УДК 591.65

ОБ УТОЧНЕНИИ ОДНОЙ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ФОРМУЛЫ ДЛЯ КОНСТАНТЫ ЛЕБЕГА

И. А. Шакиров

Кандидат физико-математических наук, проректор по дополнительному образованию, Набережночелнинский институт социально-педагогических технологий и ресурсов, iskander@tatngpi.ru

Для константы Лебега классического полинома Лагранжа, определенного в четном числе узлов интерполяции, получена строгая двусторонняя оценка. На этой основе конкретизирована неопределенная величина $O(1)$ в известном асимптотическом равенстве для константы Лебега. Решены две актуальные задачи теории интерполирования, связанные с оптимальным выбором $O(1)$.

Ключевые слова: интерполяционный полином Лагранжа, верхняя и нижняя оценки константы Лебега, асимптотическое равенство, погрешность интерполяции.

ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известны теоретическое и прикладное значения тригонометрических полиномов Лагранжа. Достаточно полные сведения о них, а также об их интерполяционных характеристиках можно найти в монографиях В. Л. Гончарова [1], И. П. Натансона [2], С. Б. Стечкина, Ю. Н. Субботина [3], Н. П. Корнейчука [4], В. К. Дзядыка [5], А. А. Привалова [6], посвященных различным вопросам теории функций.

Для приближенного представления функции $x = x(t) \in C_{2\pi} = C[0, 2\pi]$ в приложениях часто используют интерполяционный полином Лагранжа:

$$\Phi_n^*(x,t) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{2n-1} x(t_k) D_n^*(t_k - t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} x(t_k) D_n^*(t_k - t) \qquad \left(D_n^*(u) = \frac{\sin nu}{2\operatorname{tg} 0.5u}\right), \tag{1}$$

определенный в четном числе $N = 2n$ равномерно распределенных узлов вида $t_k = \pi k/n$ $(k = \overline{0, 2n-1} \vee k = \overline{1, 2n},\ n \in \mathbb{N})$. При этом норма отклонения полинома (1) от функции $x(t)$ оценивается согласно фундаментальному неравенству:

$$\|x - \Phi_n^* x\|_{C[0,2\pi]} \leqslant (1 + \lambda_n^*) E_n^*(x) \qquad (\Phi_n^* : C_{2\pi} \to H_n^* \subset C_{2\pi}), \tag{2}$$

где $E_n^*(x)$ — наилучшее равномерное приближение функции $x(t)$ тригонометрическими полиномами из множества

$$H_n^* = \left\{ a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) + a_n \cos nt;\ a_k, b_k \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\lambda_n^* = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \operatorname{ctg} \frac{2k-1}{4n}\pi \qquad (n \in \mathbb{N}) \tag{3}$$

— константа Лебега полинома (1), $\lambda_n^* = \|\Phi_n^*\|_{C_{2\pi} \to C_{2\pi}}$ (см., например, [5, с. 43] и [7]).

Согласно неравенству (2) поведение последовательности величин $\lambda_n^* = \lambda^*(n)$ $(n \in \mathbb{N})$ имеет первостепенное значение при исследовании вопросов сходимости полиномов (1) к интерполируемой функции $x(t)$. Первоначально константа Лебега оценивалась сверху как $\lambda_n^* \leqslant O(\ln n)$ либо $\lambda_n^* \leqslant A + B\ln n$, например, $\lambda_n^* \leqslant 4 + \lg n$ [1], $\lambda_n^* \leqslant 8 + (4/\pi)\ln n$ [2]. Затем коэффициенты A, B многократно уточнялись. Было установлено асимптотическое равенство:

$$\lambda_n^* = \frac{2}{\pi}\ln n + O(1) \qquad (B = 2/\pi, \quad n \to \infty) \tag{4}$$

с неопределенной (но ограниченной) величиной $O(1)$. Используя явный вид константы Лебега (3), в работе [8, с. 106] уточнено поведение асимптотического равенства (4) при произвольно выбранных значениях n, т. е. получено неравенство вида $\lambda_n^* \leqslant 4/\pi + (2/\pi)\ln(4n/\pi)$ $(n \in \mathbb{N})$. В [9, с. 215] для неопределенной константы приведено соотношение $O(1) = 2(1 - 1/\pi)\theta_n$ $(\theta_n \in (0, 1))$, согласно которому $O(1) \to 0$ при приближении параметра θ_n к левой границе интервала $(0, 1)$, что указывает на не строгое оценивание величины $O(1)$ снизу. В случае интерполирования по узлам Чебышева в работах [10, 11] для неопределенной константы $O(1)$ содержится более точное выражение вида $O(1) = (2/\pi)[\gamma + \ln(1/\pi)] + o(1)$, где $\gamma = 0.577215\ldots$ — константа Эйлера.

Отметим, что в большинстве работ, посвященных данной проблематике, нижние оценки для неопределенной величины $O(1)$ и константы Лебега в основном отсутствуют либо являются грубыми.

Из вышесказанного следует, что исследование приближенного представления константы Лебега является одним из важнейших задач теории интерполирования функции. Она до сих пор окончательно не решена, т. е. в равенстве (4) не определено конкретное значение константы $O(1)$, которое сохраняло бы хорошую близость его левой и правой частей при произвольно взятых натуральных значениях параметра n. В связи с этим в данной работе ставятся и решаются две актуальные задачи, связанные с указанными проблемами.

Задача 1. *Определить наименьшее значение* A_1^* *неопределенной константы* $O(1)$ *в* (4) *так, чтобы для всех натуральных значений параметра* n *было выполнено неравенство* $\lambda_n^* \leqslant A_1^* + (2/\pi)\ln n \ \ (n \in \mathbb{N})$*, и оценить допущенную при этом погрешность*

$$\varepsilon^* = \sup\{A_1^* + (2/\pi)\ln n - \lambda_n^* |\ n \in \mathbb{N}\}. \tag{5}$$

Задача 2. *В случае положительного решения задачи 1 найти другую (отличную от* A_1^**) константу* A_2^* *так, чтобы величина абсолютной равномерной погрешности*

$$\overline{\varepsilon}^* = \sup\{|A_2^* + (2/\pi)\ln n - \lambda_n^*|\ |\ n \in \mathbb{N}\} \tag{6}$$

была бы меньше ранее найденного значения погрешности (5).

Ясно, что первая из них является экстремальной задачей, связанной с определением наилучшей равномерной верхней оценки для константы Лебега. Вторая задача по своей постановке не является экстремальной. Она связана с проблемой уменьшения величины погрешности (6) относительно (5), используя при этом свободу выбора неопределенной константы $O(1)$.

1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Введем классы дискретных функций V_δ^+ и V_δ^-, которые будут существенно использованы при доказательстве необходимых лемм, а также при решении поставленных во введении задач.

Определение 1. Строго монотонная функция $\varphi = \varphi(n)$ $(n \in D)$ дискретного аргумента, имеющая малое изменение δ области значений $R(\varphi)$, называется *функцией с малой монотонной вариацией*; множество таких функций обозначим через символ $V_\delta^\pm$, где $D = D(\varphi) \subseteq \mathbb{N}$; $\delta = \delta(\varphi) = \sup\{\varphi(n) |\ n \in D\} - \inf\{\varphi(n) |\ n \in D\}$ $(\delta \in (0, 0.2))$ — вариация функции в рассматриваемой области; знак «$+$» для класса возрастающих в области D функций, знак «$-$» для класса убывающих функций.

Заметим, что в процессе доказательства лемм и некоторых теорем будем использовать непрерывные продолжения функций $\varphi = \varphi(n)$ $(n \in D)$ из классов $V_\delta^\pm$ на область $\tilde{D} = \tilde{D}(\varphi) = \overline{(\inf D(\varphi), \sup D(\varphi))} \subset R$, состоящую из предельных точек (не дискретную область), для которых суть и формулировка определения 1, обозначения классов V_δ^+ и V_δ^- полностью сохраняются.

Лемма 1. *Функция дискретного аргумента*

$$\alpha_n = \alpha(n) = (1/n)\cos ec(\pi/2n) \qquad (\alpha:\ D \to R, \quad D = \mathbb{N} \setminus \{1\} = \{n |\ n \geqslant 2\}) \tag{7}$$

принадлежит классу V_δ^-*, а для ее образа и вариации верны соотношения:*

$$R(\alpha_n) = (2/\pi, \sqrt{2}/2] \subset (0.636, 0.708), \qquad \delta = \delta(\alpha_n) < 0.071, \quad \forall\ n \geqslant 2.$$

Доказательство. Функция $\alpha_n = \alpha(n)$ $(n \geqslant 2)$ является дискретным аналогом равномерно убывающей в области $\tilde{D} = [2, +\infty)$ непрерывно дифференцируемой функции $y = (1/x)\cos ec(\pi/2x)$. Для ее образа и вариации верны соотношения: $R(y) = (2/\pi, \sqrt{2}/2] \subset (0.636, 0.708)$ и $\delta = \delta(y) = \sqrt{2}/2 - 2/\pi < 0.071$. Следовательно, $\alpha_n \in V_\delta^-$.

Аналогичный результат получим, если функцию (7) представим в несколько другом виде $\alpha_n = \dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{\sin \pi/2n}{\pi/2n}\right)^{-1}$ $(n \geqslant 2)$ и при этом используем свойства первого замечательного предела. $\square$

Лемма 2. *Следующие далее зависимости $\varphi_k = \varphi_k(n)$ $(n \in D)$, выраженные через функцию* (7), *принадлежат классам $V_\delta^\pm$:*

$$\varphi_1(n) \equiv \alpha_n \cdot (1 + \cos(\pi/2n)) \in V_\delta^+, \qquad R(\varphi_1) = [1/2 + \sqrt{2}/2, 4/\pi) \subset (1.207, 1.274);$$
$$\varphi_2(n) \equiv \frac{2}{\pi} \ln \alpha_n \in V_\delta^-, \qquad R(\varphi_2) = \left[-\frac{1}{\pi}\ln 2, -\frac{2}{\pi}\ln\frac{\pi}{2}\right) \subset (-0.288, -0.220);$$
$$\varphi_3(n) \equiv ((9 - \sqrt{2})/8)\varphi_1 \in V_\delta^+, \qquad R(\varphi_3) = [(7 + 8\sqrt{2})/16, (9 - \sqrt{2})/2\pi) \subset (1.144, 1.208);$$
$$\varphi_4(n) \equiv ((\sqrt{2} - 1)/4)\varphi_1 \in V_\delta^+, \qquad R(\varphi_4) = [1/8, (\sqrt{2} - 1)/\pi) \subset [0.125, 0.132).$$

Доказательство. С целью исследования поведения функции $\varphi_1 = \varphi_1(n)$ $(n \geqslant 2)$ при помощи производной непрерывно продолжим ее на область $\tilde{D}$, где она к тому же является гладкой функцией, т. е. $\varphi_1(n) \in C'[2, +\infty)$.

Покажем, что производная функции $\varphi_1(n)$ положительна в области $\tilde{D}$, определим ее образ и оценим вариацию $\delta = \delta(\varphi_1)$:

$$\varphi_1'(n) = \left(\frac{1 + \cos(\pi/2n)}{n \sin(\pi/2n)}\right)' = \left(\frac{1}{n}\mathrm{ctg}\,(\pi/4n)\right)' = \frac{\pi(1 - (2n/\pi)\sin(\pi/2n))}{4n^3 \sin^2(\pi/4n)} =$$
$$= \frac{\pi}{4n}(\alpha_n)^2 \left[1 - \frac{\sin(\pi/2n)}{\pi/2n}\right] > 0, \quad \forall\ n \in \tilde{D};$$
$$R(\varphi_1) = [1/2 + \sqrt{2}/2, 4/\pi), \qquad \delta = \delta(\varphi_1) < 0.067.$$

Следовательно, $\varphi_1 \in V_\delta^+$.

Согласно лемме 1 функция $\alpha_n = \alpha(n)$ $(n \geqslant 2)$ принадлежит классу V_δ^-, и на основании известного свойства логарифма имеем $\varphi_2(n) = (2/\pi)\ln\alpha_n \in V_\delta^-$.

Остальные утверждения леммы 2 очевидны. □

Лемма 3. *В области D для функций $\varphi_5(n) \equiv 1 - \varphi_1(n) - \varphi_2(n) \in V_\delta^+$ и $\varphi_6(n) \equiv \varphi_4(n) + \varphi_5(n) \in V_\delta^+$ верны следующие соотношения:*

$$\begin{gathered} R(\varphi_5) = \left[\frac{1 - \sqrt{2}}{2} + \frac{1}{\pi}\ln 2, 1 - \frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi}\ln\frac{\pi}{2}\right) \subset (0.013, 0.015), \\ R(\varphi_6) = \left[\frac{5 - 4\sqrt{2}}{8} + \frac{1}{\pi}\ln 2, 1 - \frac{5 - \sqrt{2}}{\pi} + \frac{2}{\pi}\ln\frac{\pi}{2}\right) \subset (0.138, 0.147). \end{gathered} \tag{8}$$

Доказательство. Изучим поведение производной функции $\varphi_5 = \varphi_5(n)$ в расширенной области $\tilde{D} = [2, +\infty)$:

$$(\varphi_5)' = -\left(\frac{2}{\pi}\ln\alpha_n\right)' - \left(\frac{1 + \cos(\pi/2n)}{n\sin(\pi/2n)}\right)' = \frac{2\sin(\pi/2n) - (\pi/n)\cos(\pi/2n)}{\pi n \sin(\pi/2n)} - \frac{\pi}{2n^3} +$$
$$+ \frac{\sin(\pi/2n) + \sin(\pi/2n)\cos(\pi/2n) - (\pi/2n)\cos(\pi/2n) - (\pi/2n)\cos^2(\pi/2n)}{n^2\sin^2(\pi/2n)} =$$
$$= \frac{1}{2\pi n^3 \sin^2(\pi/2n)}[4n^2\sin^2(\pi/2n) + 2\pi n\sin(\pi/2n) - \pi^2(1 + \cos(\pi/2n)] =$$
$$= \frac{\pi}{2n}(\alpha_n)^2 \left\{\left[\left(\frac{\sin(\pi/2n)}{\pi/2n}\right)^2 + \frac{\sin(\pi/2n)}{\pi/2n} - 1\right] - \cos(\pi/2n)\right\}.$$

Разложение Тейлора $(1/90) \cdot (\pi/2n)^4 + o((\pi/2n)^4)$ функции в фигурных скобках имеет только положительные значения для всех $n \in \tilde{D}$, поэтому производная исследуемой функции всюду положительна. Следовательно, $\varphi_5 = \varphi_5(n)$ монотонно возрастает в рассматриваемой области, $R(\varphi_5) = \left[\frac{1 - \sqrt{2}}{2} + \frac{1}{\pi}\ln 2, 1 - \frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi}\ln\frac{\pi}{2}\right)$, $\delta = \delta(\varphi_5) = \frac{1 + \sqrt{2}}{2} - \frac{4}{\pi} + \frac{1}{\pi}\ln\frac{\pi^2}{8} < 0.001$, $\varphi_5(n) \in V_\delta^+$.

Функция $\varphi_6 = \varphi_6(n) (n \in \tilde{D})$ принадлежит классу V_δ^+ как линейная комбинация функций из этого же класса. □

Замечание 1. Леммы 1–3 доказаны в области $\tilde{D} = [2, +\infty)$ с использованием элементов дифференциального исчисления. Следовательно, все они справедливы в ее дискретной подобласти $D = \{n|\ n \geqslant 2\}$, чего достаточно для доказательства теорем следующего пункта.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В этом параграфе докажем три теоремы, которые позволят решить поставленные во введении задачи.

Теорема 1. *Для константы Лебега* (3) *справедлива двусторонняя оценка:*

$$\frac{5-\sqrt{2}}{4}\varphi_1(n) + \varphi_2(n) + \frac{2}{\pi}\ln n < \lambda_n^* < \varphi_1(n) + \varphi_2(n) + \frac{2}{\pi}\ln n, \qquad \forall\ n \geqslant 2, \tag{9}$$

где $\varphi_1(n)$, $\varphi_2(n)$ *— введенные в лемме 2 функции.*

Доказательство. Оценим константу $\lambda_n^* (n \geqslant 2)$ сверху и снизу:

$$\lambda_n^* = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \operatorname{ctg}\frac{t_k - \pi/2n}{2} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{n}\operatorname{ctg}\frac{t_1-\pi/2n}{2} + \sum_{k=2}^{n}\frac{\pi}{n}\operatorname{ctg}\frac{t_k-\pi/2n}{2}\right] < \frac{1}{n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4n} + \frac{1}{\pi}\int_{t_1}^{\pi}\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\,dt =$$

$$= \frac{\cos(\pi/4n)}{n\sin(\pi/4n)} + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2n}^{\pi/2}\operatorname{ctg} t\,dt = \frac{2\cos^2(\pi/4n)}{n\sin(\pi/2n)} + \frac{2}{\pi}\ln\frac{n}{n\sin(\pi/2n)} =$$

$$= \alpha_n(1+\cos(\pi/2n)) + \frac{2}{\pi}\ln\alpha_n + \frac{2}{\pi}\ln n;$$

$$\lambda_n^* = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4n} + \left[\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4n} + \sum_{k=2}^{n}\frac{\pi}{n}\operatorname{ctg}\frac{t_k-\pi/2n}{2}\right]\right\} >$$

$$> \frac{1}{\pi}\left\{\frac{3\pi}{4n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4n} + \left[\left(\frac{\pi}{4n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4n}\right)\cdot\frac{1}{2} + \left(\frac{\pi}{4n}\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4n}\right)\cdot\frac{1}{2} + \int_{t_1}^{\pi}\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\,dt\right]\right\} =$$

$$= \frac{3}{4n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4n} + \frac{1}{8n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4n} + \frac{1}{8n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4n}\cdot\frac{4\cos^2(\pi/4n)-3}{3-4\sin^2(\pi/4n)} + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2n}^{\pi/2}\operatorname{ctg} t\,dt \geqslant$$

$$\geqslant \left(\frac{7}{8} + \frac{3-2\sqrt{2}}{8}\right)\frac{1}{n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4n} + \frac{2}{\pi}\ln\alpha_n + \frac{2}{\pi}\ln n = \frac{5-\sqrt{2}}{4}\alpha_n\left(1+\cos\frac{\pi}{2n}\right) + \frac{2}{\pi}\ln\alpha_n + \frac{2}{\pi}\ln n,$$

где при проведении нижней оценки дополнительно использовано неравенство

$$\frac{4\cos^2(\pi/4n)-3}{3-4\sin^2(\pi/4n)} \geqslant 3 - 2\sqrt{2} \qquad (n \geqslant 2).$$

Итак, для константы Лебега имеет место двусторонняя оценка:

$$\frac{5-\sqrt{2}}{4}\alpha_n\left(1+\cos\frac{\pi}{2n}\right) + \frac{2}{\pi}\ln\alpha_n + \frac{2}{\pi}\ln n < \lambda_n^* < \alpha_n\left(1+\cos\frac{\pi}{2n}\right) + \frac{2}{\pi}\ln\alpha_n + \frac{2}{\pi}\ln n \qquad (n \geqslant 2),$$

равносильная неравенству (9) (см. обозначения функций в лемме 2). □

Замечание 2. В формуле (3) при значении параметра $n = 1$ для константы Лебега верно равенство $\lambda_1^* = 1$, используя которое двойное неравенство (9) перепишется в виде $(5-\sqrt{2})/4 < \lambda_1^* < 1$ $(n = 1)$. Другими словами, (9) останется непротиворечивым и при $n = 1$, если в нем строгое верхнее неравенство заменить на нестрогое:

$$((5-\sqrt{2})/4)\varphi_1(n) + \varphi_2(n) + (2/\pi)\ln n < \lambda_n^* \leqslant \varphi_1(n) + \varphi_2(n) + (2/\pi)\ln n, \quad \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

С учетом сказанного рассмотренный тривиальный случай включим в содержание предыдущих теорем для полноты их формулировок.

Полученные в теореме 1 результаты позволяют константу λ_n^* $(n \geqslant 2)$ приближенно заменить полусуммой ее верхней и нижней оценок, а затем и функциональной зависимостью $\mu_n^* = \mu^*(n) = 1 + (2/\pi)\ln n$:

$$\lambda_n^* \approx \frac{1}{2}\left(1 + \frac{5-\sqrt{2}}{4}\right)\alpha_n\left(1+\cos\frac{\pi}{2n}\right) + \frac{2}{\pi}\ln\alpha_n + \frac{2}{\pi}\ln n = \frac{9-\sqrt{2}}{8}\varphi_1(n) + \varphi_2(n) + \frac{2}{\pi}\ln n =$$

$$= \varphi_2(n) + \varphi_3(n) + \frac{2}{\pi}\ln n \approx 1 + \frac{2}{\pi}\ln n \equiv \mu_n^* \qquad (n \geqslant 2). \tag{10}$$

Если в (10) положим $n = 1$, то имеем непротиворечивые приближенные равенства:

$$\lambda_1^* \approx \varphi_2(1) + \varphi_3(1) + \frac{2}{\pi}\ln 1 \approx \mu_1^* \left(\Leftrightarrow 1 \approx \frac{9-\sqrt{2}}{8} \approx 1 \right),$$

причем $\lambda_1^* = \mu_1^*$.

Уточним поведение приближенной замены $\lambda_n^* \approx \mu_n^*$ $(n \in \mathbb{N})$ и оценим допущенную при этом погрешность.

Теорема 2. *Для константы Лебега* (3) *равномерно относительно значений аргумента n справедливо неравенство:*

$$\lambda_n^* \leqslant 1 + (2/\pi)\ln n = \mu_n^* \qquad (n \in \mathbb{N}), \tag{11}$$

в котором равенство достигается только при $n = 1$; для погрешности $\varepsilon_n^* = \mu_n^* - \lambda_n^*$ верна равномерная оценка

$$\varepsilon^* = \sup\{\varepsilon_n^* |\ n \in \mathbb{N}\} = 1 - (5-\sqrt{2})/\pi + (2/\pi)\ln(\pi/2) < 0.147. \tag{12}$$

Доказательство. Если в неравенстве (11) положим $n = 1$, то его левая и правая части совпадают, т. е. $\lambda_1^* = \mu_1^* = 1$, следовательно, $\varepsilon_1^* = 0$.

Пусть $n \geqslant 2$. Тогда с целью двусторонней оценки функции погрешности $\varepsilon_n^* = \varepsilon^*(n)$ $(n \geqslant 2)$ в двойном неравенстве (9) вычтем всюду $\mu_n^* = 1 + \dfrac{2}{\pi}\ln n$ и после некоторых преобразований получим (см. леммы 2 и 3):

$$\begin{gathered}
((5-\sqrt{2})/4)\varphi_1(n) + \varphi_2(n) - 1 < \lambda_n^* - \mu_n^* < \varphi_1(n) + \varphi_2(n) - 1 \quad \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \quad 1 - \varphi_1(n) - \varphi_2(n) < \mu_n^* - \lambda_n^* < 1 - \varphi_2(n) - ((5-\sqrt{2})/4)\varphi_1(n) \quad \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \quad 1 - \varphi_1(n) - \varphi_2(n) < \varepsilon_n^* < 1 - \varphi_1(n) - \varphi_2(n) + ((\sqrt{2}-1)/4)\varphi_1(n) \quad \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \quad \varphi_5(n) < \varepsilon_n^* < \varphi_6(n) \qquad (\varphi_5(n), \varphi_6(n) \in V_\delta^+, \quad n \geqslant 2).
\end{gathered} \tag{13}$$

Используя теперь содержащиеся в лемме 3 сведения о функциях (8), преобразуем неравенство (13):

$$\begin{gathered}
\inf\{\varphi_5(n) |\ n \in D\} \leqslant \varphi_5(n) < \varepsilon_n^* < \varphi_6(n) \leqslant \sup\{\varphi_6(n) |\ n \in D\}, \quad \forall\, n \geqslant 2 \quad \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \quad \frac{1-\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{\pi}\ln 2 < \varepsilon_n^* < 1 - \frac{5-\sqrt{2}}{\pi} + \frac{2}{\pi}\ln\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad 0.013 < \mu_n^* - \lambda_n^* < 0.147, \quad \forall\, n \geqslant 2.
\end{gathered}$$

Учитывая результаты тривиального случая $(n = 1 \;\Rightarrow\; \varepsilon_1^* = \mu_1^* - \lambda_1^* = 0)$, уточним последнее неравенство:

$$0 \leqslant \mu_n^* - \lambda_n^* < 0.147, \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant \sup\{\varepsilon_n^* |\ n \in \mathbb{N}\} < 0.147 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant \varepsilon^* < 0.147.$$

Из этих соотношений легко получим справедливость оценок (11) и (12). □

Следствие. *Единственным решением экстремальной задачи*

$$\inf_{A^* \in R}\{A^* |\ \lambda_n^* \leqslant A^* + (2/\pi)\ln n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\} \tag{14}$$

является константа $A^* = A_1^* = 1$.

Доказательство. Если в правой части неравенства (11) единицу заменим другим вполне определенным числом $\tilde{A}$, больше единицы, то согласно теореме 2 в (11) соответственно появится строгое неравенство, которое будет выполнено при любых натуральных значениях n, и при этом значение соответствующей погрешности увеличится по сравнению с (12). Следовательно, $\tilde{A}$ $(\tilde{A} > 1)$ никак не может быть решением задачи (14). Полагая обратное ($\tilde{A}$ есть решение (14)), сразу же обнаружим, что решением рассматриваемой экстремальной задачи является константа A' $(1 < A' < \tilde{A})$. Вывод: решение задачи (14) не может быть больше единицы.

Если же константу $\tilde{A}$ выбрать таким, что $\tilde{A} < 1$, то тогда неравенство (11) не будет выполнено для всех натуральных значений параметра n. Например, при значении параметра $n = 1$ всегда имеем $\lambda_1^* < \tilde{A} + (2/\pi)\ln 1 (\Leftrightarrow 1 < \tilde{A})$. Полученное противоречие вида $1 < \tilde{A} < 1$ показывает, что $\tilde{A}$ не может быть меньше единицы. Следовательно, единственным решением задачи 1 является константа $A^* = A_1^* = 1$. □

Теорема 3. *Для константы Лебега* (3) *имеет место приближенное равенство вида*

$$\lambda_n^* \approx 3/\pi + (2/\pi)\ln n \equiv \overline{\mu}_n^* \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

в котором для абсолютной погрешности $\overline{\varepsilon}_n^* = |\overline{\mu}_n^* - \lambda_n^*|$ *равномерно относительно значений аргумента* n *верна оценка*

$$\overline{\varepsilon}^* = \sup\{\overline{\varepsilon}_n^* |\ n \in \mathbb{N}\} = \sup\{|3/\pi + (2/\pi)\ln n - \lambda_n^*|\ |\ n \in \mathbb{N}\} < 0.102.$$

Доказательство. На этот раз для константы Лебега (3) согласно ранее использованной схеме (10) получим следующие приближенные равенства:

$$\lambda_n^* \approx \varphi_2(n) + \varphi_3(n) + (2/\pi)\ln n \approx 3/\pi + (2/\pi)\ln n \equiv \overline{\mu}_n^* \qquad (n \in \mathbb{N}). \tag{15}$$

Выбранная в приближенной замене (15) константа $A_2^* = 3/\pi$ ($A_2^* < A_1^* \Leftrightarrow 3/\pi < 1$) удовлетворяет основному условию существования решения задачи 2: $A_2^* \in [1, 1 - \varepsilon^*]$, где $\varepsilon^* = 1 - (5 - \sqrt{2})/\pi + (2/\pi)\ln(\pi/2) \approx 0.147$ — значение погрешности, определенное в предыдущей теореме 2.

Теперь оценим допущенную в приближенных заменах (15) погрешность, используя результаты теорем 1 и 2. Для этого в двойном неравенстве (9) всюду вычтем $\overline{\mu}_n^* = 3/\pi + (2/\pi)\ln n$ ($n \geqslant 2$), затем, используя обозначения лемм 2 и 3, последовательно упростим полученные соотношения:

$$\begin{gathered}((5-\sqrt{2})/4)\varphi_1(n) + \varphi_2(n) - 3/\pi < \lambda_n^* - \mu_n^* < \varphi_1(n) + \varphi_2(n) - 3/\pi \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad 1 - \varphi_1(n) - \varphi_2(n) - (1 - 3/\pi) < \mu_n^* - \lambda_n^* < \\ < 1 - \varphi_1(n) - \varphi_2(n) + ((\sqrt{2}-1)/4)\varphi_1(n) - (1 - 3/\pi) \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad \varphi_5(n) - (1 - 3/\pi) < \varepsilon_n^* < \varphi_6(n) - (1 - 3/\pi) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_7(n) < \varepsilon_n^* < \varphi_8(n) \\ (\varphi_7(n) \equiv \varphi_5(n) - (1 - 3/\pi), \qquad \varphi_8(n) \equiv \varphi_6(n) - (1 - 3/\pi), \qquad n \geqslant 2).\end{gathered} \tag{16}$$

Ясно, что вновь введенные функции $\varphi_7(n)$, $\varphi_8(n)$ принадлежат области V_δ^+, так как согласно лемме 3 таковыми являются функции $\varphi_5(n)$, $\varphi_6(n)$ $(n \geqslant 2)$. Для их образов и вариаций верны соотношения:

$$R(\varphi_7) = \left[\frac{3}{\pi} - \frac{1+\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{\pi}\ln 2,\ \frac{2}{\pi}\ln\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\pi}\right) \subset (-0.032, -0.030), \quad \delta = \delta(\varphi_7) < 0.001;$$

$$R(\varphi_8) = \left[\frac{3}{\pi} - \frac{3+4\sqrt{2}}{8} + \frac{1}{\pi}\ln 2,\ \frac{2}{\pi}\ln\frac{\pi}{2} - \frac{2-\sqrt{2}}{\pi}\right) \subset (0.093, 0.102), \quad \delta = \delta(\varphi_8) < 0.008.$$

Используя полученные сведения о функциях $\varphi_7(n)$, $\varphi_8(n)$ ($n \geqslant 2$), преобразуем неравенство (16):

$$\inf_{n\geqslant 2}\varphi_7(n) \leqslant \varphi_7(n) < \varepsilon_n^* < \varphi_8(n) \leqslant \sup_{n\geqslant 2}\varphi_8(n), \qquad \forall\ n \geqslant 2.$$

Отсюда

$$|\varepsilon_n^*| < \max\left\{\left|\inf_{n\geqslant 2}\varphi_7(n)\right|,\ \left|\sup_{n\geqslant 2}\varphi_8(n)\right|\right\} = \max\left\{\left|\frac{3}{\pi} - \frac{1+\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{\pi}\ln 2\right|,\ \left|\frac{2}{\pi}\ln\frac{\pi}{2} - \frac{2-\sqrt{2}}{\pi}\right|\right\} =$$
$$= \frac{2}{\pi}\ln\frac{\pi}{2} - \frac{2-\sqrt{2}}{\pi} < 0.102, \qquad \forall\ n \geqslant 2.$$

Учитывая результаты тривиального случая ($n = 1 \Rightarrow \varepsilon_1^* = 0$), уточним последнее неравенство:

$$|\varepsilon_n^*| < 0.102, \quad \forall\ n \in \mathbb{N} \qquad \Leftrightarrow \qquad \sup_{n\in\mathbb{N}}\overline{\varepsilon}_n^* < 0.102 \qquad \Leftrightarrow \qquad \overline{\varepsilon}^* < 0.102.$$

Теорема доказана. □

Замечание 3. Выбранная в условиях теоремы 3 константа $A_2^* = 3/\pi$ действительно является решением задачи 2, так как она обеспечивает требуемое уменьшение погрешности ($\overline{\varepsilon}^* < \varepsilon^*$). Однако из результатов теорем 2 и 3 следует, что внутри интервала $(1, 1-\varepsilon^*)$ существует «лучшая» константа A_3^*, которая позволяет уменьшить теоретически полученное значение погрешности ε^* (см. (12)) в два раза, т. е. до значения $\varepsilon^*/2 = 1/2 + (1/\pi)\ln(\pi/2) - (5-\sqrt{2})/2\pi \approx 0.073$.

Библиографический список

1. *Гончаров В. Л.* Теория интерполирования и приближения функций. М. ; Л. : ГТТИ, 1934.
2. *Натансон И. П.* Конструктивная теория функций. М. ; Л. : Гостехиздат, 1949.
3. *Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н.* Сплайны в вычислительной математике. М. : Наука, 1976.
4. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. М. : Наука, 1987.
5. *Дзядык В. К.* Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. Киев : Наук. думка, 1988.
6. *Привалов А. А.* Теория интерполирования функций : в 2 кн. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1990.
7. *Шакиров И. А.* О фундаментальных характеристиках семейства интерполяционных полиномов Лагранжа // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 1, ч. 2. С. 99–104.
8. *Габдулхаев Б. Г.* Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. Казань : Изд-во Казан. ун-та, 1980.
9. Бабенко К. И. Основы численного анализа. М. ; Ижевск : НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2002.
10. *Brutman L.* Lebesgue functions for polynomial interpolation – a survey // Ann. Numer. Math. 1997. Vol. 4. P. 111–127.
11. *Vertesi P.* On the Lebesgue function and Lebesgue constant : a tribute to Paul Erdos // Bolyai Society of Mathematical Studies. 2002. Vol. 11. P. 705–728.

On a Refinement of the Asymptotic Formula for the Lebesgue Constants

I. A. Shakirov

Naberezhnye Chelny Institute of Social Pedagogical Technologies and Resources, 28, Nizametdinov st., 423806, Naberezhniye Chelny, Tatarstan, Russia, iskander@tatngpi.ru

For the Lebesque constant of the classical Lagrange polynomial defined in the even number of nodes of interpolation, strict two-sided estimation is received. On this basis, an undefined value $O(1)$ is refined in the well-known asymptotic equality for the Lebesque constant. Two actual problems in the interpolation theory associated with the optimal choice of $O(1)$ are solved.

Key words: Lagrange interpolation polynomial, upper and lower assessment of the Lebesque constant, asymptotic equality, error of interpolation.

References

1. Goncharov V. L. *Teoriia interpolirovaniia i priblizheniia funktsii* [Interpolation theory and approximations of functions]. Moscow; Leningrad, GTTI, 1934 (in Russian).
2. Natanson I. P. *Constructive function theory*. Vol. 1–3. New York, F. Ungar Publ. Co., 1964–1965.
3. Stechkin S. B., Subbotin Yu. N. Splainy v vychislitel'noi matematike [Splins in computational mathematics]. Moscow, Nauka, 1976 (in Russian).
4. Korneichuk N. P. *Tochnye konstanty v teorii priblizheniia* [Constants in approximation theory]. Moscow, Nauka, 1987 (in Russian).
5. Dzyadyk V. K. *Approksimatsionnye metody resheniia differentsial'nykh i integral'nykh uravnenii* [Approximation Methods for solving Differential and Integral Equations]. Kiev, Naukova Dumka, 1988 (in Russian).
6. Privalov A. A. *Teoriia interpolirovaniia funktsii* [Interpolation of functions theory]. Saratov, Saratov Univ. Press, 1990 (in Russian).
7. Shakirov I. A. About the fundamental characteristics of the lagrange interpolation polynomials family. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2013, vol. 13, iss. 1, pt. 2, pp. 99–104 (in Russian).
8. Gabdulhaev B. G. *Optimal'nye approksimatsii reshenii lineinykh zadach* [Optimal approximations of linear problems solutions]. Kazan, Kazan Univer. Press, 1980 (in Russian).
9. Babenko K. I. *Osnovy chislennogo analiza* [Fundamentals of numerical analysis]. Moscow, Izhevsk, NIC Regular and chaotic dynamics, 2002 (in Russian).
10. Brutman L. Lebesgue functions for polynomial interpolation – a survey. *Ann. Numer. Math.*, 1997, vol. 4, pp. 111–127.
11. Vertesi P. On the Lebesgue function and Lebesgue constant : a tribute to Paul Erdos. *Bolyai Society of Math. Studies*, 2002, vol. 11, pp. 705–728.