МАТЕМАТИКА

УДК 517.984

О СПЕКТРЕ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ МАТРИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ

М. И. Исмайлов

Бакинский государственный университет
E-mail: miqdadismailov1@rambler.ru

Работа посвящена исследованию частей спектра некоторых классов матричных операторов. Установлены соотношения между частями спектра матричного оператора с соответствующими частями спектра его элементов.

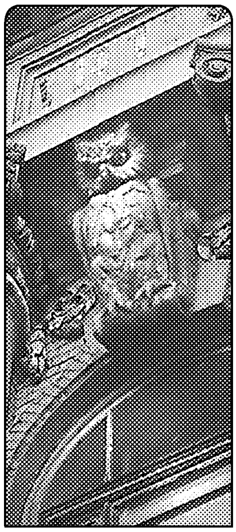
Ключевые слова: спектр, спектральный оператор, разложение единицы, спектральная мера, спектральный оператор скалярного типа.

On Spectrum of Some Classes of Matrix Operators

M. I. Ismailov

The paper is devoted to investigation of the spectrum of some classes of matrix operators. The relations between the parts of the spectrum o the matrix operators with corresponding parts of its elements are established.

Key words: spectrum, spectral operator, expansion of a unit, spectral measure, spectral operator of scalar type.



Приведем некоторые вспомогательные факты из [1]. Пусть X — банахово пространство, $T \in L(X)$ — линейный ограниченный оператор в X.

Точечным спектром $\sigma_p(T)$ оператора T называется множество точек спектра $\lambda \in \sigma(T)$ таких, что отображение $\lambda I - T$ не взаимно однозначно.

Остаточным спектром $\sigma_r(T)$ оператора T называется множество точек $\lambda \in \sigma(T)$ таких, что отображение $\lambda I - T$ взаимно однозначно, но многообразие $(\lambda I - T)X$ не плотно в X.

Непрерывным спектром $\sigma_c(T)$ оператора T называется множество точек $\lambda \in \sigma(T)$ таких, что отображение $\lambda I - T$ взаимно однозначно и многообразие $(\lambda I - T)X$ плотно в X.

Спектральная мера E на поле множеств Σ комплексной плоскости называется разложением единицы (или спектральным разложением) для оператора T, если

$$E(\alpha)T = TE(\alpha), \quad \sigma(T_\alpha) \subseteq \bar{\alpha}, \quad \alpha \in \Sigma,$$

где T_α — сужение оператора T на многообразие $E(\alpha)X$.

Оператор T со счетно-аддитивным разложением единицы, заданный на борелевских множествах комплексной плоскости, называется спектральным оператором.

Утверждение [1, с. 50]. *Пусть T — ограниченный спектральный оператор в банаховом пространстве X с квазинильпотентной частью N и разложением единицы E, $\lambda \in \sigma(T)$. Тогда:*

1) *если $E(\lambda) = O$, то $\lambda \in \sigma_c(T)$,*

2) *если* $E(\lambda) \neq O$, *то* $\lambda \in \sigma_p(T) \Leftrightarrow 0 \in \sigma_p(N_\lambda)$, $\lambda \in \sigma_r(T) \Leftrightarrow 0 \in \sigma_r(N_\lambda)$, $\lambda \in \sigma_c(T) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 0 \in \sigma_c(N_\lambda)$, *где* $N_\lambda = N \mid E(\lambda)X$.

Пусть A, $B \in L(X)$. В пространстве $X^2 = X \times X$ рассмотрим матричный оператор

$$T = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. *Верны следующие равенства:*

1) $\sigma(T) = \sigma(A) \cup \sigma(B)$,

2) $\sigma_p(T) = \sigma_p(A) \cup \sigma_p(B)$,

3) $\sigma_r(T) = (\sigma_r(A) \cup \sigma_r(B)) \backslash (\sigma_p(A) \cup \sigma_p(B))$,

4) $\sigma_c(T) = (\sigma_c(A) \cup \sigma_c(B)) \backslash ((\sigma_r(A) \cup \sigma_r(B)) \cup (\sigma_p(A) \cup \sigma_p(B)))$.

Доказательство. Утверждения 1) и 2) очевидны. Пусть $\lambda \in \sigma_r(T)$. Ясно, что $\lambda \notin \sigma_p(A) \cup \sigma_p(B)$, в противном случае $\lambda \in \sigma_p(T)$. Покажем, что $\lambda \in \sigma_r(A) \cup \sigma_r(B)$. Предположим противное $\lambda \notin \sigma_r(A) \cup \sigma_r(B)$. Тогда возможен один из случаев: a) $\lambda \in \sigma_c(A) \cap \sigma_c(B)$; b) $\lambda \in \sigma_c(A) \cap \rho(B)$; c) $\lambda \in \rho(A) \cap \sigma_c(B)$.

Поскольку $\lambda \in \sigma_r(T)$, то существует $\tilde{f} = (f_1, f_2) \in X^{*2}$ ($\tilde{f} \neq \tilde{o}$) такой, что $\tilde{f}((T - \lambda\tilde{I})\tilde{x}) = 0$ при всех $\tilde{x} = (x_1, x_2) \in X^2$, где $\tilde{I}$ — тождественный оператор в X^2. Переходя к координатам в последнем равенстве, получим $f_1((A - \lambda I)x_1) + f_2((B - \lambda I)x_2) = 0$. Отсюда в случаях a)–c) при $x_1 = 0$ получаем $f_2 = 0$, а при $x_2 = 0$ получаем $f_1 = 0$, что противоречит условию $\tilde{f} \neq \tilde{o}$.

Обратно: пусть $\lambda \in (\sigma_r(A) \cup \sigma_r(B)) \backslash (\sigma_p(A) \cup \sigma_p(B))$, но $\lambda \notin \sigma_r(T)$. Так как $\lambda \notin \sigma_p(A) \cup \sigma_p(B)$, то $\lambda \notin \sigma_p(T)$. Следовательно, $\lambda \in \sigma_c(T)$. Пусть $\lambda \in \sigma_r(A)$. Тогда существует $f_1 \in X^*$ ($f_1 \neq o$) такой, что $f_1((A - \lambda I)x_1) = 0$ при всех $x_1 \in X$. Возьмем $\tilde{f} = (f_1, 0) \in X^{*2}$. Очевидно, что $\tilde{f} \neq \tilde{o}$. Для любого $\tilde{x} = (x_1, x_2) \in X^2$ имеем $\tilde{f}((T - \lambda\tilde{I})\tilde{x}) = f_1((A - \lambda I)x_1) = 0$. Поскольку $\lambda \in \sigma_c(T)$, то $\tilde{f} \equiv \tilde{o}$, что противоречит предположению. Аналогично рассматривается случай, когда $\lambda \in \sigma_r(B)$. Утверждение 4) следует из справедливости утверждений 1)–3).

Следствие 1. *Равенство* $\sigma_p(T) = \emptyset$ *равносильно выполнению условия* $\sigma_p(A) = \sigma_p(B) = \emptyset$.

Следствие 2. *Равенство* $\sigma_r(T) = \emptyset$ *верно при выполнении одного из условий:*

1) $\sigma_r(A) = \sigma_r(B) = \emptyset$,

2) $\sigma_r(A) = \emptyset$, $\sigma_r(B) \subseteq \sigma_p(A)$,

3) $\sigma_r(B) = \emptyset$, $\sigma_r(A) \subseteq \sigma_p(B)$,

4) $\sigma_r(B) \subseteq \sigma_p(A)$, $\sigma_r(A) \subseteq \sigma_p(B)$.

Следствие 3. *Равенство* $\sigma_c(T) = \emptyset$ *верно при выполнении одного из условий:*

1) $\sigma_c(A) = \sigma_c(B) = \emptyset$,

2) $\sigma_c(A) = \emptyset$, $\sigma_c(B) \subseteq \sigma_p(A) \cup \sigma_r(A)$,

3) $\sigma_c(B) = \emptyset$, $\sigma_c(A) \subseteq \sigma_p(B) \cup \sigma_r(B)$,

4) $\sigma_c(A) \subseteq \sigma_p(B) \cup \sigma_r(B)$, $\sigma_c(B) \subseteq \sigma_p(A) \cup \sigma_r(A)$.

Теперь рассмотрим матричный оператор $T = \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$.

Теорема 2. 1) *Если* $\lambda \neq 0$, *то*

$$\lambda \in \sigma(T) \;\Leftrightarrow\; \lambda^2 \in \sigma(AB) \cup \sigma(BA), \qquad \lambda \in \sigma_p(T) \;\Leftrightarrow\; \lambda^2 \in \sigma_p(AB) \cup \sigma_p(BA),$$

$$\lambda \in \sigma_r(T) \;\Leftrightarrow\; \lambda^2 \in (\sigma_r(AB) \cup \sigma_r(BA)) \backslash (\sigma_p(AB) \cup \sigma_p(BA)),$$

$$\lambda \in \sigma_c(T) \;\Leftrightarrow\; \lambda^2 \in (\sigma_c(AB) \cup \sigma_c(BA)) \backslash ((\sigma_r(AB) \cup \sigma_r(BA)) \cup (\sigma_p(AB) \cup \sigma_p(BA)));$$

2) *если* $\lambda = 0$, *то верны утверждения теоремы* 1.

Доказательство. Пусть $\lambda \neq 0$. Справедливость первых двух утверждений 1) очевидно, так как существование $(T - \lambda\tilde{I})^{-1}$ равносильно существованию $(AB - \lambda^2 I)^{-1}$ и $(BA - \lambda^2 I)^{-1}$ одновременно. Пусть $\lambda \in \sigma_r(T)$, но $\lambda^2 \notin (\sigma_r(AB) \cup \sigma_r(BA)) \backslash (\sigma_p(AB) \cup \sigma_p(BA))$. Ясно, что $\lambda^2 \notin \sigma_p(AB) \cup \sigma_p(BA)$, ибо $\lambda \in \sigma_p(T)$. Тогда возможны следующие случаи: a) $\lambda^2 \in \sigma_c(AB) \cap \sigma_c(BA)$; b) $\lambda^2 \in \sigma_c(AB) \cap \rho(BA)$; c) $\lambda^2 \in \rho(AB) \cap \sigma_c(BA)$.

Из $\lambda \in \sigma_r(T)$ следует, что существует $\tilde f = (f_1, f_2) \in X^{*2} (\tilde f \neq \tilde o)$ такой, что $\tilde f((T - \lambda\tilde I)\tilde x) = 0$ при всех $\tilde x = (x_1, x_2) \in X^2$, что в координатном виде равносильно равенству

$$f_1(Ax_2 - \lambda x_1) + f_2(Bx_1 - \lambda x_2) = 0.$$

Подставив в последнем равенстве произвольное $x_1 \in X$ и $x_2 = \dfrac{1}{\lambda}Bx_1$, получим $f_1((AB - \lambda^2 I)x_1) = 0$, а при любом $x_2 \in X$ и $x_1 = \dfrac{1}{\lambda}Ax_2$ получим $f_2((BA - \lambda^2 I)x_2) = 0$. Следовательно, при любом из условий a)–c) $f_1 = f_2 = 0$, что противоречит $\tilde f \neq \tilde o$.

Обратно: пусть $\lambda^2 \in (\sigma_r(AB) \cup \sigma_r(BA)) \backslash (\sigma_p(AB) \cup \sigma_p(BA))$. Покажем, что $\lambda \in \sigma_r(T)$. Предположим противное $\lambda \notin \sigma_r(T)$. Тогда $\lambda \in \sigma_c(T)$. Полагая $\lambda^2 \in \sigma_r(AB)$, получаем, что существует $f_1 \in X^*(f_1 \neq 0)$ такой, что $f_1((AB - \lambda^2 I)x_1) = 0$ при всех $x_1 \in X$. Возьмем f_2 такую, что $f_2(x_2) = \dfrac{1}{\lambda}f_1(Ax_2)$ при любом $x_2 \in X$. Рассмотрим $\tilde f = (f_1, f_2)$. Ясно, что $\tilde f \neq \tilde o$. Так как $A \in L(X)$, то $f_2 \in X^*$, и, следовательно, $\tilde f = (f_1, f_2) \in X^{*2}$. Для каждого $\tilde x = (x_1, x_2) \in X^2$ имеем

$$\tilde f((T - \lambda\tilde I)\tilde x) = f_1(Ax_2 - \lambda x_1) + f_2(Bx_1 - \lambda x_2) = f_1(Ax_2 - \lambda x_1) + \frac{1}{\lambda}f_1(ABx_1 - \lambda Ax_2) =$$
$$= f_1(Ax_2 - \lambda x_1 + \frac{1}{\lambda}ABx_1 - Ax_2) = \frac{1}{\lambda}f_1((AB - \lambda^2 I)x_1) = 0.$$

В силу того, что $\lambda \in \sigma_c(T)$, из последнего равенства получаем $\tilde f = \tilde o$. Полученное противоречие доказывает третье из соотношений утверждения 1). Справедливость последнего соотношения утверждения 1) следует из справедливости первых ее трех соотношений.

Случай 2) доказывается аналогично доказательству теоремы 1.

Теорема 3. *Пусть S_1, $S_2 \in L(X)$, S_2S_1 — ограниченно обратимый спектральный оператор скалярного типа с разложением единицы E, A,$B \in L(X)$ — квазинильпотентные операторы, $AS_1 = S_1B$, $BS_2 = S_2A$, $S_2S_1 = S_1S_2$, $T = \begin{pmatrix} A & S_1 \\ S_2 & B \end{pmatrix}$, $\lambda \in \sigma(T)$. Тогда при $E(h(\lambda)) = O$, где $h(\lambda)$ — однозначная ветвь функции $\sqrt{\lambda}$, $\lambda \in \sigma_c(T)$, а при $E(h(\lambda)) \neq O$:*

$$\lambda \in \sigma_p(T) \;\Leftrightarrow\; 0 \in \sigma_p(A_\lambda) \cup \sigma_p(B_\lambda),$$
$$\lambda \in \sigma_r(T) \;\Leftrightarrow\; 0 \in (\sigma_r(A_\lambda) \cup \sigma_r(B_\lambda)) \backslash (\sigma_p(A_\lambda) \cup \sigma_p(B_\lambda)),$$
$$\lambda \in \sigma_c(T) \;\Leftrightarrow\; 0 \in (\sigma_c(A_\lambda) \cup \sigma_c(B_\lambda)) \backslash ((\sigma_r(A_\lambda) \cup \sigma_r(B_\lambda)) \cup (\sigma_p(A_\lambda) \cup \sigma_p(B_\lambda))),$$

где $A_\lambda = A|E(h(\lambda))X$, $B_\lambda = B|E(h(\lambda))X$.

Доказательство. Из [3] вытекает, что матричный оператор T спектрален разложением единицы, которой служит матричный оператор $\tilde E(\cdot) = \begin{pmatrix} E(h(\cdot)) & O \\ O & E(h(\cdot)) \end{pmatrix}$ с квазинильпотентной частью $\tilde N = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$. Ясно, что из $E(h(\lambda)) = O \Leftrightarrow \tilde E(\cdot) = \tilde O$. Тогда применяя приведенное утверждение и теорему 1, получим

$$\lambda \in \sigma_p(T) \;\Leftrightarrow\; 0 \in \sigma_p(\tilde N_\lambda) \Leftrightarrow 0 \in \sigma_p(A_\lambda) \cup \sigma_p(B_\lambda),$$
$$\lambda \in \sigma_r(T) \;\Leftrightarrow\; 0 \in \sigma_r(\tilde N_\lambda) \;\Leftrightarrow\; 0 \in (\sigma_r(A_\lambda) \cup \sigma_r(B_\lambda)) \backslash (\sigma_p(A_\lambda) \cup \sigma_p(B_\lambda)),$$
$$\lambda \in \sigma_c(T) \Leftrightarrow 0 \in \sigma_c(\tilde N_\lambda) \;\Leftrightarrow\; 0 \in (\sigma_c(A_\lambda) \cup \sigma_c(B_\lambda)) \backslash ((\sigma_r(A_\lambda) \cup \sigma_r(B_\lambda)) \cup (\sigma_p(A_\lambda) \cup \sigma_p(B_\lambda))),$$

где $\tilde N_\lambda = \tilde N|\tilde E(\lambda)X^2$. Теорема доказана. □

Теорема 4. *Пусть S_1, $S_2 \in L(X)$ — спектральные операторы скалярного типа с разложениями единицы E_1 и E_2 соответственно, A, $B \in L(X)$ — квазинильпотентные операторы, $S_1A = AS_2$, $S_2B = BS_1$, $T = \begin{pmatrix} S_1 & A \\ B & S_2 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \sigma(T)$. Тогда, если $E_1(\lambda) = E_2(\lambda) = O$, то $\lambda \in \sigma_c(T)$ в противном случае, т.е. $E_1(\lambda) \neq O$ либо $E_2(\lambda) \neq O$, справедливы:*

$$\lambda \in \sigma_p(T) \;\Leftrightarrow\; 0 \in \sigma_p(A_\lambda) \cup \sigma_p(B_\lambda), \qquad \lambda \in \sigma_r(T) \;\Leftrightarrow\; 0 \in (\sigma_r(A_\lambda) \cup \sigma_r(B_\lambda)) \backslash (\sigma_p(A_\lambda) \cup \sigma_p(B_\lambda)),$$

$$\lambda \in \sigma_c(T) \ \Leftrightarrow \ 0 \in (\sigma_c(A_\lambda) \cup \sigma_c(B_\lambda)) \backslash ((\sigma_r(A_\lambda) \cup \sigma_r(B_\lambda)) \cup (\sigma_p(A_\lambda) \cup \sigma_p(B_\lambda))),$$

где $A_\lambda = A|E_2(\lambda)X$, $B_\lambda = B|E_1(\lambda)X$.

Доказательство. Известно [3], что в условиях теоремы матричный оператор T является ограниченным спектральным оператором с разложением единицы $\tilde{E}(\cdot) = \begin{pmatrix} E_1(\cdot) & O \\ O & E_2(\cdot) \end{pmatrix}$ и квазинильпотентной частью $\tilde{N} = \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$.

Следовательно, если $E_1(\lambda) = E_2(\lambda) = O$, то $\tilde{E}(\lambda) = \tilde{O}$, и в силу приведенного утверждения $\lambda \in \sigma_c(T)$, где $\tilde{O}$ — нулевой матричный оператор, а в случае $\tilde{E}(\lambda) \neq \tilde{O}$, что получается хотя бы при одном из условий $E_1(\lambda) \neq O$, $E_2(\lambda) \neq O$, верны:

$$\lambda \in \sigma_p(T) \ \Leftrightarrow \ 0 \in \sigma_p(\tilde{N}_\lambda), \quad \lambda \in \sigma_r(T) \ \Leftrightarrow \ 0 \in \sigma_r(\tilde{N}_\lambda), \quad \lambda \in \sigma_c(T) \ \Leftrightarrow \ 0 \in \sigma_c(\tilde{N}_\lambda),$$

где $\tilde{N}_\lambda = \tilde{N}|\tilde{E}(\lambda)X^2$. В силу утверждения 2) теоремы 2 получим

$$0 \in \sigma_p(\tilde{N}_\lambda) \ \Leftrightarrow \ 0 \in \sigma_p(A_\lambda) \cup \sigma_p(B_\lambda), \qquad 0 \in \sigma_r(\tilde{N}_\lambda) \ \Leftrightarrow \ 0 \in (\sigma_r(A_\lambda) \cup \sigma_r(B_\lambda)) \backslash (\sigma_p(A_\lambda) \cup \sigma_p(B_\lambda)),$$
$$0 \in \sigma_c(\tilde{N}_\lambda) \ \Leftrightarrow \ 0 \in (\sigma_c(A_\lambda) \cup \sigma_c(B_\lambda)) \backslash ((\sigma_r(A_\lambda) \cup \sigma_r(B_\lambda)) \cup (\sigma_p(A_\lambda) \cup \sigma_p(B_\lambda))).$$

Теорема доказана. □

Библиографический список

1. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы : в 3 т. Т. III. Спектральные операторы. М. : Мир, 1974.
2. *Ismailov M. I.* On spectrum property of matrix operators in Banach space // Trans. NAS of Azerb. 2006. Vol. XXXIII. P. 47–52.
3. *Исмайлов М. И.* О спектральности матричных операторов в банаховом пространстве // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2009. Т. 9. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 4. С. 23–28.

УДК 517.984

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР С ЯДРОМ, ИМЕЮЩИМ СКАЧКИ НА ЛОМАНЫХ ЛИНИЯХ

О. А. Королева, А. П. Хромов

Саратовский государственный университет
E-mail: korolevaoart@yandex.ru, KhromovAP@info.sgu.ru

В настоящей работе изучается равносходимость разложений в тригонометрические ряды Фурье и по собственным и присоединенным функциям интегрального оператора, ядро которого терпит скачки на сторонах квадрата, вписанного в единичный квадрат.

Ключевые слова: равносходимость, резольвента, характеристические числа, собственные и присоединенные функции.

Integral Operator with Kernel Having Jumps on Broken Lines

O. A. Koroleva, A. P. Khromov

In this paper we study equiconvergence expansions in trigonometric Fourier series, and in eigenfunctions and associated functions of an integral operator whose kernel suffers jumps at the sides of the square inscribed in the unit square.

Key words: equiconvergence, resolvent, characteristic number, eigenfunctions and associated functions.

Рассмотрим интегральный оператор:

$$y = Af = \int_0^1 A(x,t)\ f(t)\, dt. \tag{1}$$

Обозначим: $A_1(x,t) = A(x,t)$, если $\{0 \le t \le 1/2 - x,\ 0 \le x \le 1/2\}$, $A_2(x,t) = A(x,t)$, если $\{1/2 + x \le \le t \le 1,\ 0 \le x \le 1/2\}$, $A_3(x,t) = A(x,t)$, если $\{0 \le t \le -1/2 + x,\ 1/2 \le x \le 1\}$, $A_4(x,t) = A(x,t)$,