n}\,b(x)\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right), \tag{3.49}$$

$$e^{-\lambda_n ix}u_{21}(x,\mu) = e^{-\lambda_n^0 ix}\Big(1+\frac{\alpha}{n}\,x+\frac{\alpha_n}{n}\,x\Big)\Big(\frac{b(x)}{n}+\frac{\alpha}{n}\,e^{2\lambda_n^0 ix}+\frac{\alpha}{n}\int\limits_0^x e^{2\lambda_n^0 i(x-t)}q_1'(t)\,dt\Big)+O\left(\frac{1}{n^2}\right) =$$

$$= \frac{b(x)}{n}\,e^{-\lambda_n^0 ix}+\frac{\alpha}{n}\,e^{\lambda_n^0 ix}+\frac{\alpha}{n}\int\limits_0^x e^{\lambda_n^0 i(x-2t)}q_1'(t)\,dt+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$e^{\lambda_n ix}u_{12}(x,\mu) = e^{\lambda_n^0 ix}\Big(1+\frac{\alpha}{n}\,x+\frac{\alpha_n}{n}\,x\Big)\Big(\frac{b(x)}{n}+\frac{\alpha}{n}\,e^{2\lambda_n^0 i(1-x)}+\frac{\alpha}{n}\int\limits_x^1 e^{-2\lambda_n^0 i(x-t)}q_2'(t)\,dt\Big)+O\left(\frac{1}{n^2}\right) =$$

$$= \frac{b(x)}{n}\,e^{\lambda_n^0 ix}+\frac{\alpha}{n}\,e^{-\lambda_n^0 ix}+\frac{\alpha}{n}\int\limits_x^1 e^{-\lambda_n^0 i(x-2t)}q_2'(t)\,dt+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Далее,

$$\int\limits_0^x e^{\lambda_n^0 i(x-2t)}q_1'(t)\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_{-x}^x e^{\lambda_n^0 i\tau}q_1'\Big(\frac{x-\tau}{2}\Big)\,d\tau = \frac{1}{2}\int\limits_0^x e^{-\lambda_n^0 it}q_1'\Big(\frac{x+t}{2}\Big)\,dt+\frac{1}{2}\int\limits_0^x e^{\lambda_n^0 it}q_1'\Big(\frac{x-t}{2}\Big)\,dt,$$

$$\int\limits_x^1 e^{-\lambda_n^0 i(x-2t)}q_2'(t)\,dt = e^{-\lambda_n^0 ix}\int\limits_0^1 e^{2\lambda_n^0 it}q_2'(t)\,dt-\int\limits_0^x e^{-\lambda_n^0 i(x-2t)}q_2'(t)\,dt =$$

$$= \alpha_n e^{-\lambda_n^0 ix}+\frac{1}{2}\int\limits_0^x e^{-\lambda_n^0 it}q_2'\Big(\frac{x-t}{2}\Big)\,dt+\frac{1}{2}\int\limits_0^x e^{\lambda_n^0 it}q_2'\Big(\frac{x+t}{2}\Big)\,dt.$$

Поэтому

$$e^{-\lambda_n ix}u_{21}(x,\mu) = \frac{b(x)}{n}\,e^{-\lambda_n^0 ix}+\frac{\alpha}{n}\,e^{\lambda_n^0 ix}+\frac{\alpha}{n}\int\limits_0^x e^{-\lambda_n^0 it}q_1'\Big(\frac{x+t}{2}\Big)\,dt+$$

$$+\frac{\alpha}{n}\int\limits_0^x e^{\lambda_n^0 it}q_1'\Big(\frac{x-t}{2}\Big)\,dt+O\left(\frac{1}{n^2}\right), \tag{3.50}$$

$$e^{\lambda_n ix}u_{12}(x,\mu) = \frac{b(x)}{n}\,e^{\lambda_n^0 ix}+\frac{\alpha}{n}\,e^{-\lambda_n^0 ix}+\frac{\alpha_n}{n}\,e^{-\lambda_n^0 ix}+$$

$$+\frac{\alpha}{n}\int\limits_0^x e^{-\lambda_n^0 it}q_2'\Big(\frac{x-t}{2}\Big)\,dt+\frac{\alpha}{n}\int\limits_0^x e^{\lambda_n^0 it}q_2'\Big(\frac{x+t}{2}\Big)\,dt+O\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{3.51}$$

Полагая $c_2 = 1$ и подставляя (3.47)–(3.51) в (3.46), получим утверждение теоремы. □

3.2.2. Теорема о разложении по собственным функциям

Обозначим через S_δ область, полученную из λ-плоскости удалением всех чисел вида $\pi n + a$, $(n \in \mathbb{Z})$, $a = \pi/2 + \int\limits_0^1 q(t)dt$, вместе с круговыми окрестностями одного и того же достаточно малого радиуса δ.

Так как $R_\lambda = O(1)$ в S_δ, то стандартно получается

Теорема 3.7. *Если* $f(x) \in C^1[0,1]$, $f(0) = 0$, *то*

$$\lim_{r\to\infty} \|f(x) - S_r(f,x)\|_\infty = 0,$$

где $S_r(f,x) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} R_\lambda f\, d\lambda$ *— частичная сумма ряда Фурье функции* f *по собственным и присоединенным функциям оператора* L.

Так как L — самосопряженный оператор, то по теореме 3.7 получим

Лемма 3.14. *Система* $\{y_n(x)\}$ *является ортогональной и полной в* $L_2[0,1]$, *и* $\|y_n\|^2 = 2+O\left(1/n\right)$, *где* $\|\cdot\|$ *— норма в* $L_2[0,1]$.

3.2.3. Преобразование формального решения

Идеи А. Н. Крылова – В. А. Чернятина мы реализуем следующим образом. Ряд Σ, представляющий формальное решение рассматриваемой задачи по методу Фурье, мы берем в виде

$$\Sigma = S_0 + (\Sigma - \Sigma_0), \tag{3.52}$$

где Σ_0 — ряд, являющийся решением некоторой специальной эталонной задачи, а S_0 — сумма этого ряда, которая явно вычисляется. В свою очередь, $\Sigma - \Sigma_0$ представляется в виде суммы двух составляющих, одна из которых — конечная сумма, а вторая — ряд, составленный из разностей соответствующих членов рядов Σ и Σ_0, причем этот ряд и ряды, получающиеся из него почленным дифференцированием, сходятся равномерно. Это последнее обстоятельство, а также то, что S_0 есть решение эталонной задачи, позволяет весьма просто убедиться, что $\Sigma = S_0 + (\Sigma - \Sigma_0)$ есть классическое решение исходной задачи при минимальных требованиях гладкости начальных данных.

В качестве эталонной задачи мы берем задачу (3.1)–(3.2), где $q(x)$ заменяется на $q_0(x) = \frac{1}{2}(q(x) + q(1-x))$. Функция $q_0(x)$ является симметричной: $q_0(x) = q_0(1-x)$. Соответствующий оператор обозначим L_0:

$$L_0 y(x) = y'(1-x) + q_0(x)y(x), \quad y(0) = 0.$$

Собственными значениями и собственными функциями этого оператора являются λ_n^0 и $y_n^0(x)$ из п. 3.1.

3.2.4. Решение задачи (3.1)–(3.2)

Согласно методу Фурье формальное решение задачи (3.1)–(3.2) имеет вид

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} (R_\lambda \varphi(x)) e^{\lambda\beta i t} d\lambda + \sum_{|\lambda_n|>r} \frac{1}{\|y_n\|^2} (\varphi, y_n)\, y_n(x) e^{\lambda_n \beta i t}, \tag{3.53}$$

где r таково, что при $|\lambda_n| > r$ все собственные значения простые.

Представим ряд (3.53) в виде (3.52), где

$$\Sigma_0 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(\varphi, y_n^0)}{\|y_n^0\|^2}\, y_n^0(x) e^{\lambda_n^0 \beta i t}.$$

Для суммы S_0 ряда Σ_0 справедливо утверждение.

Лемма 3.15. *Если* $\varphi(x) \in C^1[0,1]$, $\varphi(0) = \varphi'(1) = 0$, *то имеет место формула*

$$S_0 = e^{a\beta i t}[p(1-x) f_0(1-x+\beta t) - ip(x) f_0(x+\beta t)], \tag{3.54}$$

где $f_0(x)$ *— непрерывно дифференцируемая на всей оси функция, периодическая с периодом 1, и* $f_0(x) = \frac{1}{2p(x)}\,[i\varphi(x) + \varphi(1-x)]$ *при* $x \in [0,1]$; $p(x) = e^{iax - i\int\limits_0^x q(t)\,dt}$, $a = \pi/2 + \int\limits_0^1 q(t)\,dt$.

Далее, положим

$$\Sigma - \Sigma_0 = u_1(x,t) + u_2(x,t),$$

где

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} \left(\left(R_\lambda - R_\lambda^0\right) \varphi(x)\right) e^{\lambda\beta i t} d\lambda, \tag{3.55}$$

$$u_2(x,t) = \sum_{|\lambda_n|>r} \left[\frac{(\varphi, y_n)}{\|y_n\|^2}\, y_n(x) e^{\lambda_n \beta i t} - \frac{(\varphi, y_n^0)}{\|y_n^0\|^2}\, y_n^0(x) e^{\lambda_n^0 \beta i t} \right], \tag{3.56}$$

R_λ^0 — резольвента оператора L_0.

Лемма 3.16. *Имеет место формула*

$$u_2(x,t)=\sum_{|\lambda_n|>r}\left[\frac{(g,y_n)\,y_n(x)e^{\lambda_n\beta it}}{\|y_n\|^2\,\lambda_n}-\frac{(g,y_n^0)\,y_n^0(x)e^{\lambda_n^0\beta it}}{\|y_n^0\|^2\,\lambda_n^0}\right]+\sum_{|\lambda_n|>r}\frac{(g_2,y_n^0)\,y_n^0(x)e^{\lambda_n^0\beta it}}{\|y_n^0\|^2\,(\lambda_n^0)^2}, \qquad (3.57)$$

где $g=L\varphi$, $g_1=g-L_0\varphi$, $g_2=L_0g_1$ (здесь g_1 из области определения оператора L_0, так как $q(x)\in C^1[0,1]$).

Доказательство. Из тождества Гильберта имеем:

$$R_\lambda\varphi=-\frac{\varphi}{\lambda}+\frac{R_\lambda g}{\lambda},$$

$$R_\lambda^0\varphi=-\frac{\varphi}{\lambda}+\frac{R_\lambda^0(L_0\varphi)}{\lambda}=-\frac{\varphi}{\lambda}+\frac{R_\lambda^0(g-g_1)}{\lambda}=-\frac{\varphi}{\lambda}+\frac{R_\lambda^0 g}{\lambda}-\frac{R_\lambda^0 g_1}{\lambda}=-\frac{\varphi}{\lambda}+\frac{R_\lambda^0 g}{\lambda}+\frac{g_1}{\lambda^2}-\frac{R_\lambda^0 g_2}{\lambda^2}.$$

Тогда

$$R_\lambda\varphi-R_\lambda^0\varphi=\frac{(R_\lambda-R_\lambda^0)g}{\lambda}-\frac{g_1}{\lambda^2}+\frac{R_\lambda^0 g_2}{\lambda^2},$$

и (3.57) следует из представления слагаемых в (3.56) через интегралы от резольвенты по контурам достаточно малого радиуса с центрами в λ_n. □

Лемма 3.17. *Если $g(x)\in C[0,1]$, то $(g,\Omega_{jn})=\alpha_n/n$ ($j=1,2$).*

Доказательство. Утверждение леммы для $j=1$ очевидно. Далее,

$$\int_0^1 b(x)\,dx\int_0^x e^{\lambda_n^0 it}\overline{q_1'\Big(\frac{x+t}{2}\Big)}\,dt=\int_0^1 e^{\lambda_n^0 it}\,dt\int_t^1 b(x)\overline{q_1'\Big(\frac{x+t}{2}\Big)}\,dx=\alpha_n,$$

и, аналогично рассмотрев остальные слагаемые в Ω_{2n}, получим, что и $(g,\Omega_{2n})=\alpha_n/n$. □

Лемма 3.18. *Ряды в (3.57) и ряды, полученные из них почленным дифференцированием по x и t, равномерно сходятся по $x\in[0,1]$ и $t\in[-A,A]$, где $A>0$ — любое.*

Доказательство. Согласно неравенствам Коши – Буняковского и Бесселя ряды $\sum\frac{|(g,y_n)|}{\|y_n\|\cdot|\lambda_n|}$ и $\sum\frac{|(g,y_n^0)|}{\|y_n^0\|\cdot|\lambda_n^0|}$ сходятся, откуда следует равномерная сходимость рядов в (3.57). Рассмотрим ряд

$$\sum_{|\lambda_n|>r}\left[\frac{(g,y_n)\,y_n(x)e^{\lambda_n\beta it}}{\|y_n\|^2\,\lambda_n}-\frac{(g,y_n^0)\,y_n^0(x)e^{\lambda_n^0\beta it}}{\|y_n^0\|^2\,\lambda_n^0}\right]. \qquad (3.58)$$

Используя асимптотические формулы для λ_n, $y_n(x)$, имеем:

$$\frac{(g,y_n)\,y_n'(x)e^{\lambda_n\beta it}}{\|y_n\|^2\,\lambda_n}=\frac{(g,y_n)\,(y_n^0(x))'e^{\lambda_n^0\beta it}}{\|y_n^0\|^2\,\lambda_n^0}+(g,y_n)\,O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Поэтому ряд, полученный почленным дифференцированием по x ряда (3.58), имеет следующее представление:

$$\sum_{|\lambda_n|>r}\left[\frac{(g,y_n-y_n^0)\,(y_n^0(x))'e^{\lambda_n^0\beta it}}{\|y_n^0\|^2\,\lambda_n^0}+(g,y_n)\,O\left(\frac{1}{n}\right)\right]. \qquad (3.59)$$

В силу леммы 3.17 $\big(g,y_n-y_n^0\big)=\alpha_n/n$, где $\sum\alpha_n^2<\infty$. Отсюда следует равномерная сходимость первого ряда в (3.59). Для второго слагаемого в (3.59) она очевидна. Аналогично доказывается равномерная сходимость ряда, полученного из (3.58) почленным дифференцированием по t. Для второго слагаемого в (3.57) утверждение леммы очевидно. □

Теорема 3.8. *Если $q(x)$ вещественна, $q(x)\in C^1[0,1]$, $\varphi(x)\in C^1[0,1]$, $\varphi(0)=\varphi'(1)=0$, то классическое решение задачи (3.1)–(3.2) существует и имеет вид*

$$u(x,t)=u_1(x,t)+u_2(x,t)+S_0(x,t),$$

где $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ определены по формулам (3.55), (3.56), а $S_0(x,t)$ по формуле (3.54).

Доказательство. В силу лемм 3.15 и 3.18 $u(x,t)$ дифференцируема по обеим переменным. Легко проверяется, что $u(x,t)$ удовлетворяет условиям (3.2). Докажем, что $u(x,t)$ удовлетворяет (3.1). Обозначим составляющие в (3.55), (3.56) через u_{kj}, т.е. $u_1 = u_{11} - u_{12}$, $u_2 = u_{21} - u_{22}$. Тогда очевидно, что

$$u_{11} + u_{21} = u, \qquad u_{12} + u_{22} = \Sigma_0. \tag{3.60}$$

Обозначим через Du следующее дифференциальное выражение:

$$Du = \frac{1}{\beta i}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial u(\xi,t)}{\partial \xi}\Big|_{\xi=1-x}.$$

Тогда имеем:

$$Du = Du_1 + Du_2 + DS_0 = Du_{11} - Du_{12} + Du_2 + DS_0. \tag{3.61}$$

Но $DS_0 = q_0(x)S_0$, $Du_1 = Du_{11} - Du_{12} = q(x)u_{11} - q_0(x)u_{12}$,

$$Du_2 = \sum_{|\lambda_n|>r}\left[q(x)\frac{(\varphi, y_n)}{\|y_n\|^2}\, y_n(x)e^{\lambda_n\beta it} - q_0(x)\frac{(\varphi, y_n^0)}{\|y_n^0\|^2}\, y_n^0(x)e^{\lambda_n^0\beta it}\right].$$

Поэтому из (3.60) и (3.61) получаем $Du_1 + Du_2 = q(x)u - q_0(x)\Sigma_0$, а значит,

$$Du = q(x)u - q_0(x)\Sigma_0 + q_0(x)S_0 = q(x)u.$$

Теорема доказана. □

4. ДРУГИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Приведем в п. 4.1–4.3 без доказательств другие результаты о смешанных задачах с инволюцией.

4.1. Смешанная задача в периодическом случае

Рассматривается смешанная задача следующего вида [33]:

$$\frac{1}{\beta i}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial u(\xi,t)}{\partial \xi}\Big|_{\xi=1-x} + q(x)u(x,t), \quad x\in[0,1], t\in(-\infty,+\infty), \tag{4.1}$$

$$u(0,t) = u(1,t), \qquad u(x,0) = \varphi(x), \quad x\in[0,1], \tag{4.2}$$

где β — вещественное число, $\beta \neq 0$, $q(x) \in C^1[0,1]$ и вещественна. Естественные минимальные условия на $\varphi(x)$: $\varphi(x) \in C^1[0,1]$, $\varphi^j(0) = \varphi^j(1)$, $(j = 0,1)$.

Введем операторы L и L_0:

$$Ly = y'(1-x) + q(x)y(x), \qquad y(0) = y(1),$$
$$L_0 y = y'(1-x) + q_0(x)y(x), \qquad y(0) = y(1),$$

$q_0((x) = \frac{1}{2}\,[q(x) + q(1-x)]$.

Лемма 4.1. *Собственные значения оператора L_0 простые и равны $\lambda_n^0 = 2\pi n + a$, $n \in \mathbb{Z}$, $a = \int\limits_0^1 q(t)\,dt$, а соответствующие собственные функции*

$$y_n^0(x) = u(1-x)e^{\lambda_n^0 i(1-x)} - iu(x)e^{\lambda_n^0 ix},$$

где $u(x) = \exp\bigl(-i\int\limits_0^x q_0(\tau)\,d\tau\bigr)$.

Решение эталонной задачи (4.1)–(4.2), когда $q(x)$ есть $q_0(x)$, полученное по методу Фурье, есть

$$u_0(x,t) = e^{a\beta it}\bigl[p(1-x)f_0(1-x+\beta t) - ip(x)f_0(x+\beta t)\bigr], \tag{4.3}$$

где $p(x) = \exp\left\{i\bigl(ax - \int\limits_0^x q_0(t)\,dt\bigr)\right\}$, $f_0(x) \in C^1(-\infty,+\infty)$, периодична с периодом 1, причем

$$f_0(x) = \frac{1}{2p(x)}\bigl[i\varphi(x) + \varphi(1-x)\bigr], x\in[0,1].$$

Лемма 4.2. *Собственные значения λ_n оператора L, достаточно большие по модулю, простые и имеют асимптотику:*

$$\lambda_n = \lambda_n^0 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n}, \qquad n = \pm n_0, \pm(n_0+1), \ldots .$$

Теорема 4.1. *Классическое решение задачи* (4.1)–(4.2) *существует и имеет вид*

$$u(x,t) = u_0(x,t) + \Sigma_1 + \Sigma_2,$$

где

$$\Sigma_1 = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} \left(\left(R_\lambda - R_\lambda^0 \right) \varphi \right)(x) e^{\lambda\beta i t} d\lambda,$$

R_λ, R_λ^0 — резольвенты операторов L и L_0,

$$\Sigma_2 = \sum_{|\lambda_n|>r} \left[\frac{(\varphi, y_n)}{\|y_n\|^2}\, y_n(x) e^{\lambda_n \beta i t} - \frac{(\varphi, y_n^0)}{2}\, y_n^0(x) e^{\lambda_n^0 \beta i t} \right].$$

Ряд Σ_2 и ряды, получающиеся из него почленным дифференцированием по x и t, равномерно сходятся при $x \in [0,1]$ и $t \in [-A, A]$ при любом $A > 0$.

Схожий результат получен в [32] для задачи

$$\frac{1}{\beta i}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial u(\xi,t)}{\partial \xi}\Big|_{\xi=1-x} + q_1(x)u(x,t) + q_2(x)u(1-x,t), \tag{4.4}$$

$$u(0,t) = 0, \qquad u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in [0,1], \qquad t \in (-\infty, +\infty), \tag{4.5}$$

при условиях $q_j(x) \in C^1[0,1]$, $q_1(x)$ — вещественна, $q_2(x) = \overline{q_2(1-x)}$, $q_2(0) = 0$, $\beta \neq 0$ — вещественное число. Естественные минимальные требования те же, что и в параграфе 3.

4.2. Смешанная задача для неоднородного уравнения

Рассматривается задача вида [33]

$$\frac{1}{\beta i}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial u(\xi,t)}{\partial \xi}\Big|_{\xi=1-x} + q(x)u(x,t) + f(x,t), \tag{4.6}$$

$$x \in [0,1], t \in (-\infty, +\infty),$$

$$u(0,t) = 0, \qquad u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,1]. \tag{4.7}$$

Считаем, что β, $q(x)$ те же, что и в п. 4.1. Формальное решение по методу Фурье возьмем в виде:

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} \left(\left(R_\lambda(\varphi + g) \right) \right)(x) e^{\lambda\beta i t} d\lambda + \sum_{|\lambda_n|>r} \left(\varphi(\xi) + g_n(\xi), y_n(\xi) \right) \frac{y_n(x)}{\|y_n\|^2}\, e^{\lambda_n \beta i t},$$

где $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$, $Ly = y'(1-x) + q(x)y(x)$, $y(0) = 0$, λ — спектральный параметр, E — единичный оператор, $g = g(x,t,\lambda) = \beta i \int_0^t e^{-\lambda\beta i \tau} f(x,\tau)\, d\tau$, $g_n(\xi) = g(\xi, t, \lambda_n)$, λ_n и $y_n(x)$ — собственные значения и собственные функции оператора L соответственно.

Теорема 4.2. *Пусть $\varphi(x) \in C^1[0,1]$, $\varphi(0) = \varphi'(1) = 0$, $f(x,t)$, $f'_x(x,t)$ непрерывны по $x \in [0,1]$ и $t \in (-\infty, \infty)$, причем $f(0,t) = f'_x(1,t) = 0$. Классическое решение задачи* (4.6)–(4.7) *существует и имеет вид*

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t),$$

где $u_1(x,t)$ есть решение задачи (4.6)–(4.7) *при $f(x,t) \equiv 0$ (см. параграф 3), а $u_2(x,t) = \beta i \int_0^t w(x, t-\tau, \tau)\, d\tau$ и $w(x,t,\tau)$ есть классическое решение задачи*

$$\frac{1}{\beta i}\frac{\partial w(x,t,\tau)}{\partial t} = \frac{\partial w(\xi,t,\tau)}{\partial \xi}\Big|_{\xi=1-x} + q(x)w(x,t,\tau),$$

$$w(0,t,\tau) = 0, \qquad w(x,0,\tau) = f(x,\tau), \qquad \tau \text{ — параметр.}$$

4.3. Смешанная задача на геометрическом графе

Рассматривается смешанная задача с инволюцией на простейшем графе из двух ребер: одно ребро образует цикл-петлю, а второе примыкает к нему. Смешанная задача в таком случае берется в виде [34]

$$\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x}, \tag{4.8}$$

$$\frac{1}{i}\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial u_2(\xi,t)}{\partial \xi}\Big|_{\xi=1-x} + q(x)u_2(x,t), \tag{4.9}$$

$$u_1(0,t) = u_1(1,t) = u_2(0,t), \tag{4.10}$$

$$u_1(x,t) = \varphi_1(x), \qquad u_2(x,t) = \varphi_2(x). \tag{4.11}$$

Вид графа позволяет задать простейшее уравнение (без инволюции) (4.8) на петле, а вот на другом ребре надо обязательно брать уравнение с инволюцией, так как иначе соответствующая спектральная задача нерегулярна по Биркгофу [36], и потому решение смешанной задачи того же вида, что и выше, получить нельзя. Предполагаем, что $q(x) \in C^1[0,1]$ и вещественна,

$$\varphi_k(x) \in C^1[0,1], \varphi_1(0) = \varphi_1(1) = \varphi_2(0), \varphi_2'(1) + q(0)\varphi_2(0) + i\varphi_1'(0) = 0 \tag{4.12}$$

(последнее условие в силу системы (4.8)–(4.9)).

По методу Фурье соответствующая (4.8)–(4.10) спектральная задача есть

$$Ly = \lambda y, \quad y = (y_1, y_2)^T$$

(T — знак транспонирования), где L — следующий оператор:

$$Ly = (-iy_1'(x), y_2'(1-x) + q(x)y_2(x))^T, \quad y_1(0) = y_1(1) = y_2(0).$$

Лемма 4.3. *Если $a = \pi/2 + \int\limits_0^1 q(t)\,dt$ не кратно 2π, то собственные значения оператора L, достаточно большие по модулю, простые и образуют две серии: $\lambda_n' = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $\lambda_n'' = \mu_n + \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{\alpha_n}{n}$ ($n = \pm n_0, \pm(n_0+1), \ldots$), где $\mu_n = 2\pi n + a$. При этом все собственные значения оператора L вещественные.*

Симметричным случаем задачи (4.8)–(4.11) мы будем называть задачу, когда вместо $q(x)$ берется $q_0(x) = \frac{1}{2}[q(x) + q(1-x)]$, и оператор L в этом случае называем L_0. Оператор L^* (L_0^*) имеет вид $L^*z = Lz$ ($L_0^*z = L_0z$) с краевыми условиями $z_2(0) = z_1(1) - z_1(0) + iz_2(1) = 0$, одними и теми же и для L^*, и для L_0^*. Собственные значения L (L_0) и L^* (L_0^*) совпадают, и для L_0 они те же, что и в лемме 4.3, но теперь надо брать $\alpha = \alpha_n = 0$.

Лемма 4.3 позволяет изучить асимптотику собственных функций операторов L и L^* как и в параграфе 3 (не приводим ее из-за громоздкости).

В симметричном случае ряды формального решения по методу Фурье наподобие уравнения струны точно вычисляются, и тем самым, получаем решение $u_0(x,t)$ смешанной задачи в этом случае. Соответствующую формулу здесь не приводим из-за громоздкости.

Формальное решение задачи (4.8)–(4.11) по методу Фурье есть

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}(R_\lambda\varphi(x))e^{\lambda it}d\lambda + \sum_{|\lambda_n|>r}\frac{(\varphi, z(x,\lambda_n))}{\gamma(\lambda_n)})y(x,\lambda_n)e^{\lambda_n it}, \tag{4.13}$$

где $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t))^T$, R_λ — резольвента оператора L, $y(x,\lambda_n)$ ($z(x,\lambda_n)$) — собственные вектор-функции оператора L (L^*) для собственного значения λ_n, $\gamma(\lambda_n) = (y(x,\lambda_n), z(x,\lambda_n))$. Представим (4.13) в виде

$$u(x,t) = u_0(x,t) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}\left(\left(R_\lambda - R_\lambda^0\right)\varphi\right)(x)e^{\lambda it}d\lambda + \sum_{|\lambda_n|>r}A_n(x,t), \tag{4.14}$$

где

$$A_n(x,t) = \frac{(L\varphi, z(x,\lambda_n))}{\lambda_n \gamma(\lambda_n)}\, y(x,\lambda_n) e^{\lambda_n it} - \frac{\left(L_0\varphi, z^0(x,\lambda_n^0)\right)}{\lambda_n^0 \gamma}\, y^0(x,\lambda_n^0) e^{\lambda_n^0 it},$$

λ_n^0 — собственное значение L_0, $y^0(x,\lambda_n^0)$ $(z^0(x,\lambda_n^0))$ — собственные функции L_0 (L_0^*), $\gamma = (y^0(x,\lambda_n^0), z^0(x,\lambda_n^0))$ и γ не зависит от n.

Формула (4.14) так же как и в параграфе 3, приводит к следующему результату.

Теорема 4.3. *Если $q(x) \in C^1[0,1]$ и вещественна, $q(0) = q(1)$, $a = \dfrac{\pi}{2} + \int\limits_0^1 q(t)\,dt$ не кратно 2π, $\varphi_k(x)$ удовлетворяют* (4.12), *то классическое решение задачи* (4.9)–(4.11) *существует и имеет вид* (4.14). *Ряды в* (4.14) *и ряды, получающиеся из них почленным дифференцированием по x и t, сходятся абсолютно и равномерно по $x \in [0,1]$ и $t \in [-A, A]$ при любом $A > 0$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* № 13-01-00238).

Библиографический список

1. *Стеклов В. А.* Основные задачи математической физики. М. : Наука, 1983. 432 с.

2. *Петровский И. Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. М. ; Л. : ГИТТЛ, 1953. 360 с.

3. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики : в 4 т. М. : Гостехиздат, 1953. Т. 4. 804 с.

4. *Ладыженская О. А.* Смешанная задача для гиперболического уравнения. М. : Гостехиздат, 1953, 282 с.

5. *Ильин В. А.* Избранные труды : в 2 т. М. : Изд-во ООО «Макс-пресс», 2008. Т. 1. 727 с.

6. *Ильин В. А.* О разрешимости смешанных задач для гиперболических и параболических уравнений // УМН. 1960. Т. 15, вып. 2. С. 97–154.

7. *Чернятин В. А.* Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1991. 112 с.

8. *Крылов А. Н.* О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах. М. ; Л. : ГИТТЛ, 1950. 368 с.

9. *Крылов А. Н.* Лекции о приближенных вычислениях. М. ; Л. : ГИТТЛ, 1950. 398 с.

10. *Lanczos C.* Discourse of Fourier Series. Edinburgh ; London : Oliver and Boyd, Ltd., 1966. 255 p.

11. *Нерсесян А. Б.* Ускорение сходимости разложений по собственным функциям // Докл. НАН Армении. 2007. Т. 107, № 2. С. 124–131.

12. *Чернятин В. А.* К уточнению теоремы существования классического решения смешанной задачи для одномерного волнового уравнения // Дифференциальные уравнения. 1985. Т. 21, № 9. С. 1569–1576.

13. *Чернятин В. А.* К решению одной смешанной задачи для неоднородного уравнения с частными производными четвертого порядка // Дифференциальные уравнения. 1985. Т. 21, № 2. С. 343–345.

14. *Чернятин В. А.* О необходимых и достаточных условиях существования классического решения смешанной задачи для одномерного волнового уравнения // Докл. АН СССР. 1986. Т. 287, № 5. С. 1080–1083.

15. *Чернятин В. А.* Классическое решение смешанной задачи для неоднородного гиперболического уравнения // Численные методы решения краевых и начальных задач для дифференциальных уравнений. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1986. С. 17–36.

16. *Чернятин В. А.* К уточнению теоремы существования решения смешанной задачи для неоднородного уравнения теплопроводности // Численный анализ : методы, алгоритмы, программы. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1988. С. 126–132.

17. *Чернятин В. А.* О разрешимости смешанной задачи для неоднородного гиперболического уравнения // Дифференциальные уравнения. 1988. Т. 24, № 4. С. 717–720.

18. *Андреев А. А.* О корректности краевых задач для некоторых уравнений в частных производных с карлемановским сдвигом // Дифференциальные уравнения и их приложения : тр. 2-го междунар. семинара. Самара, 1998. С. 5–18.

19. *Dankl Ch. G.* Differential-Difference Operators Associated to Reflection Groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1989. Vol. 311, № 1. P. 167–183.

20. *Платонов С. С.* Разложение по собственным функциям для некоторых функционально-дифференциальных операторов // Тр. Петрозавод. гос. ун-та. Сер. математическая. 2004. Вып. 11. С. 15–35.

21. *Хромов А. П.* Об обращении интегральных операторов с ядрами, разрывными на диагоналях // Мат. заметки. 1998. Т. 64, № 6. С. 932–949. DOI: 10.4213/mzm1472.

22. *Бурлуцкая М. Ш., Курдюмов В. П., Луконина А. С., Хромов А. П.* Функционально-дифференциальный оператор с инволюцией // Докл. АН. 2007. Т. 414. № 4. С. 443–446.

23. *Корнев В. В., Хромов А. П.* О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях // Мат. сб. 2001. Т. 192, № 10. С. 33–50.

24. *Курдюмов В. П. Хромов А. П.* О базисах Рисса из собственных функций интегральных операторов с ядрами, разрывными на диагоналях // Изв. АН. Сер. математическая. 2012. Т. 76, № 6. С. 106–121.

25. *Курдюмов В. П. Хромов А. П.* О базисах Рисса из собственных и присоединенных функций функциональ-

но-дифференциального оператора переменной структуры // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2007. Т. 7, вып. 2. С. 20–25.
26. *Корнев В. В., Хромов А. П.* Оператор интегрирования с инволюцией, имеющей степенную особенность // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2008. Т. 8, вып. 4. С. 18–33.
27. *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Об одной теореме равносходимости на всем отрезке для функционально-дифференциальных операторов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 4, ч. 1. С. 3–10.
28. *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Обоснование метода Фурье в смешанных задачах с инволюцией // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2011. Т. 11, вып. 4. С. 3–12.
29. *Халова В. А., Хромов А. П.* Интегральный оператор с негладкой инволюцией // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 3, вып. 1, ч. 1. С. 40–45.
30. *Хромов А. П.* Смешанная задача для дифференциального уравнения с инволюцией и потенциалом специального вида // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2010. Т. 10, вып. 4. С. 17–22.
31. *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Классическое решение для смешанной задачи с инволюцией // Докл. АН. 2010. Т. 435, № 2. С. 151–154.
32. *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Метод Фурье в смешанной задаче для уравнения первого порядка с инволюцией // Журн. выч. мат. и мат. физ. 2011. Т. 51, № 12. С. 2233–2246.
33. *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Смешанные задачи для гиперболических уравнений первого порядка с инволюцией // Докл. АН. 2011. Т. 441, № 2. С. 151–154.
34. *Бурлуцкая М. Ш.* Смешанная задача с инволюцией на графе из двух ребер с циклом // Докл. АН. 2012. Т. 447, № 5. С. 479—482.
35. *Марченко В. А.* Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения. Киев : Наук. думка, 1977. 392 с.
36. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М. : Наука, 1969. 528 с.

Classical Solution by the Fourier Method of Mixed Problems with Minimum Requirements on the Initial Data

A. P. Khromov[1], **M. Sh. Burlutskaya**[2]

[1]Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., 410012, Saratov, Russia, KhromovAP@info.sgu.ru
[2]Voronezh State University, 1, Universitetskaya pl., 394006, Voronezh, Russia, bmsh2001@mail.ru

The article gives a new short proof the V. A. Chernyatin theorem about the classical solution of the Fourier method of the mixed problem for the wave equation with fixed ends with minimum requirements on the initial data. Next, a similar problem for the simplest functional differential equation of the first order with involution in the case of the fixed end is considered, and also obtained definitive results . These results are due to a significant use of ideas A. N. Krylova to accelerate the convergence of series, like Fourier series. The results for other similar mixed problems given without proof.

Key words: mixed problem, Fourier method, involution, classical solution, asymptotic form of eigenvalues and eigenfunctions, Dirac system.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 13-01-00238).

References

1. Steklov V. A. *Osnovnye zadachi matematicheskoi fiziki* [The main tasks of mathematical physics]. Moscow, Nauka, 1983. 432 p. (in Russian).
2. Petrovsky I. G, *Lectures on partial differential equations*. Dover Publ. Inc., 1992, 245 p. (Rus. ed. : Petrovskii I. G. *Lektsii ob uravneniiakh s chastnymi proizvodnymi*. Moscow, GITTL, 1953, 360 p.).
3. Smirnov V. I. *Kurs vysshei matematiki* [A Course of Higher Mathematics : in 5 vol., vol. 4]. Moscow, Gostekhizdat, 1953. 804 p. (in Russian).
4. Ladyzhenskaya O. A. *Smeshannaia zadacha dlia giperbolicheskogo uravneniia* [Mixed problem for a hyperbolic equation]. Moscow, Gostekhizdat, 1953, 282 p. (in Russian).
5. Il'in V. A. *Izbrannye trudy* [Selected works : in 2 vol.]. Moscow, OOO «Maks-press», 2008, vol. 1 727 p. (in Russian).
6. Il'in V. A. The solvability of mixed problems for hyperbolic and parabolic equations. *Rus. Math. Surv.*, 1960, vol. 15, iss. 1, pp. 85–142.
7. Chernyatin V. A. *Obosnovanie metoda Fur'e v smeshannoi zadache dlya uravnenii v chastnykh proizvodnykh* [Justification of the Fourier method in a mixed problem for partial differential equations]. Moscow, Moscow Univ. Press, 1991. 112 p. (in Russian).
8. Krylov A. N. *O nekotorykh differentsial'nykh uravneniiakh matematicheskoi fiziki, imeiushchikh prilozheniia v tekhnicheskikh voprosakh* [On some differential equations of mathematical physics with applications in technical matters]. Leningrad, GITTL, 1950. 368 p. (in Russian).
9. Krylov A. N. *Lektsii o priblizhennykh vychisleniiakh* [Lectures on approximate calculations]. Moscow; Leningrad, GITTL, 1950. 398 p. (in Russian).

10. Lanczos C. *Discourse of Fourier Series*. Edinburgh; London, Oliver and Boyd, Ltd., 1966, 255 p.
11. Nersesyan A. B. Acceleration of convergence of eigenfunction expansions. *Dokl. NAN Armenii*, 2007, vol. 107, no. 2, pp. 124–131 (in Russian).
12. Chernyatin V. A. To clarify the theorem of existence of the classical solution of the mixed problem for one-dimensional wave equation. *Differential Equations*, 1985, vol. 21, no. 9, pp. 1569–1576 (in Russian).
13. Chernyatin V. A. To the decision of one of the mixed problem for an inhomogeneous equation with partial derivatives of fourth order. *Differential Equations*, 1985, vol. 21, no. 2, pp. 343–345 (in Russian).
14. Chernyatin V. A. On necessary and sufficient conditions for the existence of the classical solution of the mixed problem for one-dimensional wave equation. *Dokl. AN SSSR*, 1986, vol. 287, no. 5. pp. 1080–1083 (in Russian).
15. Chernyatin V. A. Classical solution of the mixed problem for the inhomogeneous hyperbolic equation. *Chislennye metody resheniia kraevykh i nachal'nykh zadach dlia differentsial* [Numerical methods for solving boundary value and initial problems for differential equations]. Moscow, Moscow Univ. Press, 1986, pp. 17–36.
16. Chernyatin V. A. To clarify the existence theorem for solutions of the mixed problem for the inhomogeneous heat equation. *Chislennyi analiz : metody, algoritmy, programmy* [Numerical analysis : methods, algorithms, programs]. Moscow, Moscow Univ. Press, 1988, pp. 126–132 (in Russian).
17. Chernyatin V. A. On the solvability of the mixed problem for the inhomogeneous hyperbolic equations. *Differential Equations*. 1988, vol. 24, no. 4, pp. 717–720 (in Russian).
18. Andreev A. A. About the correctness of boundary problems for some equations with calimanesti shift. *Differentsial'nye uravneniia i ikh prilozheniia : trudy 2-go mezhdunarodnogo seminara* [Differential equations and their applications : proceedings of the 2nd international workshop]. Samara, 1998, pp. 5–18 (in Russian).
19. Dankl Ch. G. Differential-Difference Operators Associated to Reflection Groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1989, vol. 311, no. 1, pp. 167–183.
20. Platonov S. S. The eigenfunction expansion for some functional-differential operators. *Trudy Petrozavodskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. matematicheskaia* [Proceedings of Petrozavodsk State University. Ser. Math.], 2004. iss. 11, pp. 15–35 (in Russian).
21. Khromov A. P. Inversion of integral operators with kernels discontinuous on the diagonal. *Math. Notes*. 1998, vol. 64, no. 6, pp. 804–813. DOI: 10.4213/mzm1472.
22. Burlutskaya M. Sh., Kurdyumov V. P., Lukonina A. S., Khromov A. P. A functional-differential operator with involution. *Doklady Math.*, 2007, vol. 75, no. 3, pp. 399–402.
23. Kornev V. V., Khromov A. P. Equiconvergence of expansions in eigenfunctions of integral operators with kernels that can have discontinuities on the diagonals. *Sbornik : Mathematics*, 2001, vol. 192, no. 10, pp. 1451–1469. DOI: 10.4213/sm601
24. Kurdyumov V. P., Khromov A. P. Riesz bases of eigenfunctions of integral operators with kernels discontinuous on the diagonals. *Izvestiya : Mathematics*, 2012, vol. 76, no. 6, pp. 1175–1189. DOI: 10.4213/im7797.
25. Kurdyumov V. P. , Khromov A. P. On Riesz basises of the eigen and associated functions of the functional-differential operator with a variable structure*Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2007, vol. 7, iss. 2, pp. 20–25 (in Russian).
26. Kornev V. V., Khromov A. P. Operator integration with an involution having a power singularity. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2008, vol. 8, iss. 4, pp. 18–33 (in Russian).
27. Burlutskaya M. Sh., Khromov A. P. On the same theorem on a equiconvergence at the whole segment for the functional-differential operators. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2009, vol. 9, iss. 4, pt. 1, pp. 3–10 (in Russian).
28. Burlutskaya M. Sh., Khromov A. P. Substantiation of Fourier method in mixed problem with involution. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2011, vol. 11, iss. 4, pp. 3–12 (in Russian).
29. Khalova V. A., Khromov A. P. Integral Operators with Non-smooth Involution. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2013, vol. 13, iss. 1, pt. 1, pp. 40–45 (in Russian).
30. Khromov A. P. The mixed problem for the differential equation with involution and potential of the special kind. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2010, vol. 10, iss. 4, pp. 17–22 (in Russian).
31. Burlutskaya M. Sh., Khromov A. P. Classical solution of a mixed problem with involution. *Doklady Math.*, 2010, vol. 82. no. 3, pp. 865–868.
32. Burlutskaya M. Sh., Khromov A. P. Fourier method in an initial-boundary value problem for a first-order partial differential equation with involution. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2011, vol. 51, no. 12, pp. 2102–2114.
33. Burlutskaya M. Sh., Khromov A. P. Initial-boundary value problems for first-order hyperbolic equations with involution. *Doklady Math.*, 2011, vol. 84, no. 3, pp. 783–786.
34. Burlutskaya M. Sh. A mixed problem with an involution on the graph of two edges with the cycle. *Doklady Math.*, 2012, vol. 447, no. 5, pp. 479–482.
35. Marchenko V. A. *Sturm – Liouville Operators and Applications*. Kiev, Naukova Dumka, 1977, 392 p. (in Russian).
36. Naymark M. A. *Lineinye differentsial'nye operatory* [Linear differential operators]. Moscow, Nauka, 1969, 528 p. (in Russian).