



УДК 531.38

БИКВАТЕРНИОННОЕ РЕШЕНИЕ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПРОГРАММНОГО ДВИЖЕНИЯ СВОБОДНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Ю. Н. Челноков¹, Е. И. Нелаева²

¹Челноков Юрий Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического и компьютерного моделирования, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского; заведующий лабораторией ИПТМУ РАН, chelnokovyun@info.sgu.ru

²Нелаева Екатерина Игоревна, аспирант кафедры математического и компьютерного моделирования, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, LomovtsevaEI@yandex.ru

Рассматривается в бикватернионной постановке кинематическая задача оптимальной нелинейной стабилизации произвольного программного движения свободного твердого тела. В качестве математической модели движения используется бикватернионное кинематическое уравнение возмущенного движения свободного твердого тела в двух различных формах, а в качестве управления — мгновенный винт скоростей движения тела. Каждый из минимизируемых функционалов характеризует собой интегральную величину энергетических затрат на управление и квадратичных отклонений параметров движения свободного твердого тела от их программных значений. С помощью принципа максимума Понтрягина построены законы оптимального управления и дифференциальные уравнения задачи оптимизации. Найдено аналитическое решение этой задачи. Приводятся результаты применения найденного закона кинематического управления к решению обратной задачи кинематики стэнфордского манипулятора.

Ключевые слова: оптимальное управление, твердое тело, бикватернион, обратная задача кинематики.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-2-198-207

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается в бикватернионной постановке кинематическая задача оптимальной нелинейной стабилизации произвольного программного движения свободного твердого тела. Кинематические задачи управления играют важную роль в теории управления движением твердого тела. Эти задачи во многих случаях имеют аналитические решения, которые часто используются при построении программных и стабилизирующих траекторий и управлений движением твердого тела. Использование аналитических решений кинематических задач управления в сочетании с методом решения обратных задач динамики позволяет в ряде случаев построить эффективные законы управления движением твердого тела, учитывающие его динамику. Задачи управления в кинематической постановке также рассматриваются в теории дифференциальных игр, бесплатформенных инерциальных навигационных системах, в механике роботов-манипуляторов, при решении задач наведения, анимации (оживления) пространственных образов на экранах ЭВМ.

В изучаемой задаче роль управления играет кинематический винт свободного твердого тела, фазовой переменной является нормированный бикватернион конечного перемещения твердого тела. Математическая модель движения имеет вид дифференциального бикватернионного кинематического уравнения движения свободного твердого тела. Производится построение оптимального стабилизирующего управления с использованием принципа максимума Понтрягина. Ошибка по местоположению твердого тела задается двумя способами с помощью бикватерниона ошибки местоположения, определенного своими компонентами либо в основной системе координат, либо в системе координат, связанной с твердым телом. Кроме того, рассматриваются два способа формирования полного управления: винтовой, когда это управление формируется в виде винтовой суммы стабилизирующего и программного управлений (кинематических винтов); формальный, когда дуальные ортогональные проекции полного управления на оси связанной системы координат формируются в виде суммы дуальных ортогональных проекций программного и стабилизирующего управлений на оси программной и связанной



систем координат соответственно (т.е. на оси разных систем координат). Полученные с помощью этих способов дифференциальные уравнения возмущенного движения различаются как по форме, так и по смыслу используемых переменных, что приводит к разным законам формирования управления.

В кватернионной постановке задачи управления вращательным движением твердого тела рассматривались в [1–10]. В работах [3, 9] изучалась задача кинематического оптимального (в смысле быстродействия) пространственного разворота твердого тела. В этой задаче роль управления играет вектор угловой скорости твердого тела. Фазовой переменной является нормированный кватернион ориентации твердого тела, математическая модель движения имеет вид дифференциального кватернионного кинематического уравнения вращательного движения. Граничные условия накладываются на кватернион ориентации твердого тела. Эта задача для интегрального квадратичного (в отношении проекций вектора абсолютной угловой скорости твердого тела) функционала качества изучалась в работе [7]. В работах [1–6] рассматривалась кинематическая задача управления ориентацией твердого тела в рамках теории нелинейной стабилизации (с использованием кватернионных уравнений углового движения в отклонениях и управления, построенного по принципу обратной связи), а в работах [8, 10] — в рамках теории оптимальной нелинейной стабилизации. Задача построения оптимального в смысле быстродействия винтового перемещения твердого тела из заданного начального положения в требуемое конечное в бикватернионной кинематической постановке изучалась в [9, 11]. Для решения задачи использованы бикватернионные кинематические уравнения винтового движения твердого тела, предложенные в [12]. В [13] изучалась задача построения с использованием принципа обратной связи кинематического винта скоростей, сообщение которого твердому телу обеспечивает его асимптотически устойчивый перевод из произвольного начального положения на любую выбранную программную траекторию винтового движения и дальнейшее асимптотически устойчивое движение по этой траектории.

Рассматриваемая задача является обобщением кинематической задачи оптимальной нелинейной стабилизации произвольного программного углового движения твердого тела, исследованной в [8, 10], на случай произвольного движения свободного твердого тела.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу построения оптимального кинематического стабилизирующего управления движением свободного твердого тела. В качестве управления в этой задаче рассматривается кинематический винт свободного твердого тела, при сообщении которого твердому телу оно переходит асимптотически устойчивым образом из любого, заранее не заданного начального положения на любую выбранную программную траекторию и в дальнейшем совершает асимптотически устойчивое движение по этой траектории. При этом должен выполняться некоторый критерий качества переходного процесса.

В соответствии с [13] уравнения возмущенного движения свободного твердого тела имеют вид

$$2\dot{\mathbf{M}} = \delta\mathbf{U}_\xi \circ \mathbf{M}, \quad (1)$$

$$2\dot{\mathbf{M}}^* = \dot{\mathbf{M}}^* \circ \Delta\mathbf{U}_x, \quad (2)$$

где \mathbf{M} , \mathbf{M}^* — бикватернионы ошибки ориентации и местоположения, характеризующие отклонение действительной ориентации и местоположения твердого тела от его программной ориентации и программного местоположения, причем бикватернион \mathbf{M}^* определен своими компонентами в связанной системе координат X , а \mathbf{M} — в основной (например, инерциальной) системе координат Ξ ; винты $\delta\mathbf{U}_\xi$ и $\Delta\mathbf{U}_x$ — это искомые стабилизирующие управления движением свободного твердого тела, \circ — символ бикватернионного умножения, верхняя точка означает производную по времени.

Бикватернионы \mathbf{M} и \mathbf{M}^* определяются соотношениями:

$$\mathbf{M} = \mathbf{\Lambda} \circ \bar{\mathbf{N}}(t), \quad \mathbf{M}^* = \bar{\mathbf{N}}(t) \circ \mathbf{\Lambda},$$

где $\mathbf{\Lambda}$ и $\mathbf{N}(t)$ — бикватернионы действительной и программной ориентации и местоположения твердого тела в инерциальной системе координат, верхняя черта — символ сопряжения бикватернионов.



Винты δU_ξ и ΔU_x (управления) определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} \delta U_\xi &= \mathbf{A} \circ \delta \mathbf{U}_x \circ \overline{\mathbf{A}}, & \delta \mathbf{U}_x &= \mathbf{U}_x - \mathbf{U}_z^{pr}(t), \\ \Delta U_x &= \mathbf{U}_x - \mathbf{U}_x^{pr} = \mathbf{U}_x - \overline{\mathbf{M}}^* \circ \mathbf{U}_z^{pr}(t) \circ \mathbf{M}^*, \end{aligned}$$

где \mathbf{U}_x — отображение кинематического винта твердого тела на оси связанной системы координат, \mathbf{U}_z^{pr} и \mathbf{U}_x^{pr} — отображения программного кинематического винта твердого тела на оси программной Z и связанной систем координат соответственно.

Выберем следующие функционалы минимизации:

$$J = \frac{1}{4} \int_0^\infty (\alpha_1 |\mathbf{M}_v|^2 + \alpha_2 |\delta \mathbf{U}_\xi|^2) dt, \quad (3)$$

$$J = \frac{1}{4} \int_0^\infty (\alpha_1 |\mathbf{M}_v^*|^2 + \alpha_2 |\Delta \mathbf{U}_x|^2) dt, \quad (4)$$

где α_1, α_2 — положительные весовые коэффициенты; $\mathbf{M}_v, \mathbf{M}_v^*$ — винтовые части бикватернионов \mathbf{M}, \mathbf{M}^* .

Каждый из функционалов характеризует собой интегральную величину энергетических затрат на управление и квадратичных отклонений параметров движения свободного твердого тела от их программных значений, взятых в определенной пропорции, определяемой величинами весовых коэффициентов α_1 и α_2 .

Задача заключается в построении стабилизирующих управлений δU_ξ и ΔU_x , обеспечивающих асимптотическую устойчивость невозмущенного движения $\mathbf{M} = \mathbf{M}^* = 1$ ($\mathbf{M}_v = \mathbf{M}_v^* = 0$) и доставляющих минимум функционалам (3), (4).

2. МЕТОДОЛОГИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Методология решения задачи одинакова как для бикватернионного уравнения возмущенного движения (1) и функционала качества (3), так и для уравнения (2) и функционала (4), поэтому далее будем рассматривать только задачу (1), (3), имея в виду, что полученный результат можно перенести на задачу (2), (4).

Для решения поставленной задачи воспользуемся принципом максимума Л. С. Понтрягина. Дуальная функция Гамильтона – Понтрягина для задачи, описываемой фазовым бикватернионным кинематическим уравнением (1) и функционалом качества (3), имеет вид

$$\begin{aligned} H &= -\frac{1}{4}(\alpha_1(M_1^2 + M_2^2 + M_3^2) + \alpha_2(\delta U_1^2 + \delta U_2^2 + \delta U_3^2)) + \\ &+ \frac{1}{2}(\Psi_0(-M_1\delta U_1 - M_2\delta U_2 - M_3\delta U_3) + \Psi_1(M_0\delta U_1 + M_3\delta U_2 - M_2\delta U_3) + \\ &+ \Psi_2(M_0\delta U_2 + M_1\delta U_3 - M_3\delta U_1) + \Psi_3(M_0\delta U_3 + M_2\delta U_1 - M_1\delta U_2)), \end{aligned} \quad (5)$$

где M_i ($i = \overline{0, 3}$) — компоненты бикватерниона \mathbf{M} (дуальные фазовые переменные), Ψ_i ($i = \overline{0, 3}$) — дуальные сопряженные переменные, δU_i ($i = \overline{0, 3}$) — компоненты кинематического винта δU_ξ (дуальные скалярные управления).

В соответствии с выражением (5) уравнения для дуальных сопряженных переменных запишутся в виде

$$\begin{aligned} 2\dot{\Psi}_0 &= -\frac{\partial H}{\partial M_0} = -(\Psi_1\delta U_1 + \Psi_2\delta U_2 + \Psi_3\delta U_3), \\ 2\dot{\Psi}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial M_1} = (\Psi_0\delta U_1 - \Psi_2\delta U_3 + \Psi_3\delta U_2) + \alpha_1 M_1, \\ 2\dot{\Psi}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial M_2} = (\Psi_0\delta U_2 + \Psi_1\delta U_3 - \Psi_3\delta U_1) + \alpha_1 M_2, \\ 2\dot{\Psi}_3 &= -\frac{\partial H}{\partial M_3} = (\Psi_0\delta U_3 - \Psi_1\delta U_2 + \Psi_2\delta U_1) + \alpha_1 M_3. \end{aligned}$$



Если ввести бикватернион Ψ , компонентами которого являются дуальные вспомогательные переменные Ψ_i , то уравнения для сопряженных переменных можно записать в бикватернионном виде:

$$2\dot{\Psi} = \alpha_1 \mathbf{M}_v + \delta \mathbf{U}_\xi \circ \Psi. \quad (6)$$

Согласно принципу максимума Понтрягина, для того чтобы управление \mathbf{U}_ξ было оптимальным, необходимо, чтобы функция Гамильтона – Понтрягина принимала максимальное значение. Применяя необходимое условие экстремума, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial U_1} &= -\frac{1}{2}\alpha_2 \delta U_1 + \frac{1}{2}(-\Psi_0 M_1 + \Psi_1 M_0 - \Psi_2 M_3 + \Psi_3 M_2) = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial U_2} &= -\frac{1}{2}\alpha_2 \delta U_2 + \frac{1}{2}(-\Psi_0 M_2 + \Psi_1 M_3 + \Psi_2 M_0 - \Psi_3 M_1) = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial U_3} &= -\frac{1}{2}\alpha_2 \delta U_3 + \frac{1}{2}(-\Psi_0 M_3 - \Psi_1 M_2 + \Psi_2 M_1 + \Psi_3 M_0) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда получим законы оптимального управления в виде функций компонент бикватерниона ошибки местоположения и сопряженных переменных:

$$\begin{aligned} \delta U_1 &= \frac{1}{\alpha_2}(-\Psi_0 M_1 + \Psi_1 M_0 - \Psi_2 M_3 + \Psi_3 M_2), \\ \delta U_2 &= \frac{1}{\alpha_2}(-\Psi_0 M_2 + \Psi_1 M_3 + \Psi_2 M_0 - \Psi_3 M_1), \\ \delta U_3 &= \frac{1}{\alpha_2}(-\Psi_0 M_3 - \Psi_1 M_2 + \Psi_2 M_1 + \Psi_3 M_0). \end{aligned}$$

Перепишем эти соотношения в бикватернионном виде:

$$\delta \mathbf{U}_\xi = \frac{1}{\alpha_2} \text{screw}(\Psi \circ \overline{\mathbf{M}}), \quad (7)$$

где $\text{screw}(\cdot)$ – винтовая часть бикватерниона, стоящего в круглых скобках.

Соотношение (7) представляет собой выражение стабилизирующего управления $\delta \mathbf{U}_\xi$ через сопряженные переменные и компоненты бикватерниона ошибки местоположения. Подчеркнем, что соотношение (7) справедливо в случае отсутствия ограничений на управление.

Подставляя соотношение (7) в фазовое уравнение (1) и уравнение для сопряженных переменных (6), получим уравнения задачи оптимального управления:

$$\begin{aligned} 2\dot{\mathbf{M}} &= \frac{1}{\alpha_2}(\Psi - \text{scal}(\Psi \circ \overline{\mathbf{M}})\mathbf{M}), \\ 2\dot{\Psi} &= \alpha_1 \mathbf{M}_v + \frac{1}{\alpha_2} \Psi \circ \overline{\mathbf{M}} \circ \Psi - \frac{1}{\alpha_2} \text{scal}(\Psi \circ \overline{\mathbf{M}})\Psi. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $\text{scal}(\cdot)$ – скалярная часть бикватерниона, стоящего в круглых скобках.

Полученные бикватернионные дифференциальные уравнения являются нелинейными и вряд ли могут быть решены аналитически в общем случае. Однако в случае, когда бикватернионная сопряженная переменная Ψ имеет нулевую винтовую часть, т. е. когда $\Psi = \psi_0$, эти уравнения интегрируются в явном виде. В этом случае закон управления (7) принимает вид

$$\delta \mathbf{U}_\xi = -\frac{1}{\alpha_2} \psi_0 \mathbf{M}_v. \quad (9)$$

Первое уравнение системы (8) с учетом (9) принимает вид

$$2\dot{\mathbf{M}} = \frac{1}{\alpha_2} \psi_0 (1 - M_0 \mathbf{M}). \quad (10)$$

Это дифференциальное уравнение интегрируется аналитически. Общее решение уравнения для переменной M_0 (дуальной скалярной части бикватерниона \mathbf{M}) имеет вид

$$M_0(t) = \frac{1 - c_0 \exp(-\psi_0 \frac{t}{\alpha_2})}{1 + c_0 \exp(-\psi_0 \frac{t}{\alpha_2})}, \quad c_0 = \frac{1 - M_0(0)}{1 + M_0(0)},$$



где c_0 — дуальная скалярная постоянная, определяемая начальными условиями движения (при $t = 0$ $M_0 = M_0(0)$).

Интегрирование уравнения (10) для переменных M_k ($k = \overline{1, 3}$) (компонент винтовой части бикватерниона \mathbf{M}) дает

$$|M_k(t)| = |M_k(0)| \exp\left(-\frac{\psi_0}{2\alpha_2}\right) \int_0^t (M_0(\tau) d\tau), \quad k = \overline{1, 3}.$$

Из второго уравнения (8) и соотношения (9) следует, что

$$\psi_0 = \pm \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}.$$

Из полученного закона изменения переменной M_0 видно, что невозмущенное движение для оптимального закона управления (9) асимптотически устойчиво при $\psi_0 > 0$, т.е. когда $\psi_0 = \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}$.

Следовательно, оптимальный закон стабилизирующего управления имеет вид

$$\delta \mathbf{U}_\xi = -\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \mathbf{M}_v, \quad (11)$$

а соответствующие ему оптимальные законы изменения дуальных параметров Эйлера M_i ($i = \overline{0, 3}$), характеризующих управляемое угловое движение свободного твердого тела, описываются соотношениями

$$M_0(t) = \frac{1 - c_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} t\right)}{1 + c_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} t\right)}, \quad c_0 = \frac{1 - M_0(0)}{1 + M_0(0)},$$

$$|M_k(t)| = |M_k(0)| \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) \int_0^t (M_0(\tau) d\tau), \quad k = \overline{1, 3}.$$

Аналогичным образом могут быть получены закон оптимального управления и соответствующие ему законы изменения дуальных параметров Эйлера для задачи, описываемой уравнением возмущенного движения (2) и функционалом минимизации (4):

$$\Delta \mathbf{U}_x = -\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \mathbf{M}_v^*,$$

$$M_0^*(t) = \frac{1 - c_0^* \exp\left(-\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} t\right)}{1 + c_0^* \exp\left(-\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} t\right)}, \quad c_0^* = \frac{1 - M_0^*(0)}{1 + M_0^*(0)},$$

$$|M_k^*(t)| = |M_k^*(0)| \exp\left(\left(-\frac{1}{2} \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) \int_0^t (M_0^*(\tau) d\tau)\right), \quad k = \overline{1, 3}.$$

Оптимальное движение свободного твердого тела в текущий момент времени t представляет собой мгновенное винтовое движение вокруг оси, имеющей в инерциальной системе координат направление, противоположное направлению винта $\mathbf{M}_v(t) = \text{screw}(\mathbf{\Lambda}(t) \circ \overline{\mathbf{N}}(t))$, а в связанной системе координат — винта $\mathbf{M}_v^*(t) = \text{screw}(\overline{\mathbf{N}}(t) \circ \mathbf{\Lambda}(t))$.

3. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ

Полученные законы управления применим для решения обратной задачи кинематики стэнфордского манипулятора. Обратная задача кинематики заключается в определении фазовых координат манипулятора по известному угловому и линейному местоположению выходного звена. Методология решения обратной задачи кинематики роботов-манипуляторов с использованием бикватернионной теории кинематического управления была описана в [13] и применялась в [14, 15].

Применение бикватернионной теории кинематического управления движением свободного твердого тела позволяет свести решение обратной задачи кинематики роботов-манипуляторов к решению задачи управления движением выходного звена манипулятора. При этом за программное (требуемое)



положение выходного звена манипулятора будем принимать то положение, для которого необходимо решить обратную задачу кинематики. Начальное положение выходного звена зададим произвольным набором значений обобщенных координат манипулятора из их рабочих диапазонов. В качестве управления будем использовать векторы угловой и линейной скоростей выходного звена манипулятора. Таким образом, в результате решения задачи управления получим набор обобщенных координат манипулятора, отвечающих заданному программному положению, т.е. одно из решений обратной задачи кинематики.

Рассмотрим численное решение обратной задачи кинематики стэнфордского манипулятора для заданного местоположения выходного звена, соответствующего следующим значениям обобщенных координат робота-манипулятора: $\varphi_1 = 20^\circ$, $\varphi_2 = 40^\circ$, $d_3 = 0.3$ м, $\varphi_4 = -35^\circ$, $\varphi_5 = 60^\circ$, $\varphi_6 = -45^\circ$. Начальное положение схвата манипулятора зададим следующим набором фазовых координат: $\varphi_1 = -30^\circ$, $\varphi_2 = 15^\circ$, $d_3 = 0.5$ м, $\varphi_4 = 36^\circ$, $\varphi_5 = -90^\circ$, $\varphi_6 = 45^\circ$. Шаг интегрирования выберем равным 0.01 с, отношение весовых коэффициентов примем $\alpha_1/\alpha_2 = 1$. Точность решения задачи будем полагать равной $\delta = 10^{-6}$. Под достижением заданной точности решения задачи будем понимать выполнение условий:

$$\sum_{i=0}^4 \|n_i\| - |\lambda_i| < \delta, \quad \sum_{i=0}^4 \|n_i^0\| - |\lambda_i^0| < \delta,$$

где n_i и n_i^0 — компоненты главной и моментной частей программного бикватерниона \mathbf{N} , а λ_i и λ_i^0 — компоненты главной и моментной частей бикватерниона текущего положения выходного звена манипулятора \mathbf{A} .

На рис. 1–3 приведены графики изменения компонент главной и моментной частей бикватерниона ошибки местоположения \mathbf{M}^* , компонент главной и моментной частей управления (угловой ω и линейной v скоростей выходного звена манипулятора), обобщенных координат. Время численного решения задачи с заданной точностью составило 11.72 с.

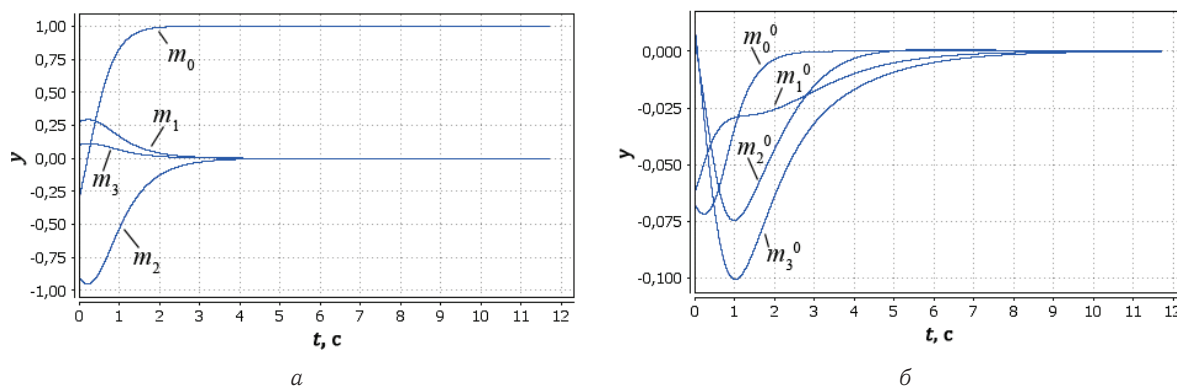


Рис. 1. Компоненты главной (а) и моментной (б) части бикватерниона ошибки местоположения

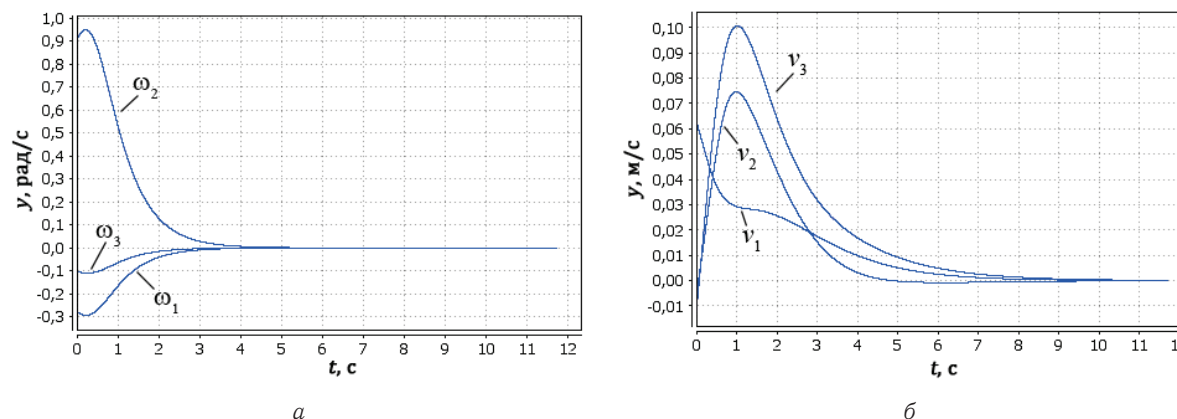


Рис. 2. Компоненты главной (а) и моментной (б) части управления

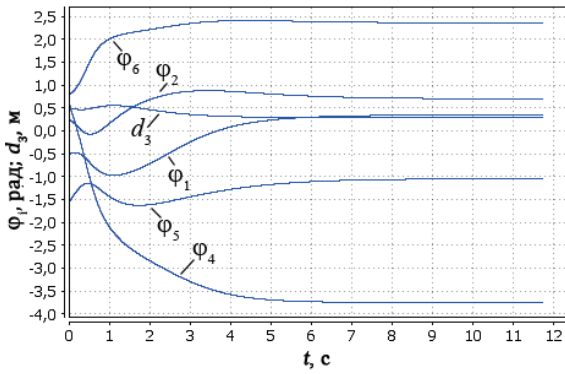


Рис. 3. Фазовые координаты

На рис. 1–3 ω_i и v_i — компоненты угловой ω и линейной \mathbf{v} скоростей выходного звена манипулятора, φ_i, d_3 ($i = 1, 2, 4, 5, 6$) — фазовые координаты стэнфордского манипулятора.

В результате численного решения были получены следующие значения обобщенных координат: $\varphi_1 = 20^\circ, \varphi_2 = 40^\circ, d_3 = 0.3 \text{ м}, \varphi_4 = -215^\circ, \varphi_5 = -60^\circ, \varphi_6 = 135^\circ$. Отметим, что в силу неоднозначности решения обратной задачи кинематики полученные значения фазовых координат могут отличаться от тех задаваемых значений, по которым вычислялся бикватернион программного положения выходного звена. Компоненты бикватерниона ошибки местоположения выходного звена в результате численного решения приняли следующие значения: $m_0 = 1, m_i = 0, m_j^0 = 0, i = \overline{1, 3}, j = \overline{0, 3}$. Таким образом, получили, как и следовало ожидать, что бикватернион $\mathbf{M}^*(t) \rightarrow 1$ при $t \rightarrow \infty$. Компоненты управления в процессе управляемого движения асимптотически стремятся к нулю.

Рассмотрим также численное решение обратной задачи кинематики для различных отношений весовых коэффициентов. Остальные начальные параметры будем задавать как в первом случае. Результаты решения задачи приведены в таблице.

Результаты решения задачи для различных отношений весовых коэффициентов

α_1/α_2	$t, \text{ с}$	$\max(\omega)$	$\max(\mathbf{v})$
0.01	117.74	0.1	0.003
0.05	52.62	0.224	0.007
0.1	37.17	0.316	0.01
0.5	16.60	0.707	0.023
1	11.72	1	0.032
5	5.2	2.236	0.072
10	3.66	3.162	0.101
50	1.6	7.071	0.215
100	1.12	10	0.307

В таблице $|\omega|$ и $|\mathbf{v}|$ — модули главной и моментной частей управления, определяемые по формулам:

$$|\omega(t)| = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} |\mathbf{m}_v(t)| = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2} (1 - (\mathbf{m}_0(t))^2)}, \quad |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} |\mathbf{m}_{v0}(t)|.$$

На рис. 4, 5 приведены графики изменения главной и моментной частей управления при $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = 0.05$ и $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = 50$.

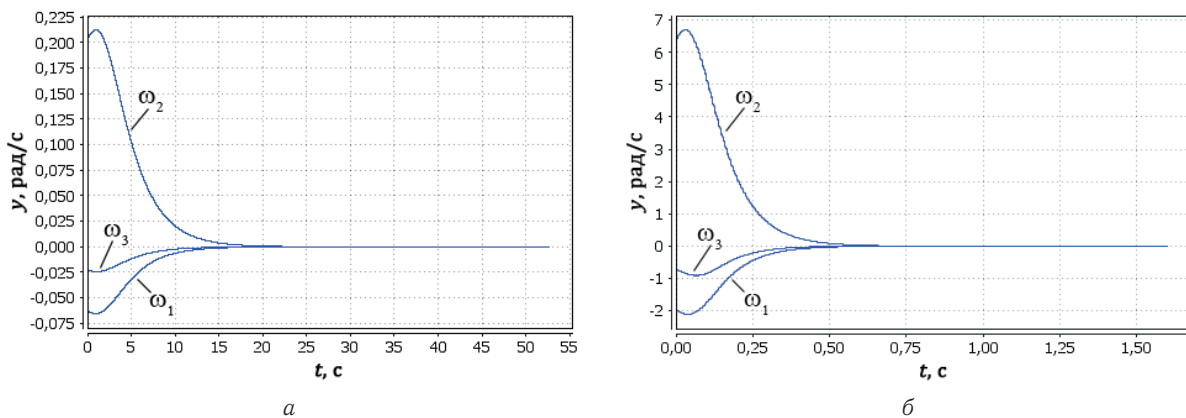


Рис. 4. Компоненты главной части управления при $\alpha_1/\alpha_2 = 0.05$ (а) и $\alpha_1/\alpha_2 = 50$ (б)

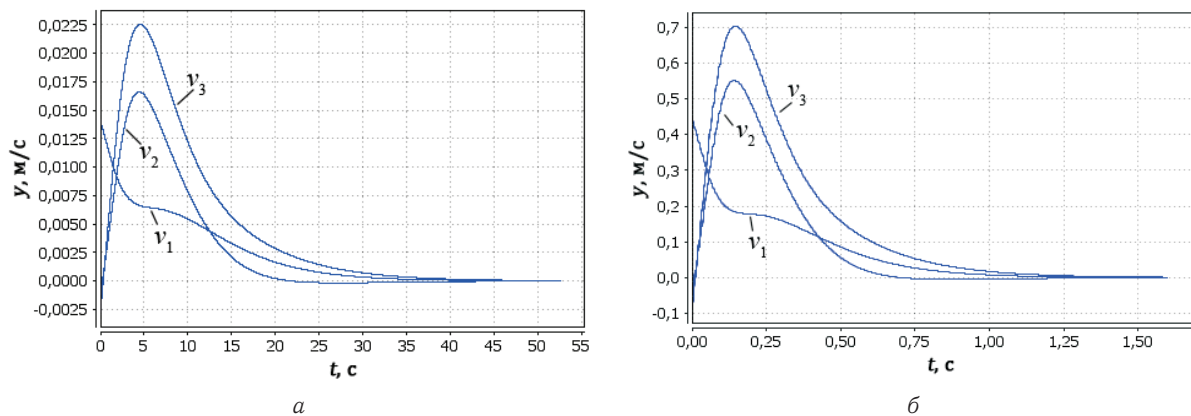


Рис. 5. Компоненты моментной части управления при $\alpha_1/\alpha_2 = 0.05$ (а) и $\alpha_1/\alpha_2 = 50$ (б)

Из таблицы и рис. 4, 5 можно сделать вывод: чем больше коэффициент α_1 , отвечающий за минимизацию среднеквадратичных отклонений, тем больше модули главной и моментной частей управления и меньше время решения задачи, и, наоборот, чем больше коэффициент α_2 , отвечающий за минимизацию управления, тем меньше модули главной и моментной частей управления и больше время, за которое достигается требуемая точность решения.

Из сравнения рис. 2, а, рис. 4, а, б и рис. 2, б, рис. 5, а, б следует, что при различных отношениях весовых коэффициентов характер переходного процесса одинаков, изменяются лишь величины управлений и время решения задачи.

Полученные законы изменения управлений и обобщенных координат манипулятора являются оптимальными для перевода выходного звена из заданного начального в требуемое конечное положение. Поэтому рассмотренный подход позволяет не только решать обратную задачу кинематики, но и численно строить программные оптимальные законы изменения обобщенных координат, угловой и линейной скорости выходного звена манипулятора для задачи перевода манипулятора из заданного начального в заданное конечное положение.

Библиографический список

1. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах управления положением твердого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1972. № 4. С. 24–31.
2. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Кинематическая задача ориентации во вращающейся системе координат // Изв. АН СССР. МТТ. 1972. № 6. С. 36–43.
3. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М. : Наука, 1973. 320 с.
4. Плотников П. К., Сергеев А. Н., Челноков Ю. Н. Кинематическая задача управления ориентацией твердого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 5. С. 9–18.
5. Панков А. А., Челноков Ю. Н. Исследование кватернионных законов кинематического управления ориентацией твердого тела по угловой скорости // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 6. С. 3–13.
6. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. М. : Наука, 1992. 280 с.
7. Молоденков А. В. Кватернионное решение задачи оптимального разворота твердого тела со сферическим распределением масс // Проблемы механики и управления : межвуз. сб. науч. тр. Пермь : Изд-во ПГУ, 1995. С. 122–131.
8. Бирюков В. Г., Челноков Ю. Н. Кинематическая задача оптимальной нелинейной стабилизации углового движения твердого тела // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2002. Вып. 4. С. 172–174.
9. Маланин В. В., Стрелкова Н. А. Оптимальное управление ориентацией и винтовым движением твердого тела. М.; Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004. 204 с.
10. Челноков Ю. Н. Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия и кинематика движения. М. : Физматлит, 2006. 511 с.
11. Стрелкова Н. А. Оптимальное по быстродействию кинематическое управление винтовым перемещением твердого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 4. С. 73–76.
12. Челноков Ю. Н. Об интегрировании кинематических уравнений винтового движения твердого тела // ПММ. 1980. Т. 44, вып. 1. С. 32–39.
13. Челноков Ю. Н. Бикватернионное решение кинематической задачи управления движением твер-



дого тела и его приложение к решению обратных задач кинематики роботов-манипуляторов // Изв. РАН. МТТ. 2013. № 1. С. 38–58.

14. Ломовцева Е. И., Челноков Ю. Н. Дуальные матричные и бикватернионные методы решения прямой и обратной задач кинематики роботов-манипуляторов на примере стэнфордского манипулятора. II // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Мате-

матика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 1. С. 88–95.

15. Нелаева Е. И., Челноков Ю. Н. Решение прямых и обратных задач кинематики роботов-манипуляторов с использованием дуальных матриц и бикватернионов на примере стэнфордского манипулятора. Ч. 1 // Мехатроника, автоматизация, управление. 2015. Т. 16, № 6. С. 373–380. DOI: 10.17587/mau.16.373-380.

Solving Kinematic Problem of Optimal Nonlinear Stabilization of Arbitrary Program Movement of Free Rigid Body

Yu. N. Chelnokov¹, E. I. Nelaeva²

¹Yurii N. Chelnokov, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia; Institute of Precision Mechanics and Control, Russian Academy of Sciences, 24, Rabochaya st., 410028, Saratov, Russia, chelnokovyun@info.sgu.ru

²Ekaterina I. Nelaeva, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia LomovtsevaEI@yandex.ru

The kinematic problem of nonlinear stabilization of arbitrary program motion of free rigid body is studied. Biquaternion kinematic equation of perturbed motion of a free rigid body is considered as a mathematical model of motion. Instant speed screw of body motion is considered as a control. There are two functionals that are to be minimized. Both of them characterize the integral quantity of energy costs of control and squared deviations of motion parameters of a free rigid body from their program values. Optimal control laws and differential equations of optimization problem are determined using the Pontryagin's maximum principle. Analytical solution of this problem has been found. The control law obtained is used for numerical solution of the inverse kinematics of a Stanford robot arm. The analysis of the numerical solution is carried out.

Key words: optimal control, rigid body, biquaternion, inverse kinematics.

References

1. Branec V. N., Shmyglevskij I. P. Using Biquaternions in Problem of Rigid Body Position Control. *Izv. AN SSSR. MTT*, 1972, no. 4, pp. 24–31 (in Russian).
2. Branec V. N., Shmyglevskij I. P. Kinematic Problem of Orientation in Rotating Coordinate Frame. *Izv. AN SSSR. MTT*, 1972, no. 6, pp. 36–43 (in Russian).
3. Branec V. N., Shmyglevskij I. P. *Primenenie kvaternionov v zadachah orientacii tverdogo tela* [Using Biquaternions in Problem of Rigid Body Orientation]. Moscow, Nauka, 1973, 320 p. (in Russian).
4. Plotnikov P. K., Sergeev A. N., Chelnokov Yu. N. Kinematic control problem for the orientation of a rigid body. *Mech. Solids*, 1991, vol. 37, no. 5, pp. 7–16.
5. Pankov A. A., Chelnokov Yu. N. Investigation of quaternion laws of kinematic control of solid body orientation in angular velocity. *Mech. Solids*, 1995, vol. 33, no. 6, pp. 3–13.
6. Branec V. N., Shmyglevskij I. P. *Vvedenie v teoriju besplatformennyh inercial'nyh navigacionnyh sistem* [Introduction to the Theory of Strapdown Inertial Navigation Systems]. Moscow, Nauka, 1992, 280 p. (in Russian).
7. Molodenkov A. V. Kvaternionnoe reshenie zadachi optimal'nogo razvorota tverdogo tela so sfericheskim raspredeleniem mass [Quaternion Solution of the Problem of Optimal Rotation of a Rigid Body With a Spherical Mass Distribution]. *Problemy mehaniki i upravleniya: Mezhdvuz. sb. nauch. tr.* Perm', Perm Univ. Press, 1995, pp. 122–131 (in Russian).
8. Birjukov V. G., Chelnokov Ju. N. Kinematicheskaja zadacha optimal'noj nelinejnoj stabilizacii uglovo-go dvizhenija tverdogo tela [Kinematic Problem of Optimal Nonlinear Stabilization of Rigid Body Angular Motion]. *Matematika. Mehanika* [Mathematics. Mechanics]. Saratov, Saratov Univ. Press, 2002, iss. 4, pp. 172–174 (in Russian).
9. Malanin V. V., Strelkova N. A. *Optimal'noe upravlenie orientaciej i vintovym dvizheniem tverdogo tela* [Optimal Control of Rigid Body Orientation and Screw Motion]. Moscow; Izhevsk, NIC "Reguljarnaja i haoticheskaja dinamika", 2004, 204 p. (in Russian).
10. Chelnokov Yu. N. *Quaternion and Biquaternion Models and Methods of Mechanics of Solid Bodies and its Applications. Geometry and Kinematics of Motion*. Moscow, Fizmatlit, 2006, 511 p. (in Russian).
11. Strelkova N. A. Optimal'noe po bystrodejstviju kinematicheskoe upravlenie vintovym peremeshhe-



- niem tverdogo tela [Time Optimal Kinematic Control of Rigid Body Screw Motion]. *Izv. AN SSSR. MTT*, 1982, no. 4, pp. 73–76 (in Russian).
12. Chelnokov Yu. N. On integration of kinematic equations of a rigid body's screw-motion. *Applied mathematics and mechanics*, 1980, vol. 44, no. 1, pp. 19–23.
 13. Chelnokov Yu. N. Biquaternion Solution of the Kinematic Control Problem for the Motion of a Rigid Body and Its Application to the Solution of Inverse Problems of Robot-Manipulator Kinematics. *Mech. Solids*, 2013, vol. 48, no. 1, pp. 31–46.
 14. Lomovceva E. I., Chelnokov Ju. N. Dual matrix and biquaternion methods of solving direct and inverse kinematics problems of manipulators for example Stanford robot arm. II. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2014, vol. 14, iss. 1, pp. 88–95 (in Russian).
 15. Nelaeva E. I., Chelnokov Ju. N. Solution to the Problems of Direct and Inverse Kinematics of the Robots-Manipulators Using Dual Matrices and Biquaternions on the Example of Stanford Robot Arm. Pt. 1. *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2015, vol. 16, no. 6, pp. 373–380. DOI: 10.17587/mau.16.373-380 (in Russian).