Key words: quadratic pencil of differential operators, multiple characteristic, multiple root of characteristic equation, strongly irregular pencil, two-fold expansion in the eigenfunctions, two-fold expansion in the root elements, biorthogonal series on root elements, derived chains, conditions of multiple expandability.

The results were obtained within the framework of the state task of Russian Ministry of Education and Science (project no. 1.1520.2014K).

References

1. Naimark M. A. *Linear Differential Operators*. Pt. I. New York, F. Ungar Publ. Co., 1967, 144 p.; Pt. II. New York, F. Ungar Publ. Co., 1968, 352 p. (Russ. ed.: Naimark M. A. Linear Differential Operators. Moscow, Nauka, 1968, 528 p.).
2. Shkalikov A. A. Boundary value problems for ordinary differential equations with a parameter in the boundary conditions. *J. Soviet Math.*, 1986, vol. 33, iss. 6, pp. 1311–1342.
3. Gurevich A. P., Khromov A. P. First and second order differential operators with weight functions of variable sign. *Math. Notes*, 1994, vol. 56, iss. 1, pp. 653–661.
4. Khromov A. P. Razlozhenie po sobstvennym funktsiiam odnoi kraevoi zadachi tret'ego poriadka [Expansion in the eigenfunctions of a boundary value problem of the third order]. *Issledovaniia po teorii operatorov* [Researches on the theory of operators], Ufa, 1988, pp. 182–193 (in Russian).
5. Dmitriev O. Iu. Expansion on eigenfunctions the differential operator of n-th order with irregular boundary conditions. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2007, vol. 7, iss. 2, pp. 10–14 (in Russian).
6. Rykhlov V. S. Expansion in eigenfunctions of quadratic strongly irregular pencils of differential operators of the second order. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2013, vol. 13, iss. 1, part 1, pp. 21–26 (in Russian).
7. Vagabov A. I., Abud A. Kh. Quadruple expandability in Fourier's series on root elements of a differential pencil with quadruple characteristic. *Vestnik Dagest. gos. un-ta* [Bull. of the Dagestan State Univ.], 2015, vol. 30, iss. 1, pp. 34–39.
8. Hromov A. P. Equiconvergence theorems for integrodifferential and integral operators. *Math. USSR Sb.*, 1982, vol. 42, iss. 3, pp. 331–355.

УДК 517.54

ОДНОРОДНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ГИЛЬБЕРТА С БЕСКОНЕЧНЫМ ИНДЕКСОМ НА ОКРУЖНОСТИ

А. Х. Фатыхов[1], П. Л. Шабалин[2]

[1]Фатыхов Азат Халитович, аспирант кафедры высшей математики, Казанский государственный архитектурно-строительный университет, vitofat@gmail.com

[2]Шабалин Павел Леонидович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики, Казанский государственный архитектурно-строительный университет, pavel.shabalin@mail.ru

В статье рассматривается краевая задача Гильберта теории аналитических функций с бесконечным индексом и краевым условием на окружности, коэффициенты краевого условия непрерывны по Гельдеру всюду, кроме одной особой точки, в которой аргумент функции коэффициентов имеет разрыв второго рода (степенного порядка с показателем, меньше единицы). В такой постановке задача с бесконечным индексом рассматривается впервые. Получены формулы общего решения однородной задачи, исследованы вопросы существования и единственности решения, описано множество решений в случае неединственности. При исследовании решения применялся аппарат теории целых функций и геометрической теории функций комплексного переменного.

Ключевые слова: задача Гильберта, бесконечный индекс, целые функции, индикатор роста.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-2-174-180

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $D = \left\{z = re^{i\theta} : 0 < r < 1,\ 0 \leqslant \theta < 2\pi\right\}$ — единичный круг в плоскости комплексного переменного z, $L = \partial D$. Рассмотрим краевую задачу Гильберта теории аналитических функций с краевым условием на единичной окружности

$$a(t)\operatorname{Re}\Phi(t) - b(t)\operatorname{Im}\Phi(t) = c(t), \qquad t \in L, \qquad t \neq 1,$$

и двусторонним завихрением в точке $t = 1$, которая относится к краевым задачам с бесконечным индексом, по терминологии Н. В. Говорова [1]. По этой тематике после основополагающих исследований Н. В. Говорова (см. [1] и библиографию) появилось много работ (см., например, [2–5]), в которых контуром служила вещественная ось, а завихрение (т. е. точка разрыва второго рода у аргумента функции коэффициентов) располагалось в бесконечно удаленной точке. Мы впервые рассмотрим задачу, когда контур и точка нарушения непрерывности коэффициентов краевого условия конечны.

Будем считать, что коэффициенты краевого условия $a(t)$, $b(t)$ непрерывны в каждой точке t окружности L, кроме $t = 1$. Краевое условие задачи Гильберта обычно записывают в виде

$$\operatorname{Re}[e^{-i\nu(t)}\Phi(t)] = \frac{c(t)}{|G(t)|}, \tag{1}$$

где $G(t) = a(t) - ib(t)$, причем $a^2(t) + b^2(t) \neq 0$ всюду на L и функция $\nu(t) = \arg G(t)$, на L удовлетворяет условию Гельдера всюду, кроме окрестности точки $t = 1$, в которой она имеет разрыв второго рода. Именно при $t = e^{i\theta}$ справедливо представление

$$\nu(t) = \begin{cases} \dfrac{\nu^+}{\sin^\rho(\theta/2)} + \widetilde{\nu}(\theta), & 0 < \theta < \pi, \\ \dfrac{\nu^-}{\sin^\rho(\theta/2)} + \widetilde{\nu}(\theta), & \pi < \theta < 2\pi, \end{cases} \tag{2}$$

для некоторых чисел ν^+, ν^-, ρ, $0 < \rho < 1$, функция $\widetilde{\nu}(\theta)$ удовлетворяет условиям $\widetilde{\nu}(0) = \widetilde{\nu}(2\pi)$ и $\widetilde{\nu}(\pi+) - \widetilde{\nu}(\pi-) = \nu^+ - \nu^-$.

Требуется определить функцию $\Phi(z)$, аналитическую и ограниченную в области D по краевому условию однородной задачи Гильберта:

$$a(t)\operatorname{Re}\Phi(t) - b(t)\operatorname{Im}\Phi(t) = 0, \qquad t \in L.$$

2. РЕШЕНИЕ ОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ

Для аналитического выделения особенности (2) краевое условие однородной задачи с учетом (1) перепишем в виде

$$\operatorname{Re}[e^{-i\nu(t)}\Phi(t)] = 0 \tag{3}$$

и рассмотрим аналитическую в области D функцию

$$P(z) + iQ(z) = \frac{le^{i\alpha}}{(z-1)^\rho},$$

где l, α — действительные постоянные, $l > 0$, $0 < \theta < 2\pi$. Эта функция на окружности L принимает значения

$$P(e^{i\theta}) + iQ(e^{i\theta}) = \frac{l}{2^\rho \sin^\rho(\theta/2)}\left[\cos\Big(\alpha - \frac{(\theta+\pi)\rho}{2}\Big) + i\sin\Big(\alpha - \frac{(\theta+\pi)\rho}{2}\Big)\right]. \tag{4}$$

Выберем числа l, $l > 0$, и α, $0 < \alpha < 2\pi$, так, чтобы выполнялись условия

$$\begin{cases} \dfrac{l}{2^\rho}\cos(\alpha - \dfrac{\pi}{2}\rho) = \nu^+, \\ \dfrac{l}{2^\rho}\cos(\alpha - \dfrac{3\pi}{2}\rho) = \nu^-. \end{cases} \tag{5}$$

Система (5) имеет единственное решение:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{\nu^- - \nu^+\cos(\pi\rho)}{\nu^+\sin(\pi\rho)}\right) + \frac{\pi}{2}\rho,$$
$$l = \frac{2^\rho}{\sin(\pi\rho)}\sqrt{{\nu^-}^2 - 2\nu^-\nu^+\cos(\pi\rho) + {\nu^+}^2},$$

учтя которое перепишем формулу (4) в виде

$$P(e^{i\theta}) = \frac{\nu^+ \sin(\pi\rho - \theta\rho/2) + \nu^- \sin(\theta\rho/2)}{\sin^\rho(\theta/2)\sin(\pi\rho)}, \tag{6}$$

$$Q(e^{i\theta}) = \frac{\nu^- \cos(\theta\rho/2) - \nu^+ \cos(\pi\rho + \theta\rho/2)}{\sin^\rho(\theta/2)\sin(\pi\rho)}. \tag{7}$$

Таким образом, для функции $\hat{\nu}(e^{i\theta}) = \nu(e^{i\theta}) - P(e^{i\theta})$ справедливы формулы

$$\hat{\nu}(e^{i\theta}) = 2\frac{\nu^+ \cos(\pi\rho - \theta\rho/4) - \nu^- \cos(\theta\rho/4)}{\sin\pi\rho} \cdot \frac{\sin(\theta\rho/4)}{\sin^\rho(\theta/2)} + \widetilde{\nu}(\theta), \qquad \theta \in (0, \pi),$$

$$\hat{\nu}(e^{i\theta}) = 2\frac{\nu^- \cos(\pi\rho/2 + \theta\rho/4) - \nu^+ \cos(\pi\rho/2 - \theta\rho/4)}{\sin\pi\rho} \cdot \frac{\sin(\pi\rho/2 - \theta\rho/4)}{\sin^\rho(\theta/2)} + \widetilde{\nu}(\theta), \qquad \theta \in (\pi, 2\pi),$$

из которых ясно, что функция $\hat{\nu}(t)$ непрерывна по Гельдеру на окружности L. Краевое условие однородной задачи (3) запишем в виде

$$\operatorname{Re}\left[e^{-i\Gamma(t)} \exp\left\{-i\frac{le^{i\alpha}}{(t-1)^\rho}\right\}\Phi(t)\right] = 0, \tag{8}$$

где $\Gamma(t)$ — краевое значение на окружности L аналитической в D и непрерывной в $\overline{D}$ функции

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \hat{\nu}(\theta)\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}d\theta.$$

Рассмотрим аналитическую в круге D функцию

$$F(z) = ie^{-i\Gamma(z)}e^{-i\frac{le^{i\alpha}}{(z-1)^\rho}}\Phi(z), \tag{9}$$

граничные значения которой в силу (8) удовлетворяют условию

$$\operatorname{Im} F(t) = 0, \qquad t \in L, \qquad t \neq 1, \tag{10}$$

всюду на L, кроме точки $t = 1$. Выразим из равенства (9) искомую функцию

$$\Phi(z) = -ie^{i\Gamma(z)}e^{i\frac{le^{i\alpha}}{(z-1)^\rho}}F(z). \tag{11}$$

Потребуем, чтобы аналитическая в D функция $F(z)$, кроме условия (10), удовлетворяла еще неравенству

$$|F(t)| \leqslant Ce^{Q(t)}, \qquad C = \text{const}, \qquad t \in L. \tag{12}$$

Поскольку в силу (12) всюду на L выполняется неравенство $|F(t)|e^{-Q(t)} \leqslant C$, то по принципу максимума модуля функция (11) будет ограниченной в D.

Таким образом, доказана

Теорема 1. *Общее решение однородной краевой задачи в классе ограниченных в D функций дается формулой* (11)*, где $F(z)$ — произвольная аналитическая в D функция, принимающая на единичной окружности чисто мнимые значения и удовлетворяющая на границе условию* (12).

3. УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ

Из теоремы 1 следует, что существование и число решений зависит от существования и множества функций $F(z)$, удовлетворяющих условиям (10), (12). Для изучения последнего вопроса пересадим функцию $F(z)$ в верхнюю полуплоскость $E^+ = \{\zeta : \zeta = \xi + i\eta, \eta > 0\}$ функцией

$$z = z(\zeta), \qquad z(\zeta) = \frac{\zeta - i}{\zeta + i}.$$

Получим аналитическую в E^+ функцию $F_1(\zeta) = F \circ z(\zeta)$, удовлетворяющую условию $\operatorname{Im} F_1(\xi) = 0$. Следовательно, $F_1(\zeta)$ можно по симметрии продолжить на всю комплексную плоскость. Таким образом, $F_1(\zeta)$ является целой функцией. В силу формулы (9) имеем $F_1(\zeta) = \exp\{\zeta^\rho\}O(1)$, $\zeta \to \infty$. Ясно, что $F_1(\zeta)$ является целой функцией порядка не выше ρ. Граничные значения этой функции определяются формулами

$$F_1(\xi) = e^{-i\Gamma_1(\xi)} e^{-i(P_1(\xi)+iQ_1(\xi))}\Phi_1(\xi), \qquad \Phi_1(\zeta) = \Phi \circ z(\zeta), \qquad \Gamma_1(\zeta) = \Gamma \circ z(\zeta),$$

где $P_1(\xi) + iQ_1(\xi)$ — значения на вещественной оси функции

$$P_1(\zeta) + iQ_1(\zeta) = (P + iQ) \circ z(\zeta) = \left[\nu^- + i\frac{\nu^- \cos(\pi\rho) - \nu^+}{\sin(\pi\rho)}\right] \zeta^\rho \left(1 + \frac{i}{\zeta}\right)^\rho,$$

которую представим в следующем виде:

$$P_1(re^{i\theta}) + iQ_1(re^{i\theta}) = \left[\nu^- e^{i\rho\theta} + i\frac{\nu^- \cos(\pi\rho) - \nu^+}{\sin(\pi\rho)} e^{i\rho\theta}\right] r^\rho + O\left(\frac{1}{r^{1-\rho}}\right). \tag{13}$$

Отсюда получаем представление для граничных значений:

$$P_1(\xi) + iQ_1(\xi) = \begin{cases} \left[\nu^- + i\dfrac{\nu^- \cos(\pi\rho) - \nu^+}{\sin(\pi\rho)}\right] \xi^\rho + O\left(\dfrac{1}{\xi^{1-\rho}}\right), & \xi \to +\infty, \\ \left[\nu^+ + i\dfrac{\nu^- - \nu^+ \cos(\pi\rho)}{\sin(\pi\rho)}\right] |\xi|^\rho + O\left(\dfrac{1}{|\xi|^{1-\rho}}\right), & \xi \to -\infty. \end{cases} \tag{14}$$

Справедлива

Теорема 2. *Пусть $\rho < 1/2$. Тогда однородная краевая задача:*

1) не имеет нетривиальных ограниченных решений, если $\nu^- \cos(\pi\rho) - \nu^+ < 0$ либо $\nu^+ \cos(\pi\rho) - \nu^- > 0$;

2) имеет единственное решение вида

$$\Phi(z) = -iAe^{\Gamma(z)} e^{-l\frac{e^{i\alpha}}{(z-1)^\rho}}, \qquad A = \text{const}, \qquad \operatorname{Im} A = 0,$$

если

$$\begin{cases} \nu^- \cos(\pi\rho) - \nu^+ = 0, \\ \nu^+ \cos(\pi\rho) - \nu^- < 0, \end{cases} \tag{15}$$

либо

$$\begin{cases} \nu^+ \cos(\pi\rho) - \nu^- = 0, \\ \nu^- \cos(\pi\rho) - \nu^+ > 0; \end{cases} \tag{16}$$

3) имеет бесконечное множество решений вида (11), *где $F(z)$ — произвольная аналитическая в D функция, принимающая на единичной окружности вещественные значения и удовлетворяющая на границе условию* (12), *если $\nu^- \cos(\pi\rho) - \nu^+ > 0$ и $\nu^+ \cos(\pi\rho) - \nu^- < 0$.*

Доказательство. В самом деле, пусть $\rho < 1/2$ и имеет место неравенство

$$\nu^- \cos(\pi\rho) - \nu^+ < 0,$$

тогда согласно первой из формул (14) будет выполнено $\lim_{\xi\to+\infty} Q_1(\xi) = -\infty$. В силу неравенства (12) будет выполнено условие

$$|F_1(\xi)| \leqslant Ce^{Q_1(\xi)}, \qquad C = \text{const}, \tag{17}$$

и, следовательно, $\lim_{\xi\to+\infty} |F_1(\xi)| = 0$. В силу зеркальной симметрии функции $F_1(\zeta)$ относительно вещественной оси последнее равенство будет выполнено и для нижнего берега разреза, проведенного по положительной действительной полуоси. По принципу Фрагмена – Линделёфа для плоскости, разрезанной по положительной полуоси, получим $F_1(\zeta) \equiv 0$. Ясно, что тогда и $F(z) \equiv 0$. К такому же выводу придем в случае $\rho < 1/2$ и условия $\nu^+ \cos(\pi\rho) - \nu^- > 0$, если использовать вторую формулу (14).

Если выполнено условие (15) либо (16), то по принципу Фрагмена – Линделёфа для плоскости, разрезанной по действительной полуоси, с последующим применением теоремы Лиувилля, получим $F_1(\zeta) \equiv A$, $A = \mathrm{const}$, но тогда и $F(z) \equiv A$, т. е. получим единственное, с точностью до постоянного сомножителя, решение однородной задачи.

Пусть, наконец, выполнены условия $\nu^- \cos(\pi\rho) - \nu^+ > 0$ и $\nu^+ \cos(\pi\rho) - \nu^- < 0$. Неравенство (17) с учетом формул (14) представим в виде

$$|F_1(\xi)| \leqslant C \left\{ \begin{array}{ll} \exp\left\{ \dfrac{\nu^- \cos(\pi\rho) - \nu^+}{\sin(\pi\rho)} \xi^\rho + O\left(\dfrac{1}{\xi^{1-\rho}}\right)\right\}, & \xi \to +\infty, \\ \exp\left\{ \dfrac{\nu^- - \nu^+ \cos(\pi\rho)}{\sin(\pi\rho)} |\xi|^\rho + O\left(\dfrac{1}{|\xi|^{1-\rho}}\right)\right\}, & \xi \to -\infty. \end{array} \right. \tag{18}$$

Ясно, что такому соотношению будут удовлетворять бесконечное множество целых функций $F_1(\zeta)$ порядка не выше, чем ρ, с зеркальной симметрией относительно вещественной оси. Сужение этих функций на верхнюю полуплоскость, пересаженное затем при помощи функции $\zeta(z)$ в круг, определяет множество функций $F(z)$, удовлетворяющих условию (12) и принимающих на единичной окружности чисто мнимые значения. □

Примеры построения целых функций заданного порядка с зеркальной симметрией относительно вещественной оси и указанным выше асимптотическим поведением приведены в работе [6], см., также [5, с. 98].

Теорема 3. *Если $1 > \rho \geqslant 1/2$ и выполняется условие $\nu^- < 0$ или $\nu^+ > 0$, то однородная краевая задача имеет лишь нулевое решение; если $1 > \rho \geqslant 1/2$ и выполняется условие $\nu^- \geqslant 0$ и $\nu^+ \leqslant 0$, то однородная краевая задача имеет бесконечное множество решений вида* (11), *где $F(z)$ — произвольная аналитическая в D функция, принимающая на единичной окружности вещественные значения и удовлетворяющая на границе условию* (12).

Доказательство. Пусть $\rho \geqslant 1/2$ и выполняется условие $\nu^- < 0$. Если однородная задача (8) имеет нетривиальное ограниченное решение (11) с неравной тождественно нулю функцией $F(z)$, то построенная по $F(z)$ целая функция $F_1(\zeta)$ порядка $\rho_{F_1} \leqslant \rho$ имеет индикатор

$$h_{F_1}(\theta) := \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln|F_1(re^{i\theta})|}{r^{\rho_{F_1}}},$$

удовлетворяющий в силу условия (17) неравенству

$$h_{F_1}(\theta) \leqslant \varlimsup_{r\to\infty} \frac{Q_1(re^{i\theta})}{r^{\rho_{F_1}}}.$$

Отсюда следует, что если $\rho_{F_1} < \rho$, то $h_{F_1}(\theta) = -\infty$, что сразу же влечет $F_1(\zeta) \equiv 0$. Поэтому нужно считать, что $\rho_{F_1} = \rho$. Но тогда из представления (13) получим:

$$Q_1(re^{i\pi/(2\rho)}) = \nu^- r^\rho + O\left(\frac{1}{r^{1-\rho}}\right) < 0, \qquad r \to +\infty,$$

откуда и в силу зеркальной симметрии функции $F_1(\zeta)$ для индикатора получим оценку

$$h_{F_1}(\pi/(2\rho)) = h_{F_1}(-\pi/(2\rho)) \leqslant \nu^- < 0.$$

Последнее противоречит известному соотношению [7, с. 84]

$$h_{F_1}(\theta + \pi/\rho) + h_{F_1}(\theta) \geqslant 0$$

при $\theta = -\pi/(2\rho)$. Поскольку

$$Q_1(re^{i(\pi - \pi/(2\rho))}) = -\nu^+ r^\rho + O\left(\frac{1}{r^{1-\rho}}\right) < 0, \qquad r \to +\infty,$$

следовательно, $h_{F_1}(\pi - \pi/(2\rho)) \leqslant -\nu^+ < 0$ и в силу симметрии $h_{F_1}(\pi + \pi/(2\rho)) < 0$, то приходим к противоречию и при $\theta = \pi - \pi/(2\rho)$. Таким образом, при выполнении условий $\nu^- < 0$ или $\nu^+ > 0$ нетривиального ограниченного решения задачи (8) не существует.

Пусть теперь выполнены условия $\nu^- \geqslant 0$ и $\nu^+ \leqslant 0$, при этом, разумеется, хотя бы одно из неравенств строгое. Тогда если $\nu^- \cos(\pi\rho) - \nu^+ > 0$ и $\nu^- - \nu^+ \cos(\pi\rho) > 0$, то существование аналитических в D функций, принимающих на единичной окружности вещественные значения и удовлетворяющих на границе условию (12), следует из очевидного существования бесконечного множества целых функций порядка не выше ρ, удовлетворяющих условию зеркальной симметрии и неравенствам (18). Если же выполнены условия $\nu^- \cos(\pi\rho) - \nu^+ > 0$ и $\nu^- - \nu^+ \cos(\pi\rho) \leqslant 0$ либо $\nu^- \cos(\pi\rho) - \nu^+ \leqslant 0$ и $\nu^- - \nu^+ \cos(\pi\rho) > 0$, то в работах [5, 6, с. 98] доказано, что существует бесконечное множество целых функций порядка ρ, удовлетворяющих условию зеркальной симметрии и неравенствам (18). $\square$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00371-а).

Библиографический список

1. *Говоров Н. В.* Краевая задача Римана с бесконечным индексом. М. : Наука, 1986. 239 с.
2. *Толочко М. Э.* О краевой задаче Римана с бесконечным индексом для полуплоскости // Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. науки. 1969. № 4. С. 52–59.
3. *Сандрыгайло И. Е.* О краевой задаче Гильберта с бесконечным индексом для полуплоскости // Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. науки. 1974. № 6. С. 16–23.
4. *Монахов В. Н., Семенко Е В.* Краевые задачи с бесконечным индексом в пространствах Харди // Докл. АН СССР. 1986. Т. 291, № 3. С. 544–547.
5. *Салимов Р. Б., Шабалин П. Л.* Краевая задача Гильберта теории аналитических функций и ее приложения. Казань : Изд-во Казанск. мат. о-ва, 2005. 297 с.
6. *Салимов Р. Б., Шабалин П. Л.* О разрешимости однородной задачи Гильберта со счетным множеством точек разрыва коэффициентов и двусторонним завихрением на бесконечности порядка меньше 1/2 // Уфим. матем. журн. 2013. Т. 5, № 2. С. 82–93.
7. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М. : Гостехиздат, 1956. 632 с.

Investigation Riemann – Hilbert Boundary Value Problem with Infinite Index on Circle

A. K. Fatykhov[1], P. L. Shabalin[2]

[1]Azat K. Fatykhov, Kazan State University of Architecture and Engineering, 1, Zelenaya st., 420043, Kazan, Russia, vitofat@gmail.com

[2]Pavel L. Shabalin, Kazan State University of Architecture and Engineering, 1, Zelenaya st., 420043, Kazan, Russia, pavel.shabalin@mail.ru

We consider the Riemann – Hilbert boundary value problem of analytic function theory with infinite index and the boundary condition on the circumference. The boundary condition coefficients are Holder's continuous everywhere except one particular point where the coefficients have discontinuity of second kind (power order with the index is less than one). In this formulation the problem with infinite index is considered for the first time. As the result of the research, we obtained the formulas of the general solution of the homogeneous problem, investigated the existence and uniqueness of solutions, described the set of solutions in the case of non-uniqueness. In the study of solutions we applied the theory of entire functions and the geometrical theory of functions of complex variables.

Key words: Riemann – Hilbert boundary value problem, infinite index, entire function.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 14-01-00371-a).

References

1. Govorov N. V. *Riemann's boundary problem with infinite index*. Moscow, Nauka, 1986, 239 p. (in Russian).
2. Tolochko M. E. About the solvability of the homogeneous Riemann boundary value program for the half-plane with infinite index. *Izv. AN BSSR. Ser. Fiz.-matem. nauki*, 1969, no. 4, pp. 52–59 (in Russian).
3. Sandrygailo I. E. On Hilbert – Riemann boundary value program for the half-plane with infinite index. *Izv. AN BSSR. Ser. Fiz.-matem. nauki*, 1974, no. 6, pp. 872–875 (in Russian).
4. Monahov V. N., Semenko E. V. Boundary value problem with infinite index in Hardy spaces. *Dokl. Akad. Nauk USSR*, 1986, vol. 291, pp. 544–547 (in Russian).

5. Salimov R. B., Shabalin P. L. *Hilbert boundary value problem of the theory analytic functions and its applications*. Kazan, Kazan Math. Publ., 2005, 297 p. (in Russian).
6. Salimov R. B., Shabalin P. L. On solvability of homogeneous Riemann – Hilbert problem with a countable set of coefficients discontinuities and two-side curling at infinity of order less than 1/2. *Ufa Math. J.*, 2013, vol. 5, no. 2, pp. 82–93 (in Russian).
7. Levin B. Ya. *Distribution of zeros of entire functions*. Moscow, Gostekhizdat, 1956, 632 p. (in Russian).

УДК 519.642.8

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

А. А. Хромов

Хромов Александр Августович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений и прикладной математики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, KhromovAP@info.sgu.ru

Дано решение задачи о нахождении равномерных приближений к правой части линейного обыкновенного дифференциального уравнения общего вида в случае, когда заданы приближения к точному решению. Построенный метод имеет простую конструкцию, не требует дополнительной информации о точной правой части, дает равномерные приближения к ней на всем отрезке, не связан с краевыми условиями.

Ключевые слова: обыкновенное дифференциальное уравнение, регуляризация, оператор Стеклова.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-2-180-183

1. Рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_n(x)y(x) = f(x) \tag{1}$$

в предположении, что $y(x) \in C^n[0,1]$, $a_i(x) \in C[0,1]$, $i = 0, \ldots, n$.

Пусть $y(x)$ — решение некоторой краевой задачи для уравнения (1), и нам известно равномерное приближение $y_\delta(x)$ к $y(x)$ такое, что $\|y_\delta - y\|_{C[0,1]} \leqslant \delta$. Требуется по $y_\delta(x)$ и δ найти равномерные приближения к $f(x)$.

Эта задача поставлена некорректно и ее решение требует применения методов регуляризации [1].

В работе [2] предлагается несколько таких способов: либо свести задачу к задаче решения интегрального уравнения первого рода с ядром Грина, либо аппроксимировать производные с помощью разностных формул, либо свести вычисление каждой из производных к решению интегрального уравнения первого рода с оператором кратного интегрирования. Недостатками этих способов являются в первом случае трудности с обращением дифференциального оператора при произвольных краевых условиях, во втором случае — невозможность получить решение на всем отрезке $[0,1]$, так как аргументы в разностных формулах выводят нас за границы отрезка, а третий способ можно применить лишь в частном случае краевых условий. При этом в первом и третьем способах еще нужно найти метод регуляризации интегрального уравнения, не требующий никакой дополнительной информации о решении, а только его непрерывности, что является самостоятельной проблемой.

В [3] на базе операторов из [4] дается метод решения поставленной задачи при $n = 2$ применительно к известной обратной задаче для уравнения теплопроводности, свободный от указанных недостатков. В настоящей работе приводится обобщение метода из [3].

Используем семейство интегральных операторов из [5], равномерно аппроксимирующих непрерывную производную любого порядка функции, заданной на отрезке $[0,1]$. Оно имеет вид

$$T_{m\alpha}y = \begin{cases} T_{m\alpha 2}y, & x \in [0,1/2], \\ T_{m\alpha 1}y, & x \in [1/2,1], \end{cases}$$

где

$$T_{m\alpha 1}y \equiv D^m S_{\alpha 1}^{m+1} y = \alpha^{-(m+1)} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k F_1(x - k\alpha),$$