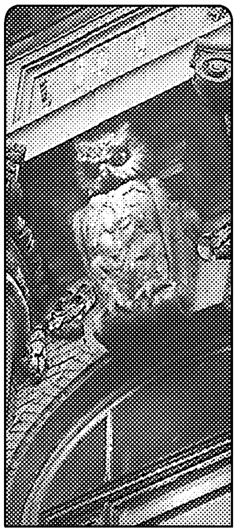
НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ



МАТЕМАТИКА

УДК 517.956

КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

С. А. Алдашев

Актюбинский государственный университет, Актобе
E-mail: aldash51@mail.ru

В работе показана однозначная разрешимость классического решения задачи Дирихле в цилиндрической области для многомерного уравнения Лапласа.

Ключевые слова: корректность, задача, функция, уравнение.

S. A. Aldashev

The Correctness of the Dirichlet Problem in the Cylindric Domain for Equation Laplase

Thes paper shows is uniquely solvable solitions the Dirichlet problem in the cylindric domain for equation Laplase.

Key words: correctness, problem, function, equation.

Корректность краевых задач на плоскости для эллиптических уравнений методом теории аналитических функций комплексного переменного изучены в работах [1, 2].

При исследовании аналогичных вопросов, когда число независимых переменных больше двух, возникают трудности принципиального характера. Весьма привлекательный и удобный метод сингулярных интегральных уравнений теряет свою силу из-за отсутствия сколько-нибудь полной теории многомерных сингулярных интегральных уравнений [3].

В работах [4, 5] для эллиптических уравнений довольно подробно изучены классические и обобщенные решения задачи Дирихле в ограниченной области.

В данной статье по методу, предложенному в работах [6, 7], получен явный вид классического решения задачи Дирихле в цилиндрической области для многомерного уравнения Лапласа.

Пусть Ω– цилиндрическая область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, \ldots, x_m, t)$, ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x,t) : |x| = 1\}$, плоскостями $t = \alpha > 0$ и $t = 0$, где $|x|$ — длина вектора $x = (x_1, \ldots, x_m)$.

Части этих поверхностей, образующих границу $\partial\Omega$ области Ω, обозначим через Γ_α, S_α, S_0 соответственно.

В области Ω рассмотрим многомерное уравнение Лапласа:

$$Lu \equiv \Delta_x u + u_{tt} = 0, \qquad (1)$$

где Δ_x– оператор Лапласа по переменным $x_1, \ldots, x_m$, $m \geq 2$.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1, \ldots, x_m$, t к сферическим $r, \theta_1, \ldots, \theta_{m-1}, t$, $r \geq 0$, $0 \leq \theta_1 < 2\pi$, $0 \leq \theta_i \leq \pi$, $i = 2, 3, \ldots, m-1$.

Рассмотрим следующую локальную краевую задачу.

Задача D. Найти решение уравнения (1) в области Ω из класса $C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, удовлетворяющее краевым условиям:

$$u|_{S_\alpha} = \varphi(r,\theta), \qquad u|_{\Gamma_\alpha} = \psi(t,\theta), \qquad u|_{S_0} = \tau(r,\theta). \tag{2}$$

Пусть $\left\{Y_{n,m}^k(\theta)\right\}$ — система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \le k \le k_n$, $(m-2)!\,n!\,k_n = (n+m-3)!\,(2n+m-2)$, $\theta = (\theta_1,\ldots,\theta_{m-1})$, $W_2^l(S_0)$, $l = 0,1,\ldots$, — пространства Соболева.

Имеет место [8]

Лемма 1. *Пусть $f(r,\theta) \in W_2^l(S_0)$. Если $l \ge m-1$, то ряд*

$$f(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{3}$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p \le l-m+1$, сходятся абсолютно и равномерно.

Лемма 2. *Для того чтобы $f(r,\theta) \in W_2^l(S_0)$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда* (3) *удовлетворяли неравенствам*

$$|f_0^1(r)| \le c_1, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} n^{2l}|f_n^k(r)|^2 \le c_2, \qquad c_1,\, c_2 = \text{const}.$$

Через $\overline{\varphi}_n^k(r)$, $\psi_n^k(t)$, $\overline{\tau}_n^k(r)$, ρ_n^k обозначим коэффициенты разложения в ряд (3) функций $\varphi(r,\theta)$, $\psi(t,\theta)$, $\tau(r,\theta)$, $\rho(\theta)$ соответственно.

Теорема. *Если $\varphi(r,\theta) \in W_2^l(S_\alpha)$, $\psi(t,\theta) \in W_2^l(\Gamma_\alpha)$, $\tau(r,\theta) \in W_2^l(S_0)$, $l > 3m/2$, то задача D имеет единственное решение.*

Доказательство теоремы. В сферических координатах уравнения (1) имеет вид

$$u_{rr} + \frac{m-1}{r}\, u_r - \frac{1}{r^2}\,\delta u + u_{tt} = 0, \tag{4}$$

$$\delta \equiv -\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j \sin^{m-j-1}\theta_j}\,\frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\sin^{m-j-1}\theta_j\,\frac{\partial}{\partial\theta_j}\right), \qquad g_1 = 1, \qquad g_j = (\sin\theta_1\ldots\sin\theta_{j-1})^2, \qquad j>1.$$

Известно [8], что спектр оператора σ состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n+m-2)$, $n = 0,1,\ldots$, каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y_{n,m}^k(\theta)$.

Так как искомое решение задачи D принадлежит классу $C(\overline{\Omega} \cap C^2(\Omega))$, то его можно искать в виде ряда

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \overline{u}_n^k(r,t) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{5}$$

где $\overline{u}_n^k(r,t)$ — функции, подлежащие определению.

Подставляя (5) в (4) и используя ортогональность сферических функций $Y_{n,m}^k(\theta)$ [7], будем иметь

$$\overline{u}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r}\,\overline{u}_{nr}^k + \overline{u}_{ntt}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\,\overline{u}_n^k = 0, \qquad k = \overline{1,k_n}, \qquad n = 0,1,\ldots\,, \tag{6}$$

при этом краевое условие (2) с учетом леммы 1 запишется в виде

$$\overline{u}_n^k r,\alpha = \overline{\varphi}_n^k(r), \qquad \overline{u}_n^k 1,t = \psi_n^k(t), \qquad \overline{u}_n^k r,0 = \overline{\tau}_n^k r, \qquad k = \overline{1,k_n}, \qquad n = 0,1,\ldots \tag{7}$$

В (6), (7), произведя замену переменных $\overline{\upsilon}_n^k(r,t) = \overline{u}_n^k(r,t) - \psi_n^k(t)$, получим

$$\upsilon_{nrr}^k + \frac{m-1}{r}\,\overline{\upsilon}_{nr}^k - \frac{\overline{\lambda}_n}{r^2}\,\overline{\upsilon}_n^k + \overline{\upsilon}_{ntt}^k = \overline{f}_n^k(r,t), \tag{8}$$

$$\overline{\upsilon}_n^k r,\alpha = \varphi_n^k(r), \qquad \overline{\upsilon}_n^k 1,t = 0, \qquad \overline{\upsilon}_n^k r,0 = \tau_n^k r, \qquad k = \overline{1,k_n}, \qquad n = 0,1,\ldots\,, \tag{9}$$

$$\overline{f}_n^k(r,t) = -\psi_{ntt}^k + \frac{\lambda_n}{r^2}\,\psi_n^k, \qquad \varphi_n^k(r) = \overline{\varphi}_n^k(r) - \psi_n^k(\alpha), \qquad \tau_n^k(r) = \overline{\tau}_n^k(r) - \psi_n^k(0).$$

Произведя замену $\overline{\upsilon}_n^k(r,t) = r^{(1-m)/2}\upsilon_n^k(r,t)$, задачу (8), (9) приведем к следующей задаче:

$$L\upsilon_n^k \equiv \upsilon_{nrr}^k + \upsilon_{ntt}^k + \frac{\overline{\lambda}_n}{r^2}\,\upsilon_n^k = f_n^k(r,t), \tag{10}$$

$$\upsilon_n^k(r,\alpha) = \tilde{\varphi}_n^k(r), \qquad \upsilon_n^k(1,t) = 0, \qquad \upsilon_n^k(r,0) = \overline{\tau}_n^k(r), \tag{11}$$

$$\overline{\lambda}_n = \frac{(m-1)(3-m)-4\lambda_n}{4}, \qquad f_n^k(r,t) = r^{(m-1)/2}\,\overline{f}_n^k(r,t), \qquad \tilde{\varphi}_n^k(r) = r^{(m-1)/2}\varphi_n^k(r),$$

$$\tilde{\tau}_n^k(r) = r^{(m-1)/2}\tau_n^k(r).$$

Решение задачи (10), (11) ищем в виде

$$\upsilon_n^k(r,t) = \upsilon_{1n}^k(r,t) + \upsilon_{2n}^k(r,t), \tag{12}$$

где $\upsilon_{1n}^k(r,t)$ — решение задачи

$$L\upsilon_{1n}^k = f_n^k(r,t), \tag{13}$$

$$\upsilon_{1n}^k(r,\alpha) = 0, \qquad \upsilon_{1n}^k(1,t) = 0, \qquad \upsilon_{1n}^k(r,0) = 0, \tag{14}$$

а $\upsilon_{2n}^k(r,t)$ — решение задачи

$$L\upsilon_{2n}^k = 0, \tag{15}$$

$$\upsilon_{2n}^k(r,\alpha) = \widetilde{\varphi}_n^k(r), \qquad \upsilon_{2n}^k(1,t) = 0,\ \upsilon_{2n}^k(r,0) = \overline{\tau}_n^k(r). \tag{16}$$

Решение вышеуказанных задач рассмотрим в виде

$$\upsilon_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} R_s(r)T_s(t), \tag{17}$$

при этом пусть

$$f_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{ns}^k(t)R_s(r), \qquad \tilde{\varphi}_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{ns}^k R_s(r), \qquad \tilde{\tau}_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} e_{ns}^k R_s(r). \tag{18}$$

Подставляя (17) в (13), (14) с учетом (18), получим

$$R_{srr} + \frac{\overline{\lambda}_n}{r^2}\,R_s + \mu R_s = 0, \qquad 0<r<1, \tag{19}$$

$$R_s(1) = 0, \qquad |R_s(0)| < \infty, \tag{20}$$

$$T_{stt} - \mu T_s(t) = a_{ns}^k(t), \qquad 0<t<\alpha, \tag{21}$$

$$T_s(\alpha) = 0, \qquad T_s(0) = 0. \tag{22}$$

Ограниченным решением задачи (19), (20) является [9]

$$R_s(r) = \sqrt{r}\,J_\nu(\mu_{s,n}r), \tag{23}$$

где $\nu = n + \dfrac{(m-2)}{2}$, $\mu_{s,n}$ — нули функций Бесселя первого рода $J_\nu(z)$, $\mu = \mu_{s,n}^2$.

Общее решение уравнения (21) представимо в виде [9]

$$T_{s,n}(t) = c_{1s}\operatorname{ch}\mu_{s,n}t + c_{2s}\operatorname{sh}\mu_{s,n}t + \frac{\operatorname{ch}\mu_{s,n}t}{\mu_{s,n}}\int_0^t a_{ns}^k(\xi)\operatorname{sh}\mu_{s,n}\xi d\xi - \frac{\operatorname{sh}\mu_{s,n}t}{\mu_{s,n}}\int_0^t a_{ns}^k(\xi)\operatorname{ch}\mu_{s,n}\xi\, d\xi,$$

c_{1s}, c_{2s} — произвольные постоянные, удовлетворив условию (22), будем иметь

$$\mu_{s,n}T_{s,n}(t) = \left[\int_0^\alpha a_{ns}^k(\xi)\operatorname{ch}\mu_{s,n}\xi d\xi - (\operatorname{cth}\mu_{s,n}\xi)\int_0^\alpha a_{ns}^k(\xi)\operatorname{sh}\mu_{s,n}\xi d\xi\right]\operatorname{sh}\mu_{s,n}t+$$

$$+(\operatorname{ch}\mu_{s,n}t)\int\limits_0^t a_{ns}^k(\xi)\operatorname{sh}\mu_{s,n}\xi d\xi-(\operatorname{sh}\mu_{s,n}t)\int\limits_0^t a_{ns}^k(\xi)\operatorname{ch}\mu_{s,n}\xi\,d\xi. \tag{24}$$

Подставляя (23) в (18), получим

$$\begin{gathered} r^{-1/2}f_n^k(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}a_{ns}^k(t)J_\nu(\mu_{s,n}r), \qquad r^{-1/2}\tilde{\varphi}_n^k(r)=\sum_{s=1}^{\infty}b_{ns}^kJ_\nu(\mu_{s,n}r), \\ r^{-1/2}\,\tilde{\tau}_n^k(r)=\sum_{s=1}^{\infty}e_{ns}^kJ_\nu(\mu_{s,n}r), \qquad 0<r<1. \end{gathered} \tag{25}$$

Ряды (25) — разложение в ряды Фурье–Бесселя [10], если

$$\begin{gathered} a_{ns}^k(t)=2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2}\int\limits_0^1\sqrt{\xi}f_n^k(\xi,t)J_\nu(\mu_{s,n}\xi)d\xi, \\ b_{ns}^k=2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2}\int\limits_0^1\sqrt{\xi}\tilde{\varphi}_n^k(\xi)J_\nu(\mu_{s,n}\xi)d\xi, \\ e_{ns}^k=2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2}\int\limits_0^1\sqrt{\xi}\tilde{\tau}_n^k(\xi)J_\nu(\mu_{s,n}\xi)d\xi, \end{gathered} \tag{26}$$

$\mu_{s,n}$, $s=1,2,\ldots,$ — положительные нули функций Бесселя $J_\nu(z)$, расположенные в порядке возрастания их величины.

Из (23), (24) получим решение задачи (13), (14) в виде

$$\upsilon_{1n}^k(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}\sqrt{r}T_{s,n}(t)J_\nu(\mu_{s,n}r), \tag{27}$$

где $a_{ns}^k(t)$ определяется из (26).

Таким образом, из (8) следует, что решением задачи 1 является ряд

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left[\psi_n^k(t)+r^{(1-m)/2}\,\upsilon_n^k(r,t)\right]Y_{n,m}^k(\theta),$$

где $\upsilon_n^k(r,t)$ находятся из (26).

Далее, подставляя (17) в (15), (16) с учетом (18), будем иметь

$$T_{stt}-\mu_{s,n}^2T_s=0, \qquad 0<t<\alpha, \tag{28}$$

$$T_s(\alpha)=b_{ns}^k, \qquad T_\alpha(0)=e_{ns}^k. \tag{29}$$

Общее решение уравнения (28) имеет вид

$$T_{s,n}(t)=c'_{1s}\operatorname{ch}\mu_{s,n}t+c'_{2s}\operatorname{sh}\mu_{s,n}t. \tag{30}$$

Применив к (30) условие (29), получим

$$c'_{1s}=e_{ns}^k, \qquad c'_{2s}=-e_{ns}^k\operatorname{cth}\mu_{s,n}\alpha+\frac{e_{ns}^k}{\operatorname{sh}\mu_{s,n}\alpha}. \tag{31}$$

Из (23), (30), (31) найдем решение задачи (15), (16)

$$\upsilon_{2n}^k(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}\sqrt{r}\;T_{s,n}(t)J_\nu(\mu_{s,n}r), \tag{32}$$

где b_{ns}^k, e_{ns}^k находятся из (26).

Таким образом, единственным решением задачи D является функция

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\Big\{\psi_n^k(t)+r^{(1-m)/2}\left[\upsilon_{1n}^k(r,t)+\upsilon_{2n}^k(r,t)\right]Y_{n,m}^k(\theta)\Big\}, \tag{33}$$

где $\upsilon_{1n}^k(r,t)$, $\upsilon_{2n}^k(r,t)$ определяются из (27) и (32).

Учитывая следующие свойства нулей функций Бесселя [10]:

1. Если $\mu_{\nu,1}$, $\mu_{\nu,2},\ldots$ — положительные нули функций $J_\nu(z)$, упорядоченные по возрастанию значений, то

$$0<\mu_{\nu,1}<\mu_{\nu+1,\,1}<\mu_{\nu,2}<\mu_{\nu+1,\,2}<\mu_{\nu,3}<\ldots,\qquad \nu>-1.$$

2. Пусть μ_ν, μ'_ν, μ''_ν являются наименьшими положительными нулями функций $J_\nu(z)$, $J'_\nu(z)$, $J''_\nu(z)$ соответственно.

Тогда

$$\sqrt{\nu(\nu+2)}<\mu_\nu<\sqrt{2(\nu+1)(\nu+3)},\qquad \sqrt{\nu(\nu+2)}<\mu'_\nu<\sqrt{2\nu(\nu+1)},\qquad \nu>0,$$

$$\sqrt{\nu(\nu-1)}<\mu''_\nu<\sqrt{(\nu^2-1)},\qquad \nu>1.$$

Учитывая формулы [10, 11]

$$J_\nu(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{z^{3/2}}\right),\qquad \nu\geq 0,\qquad 2J'_\nu(z)=J_{\nu-1}(z)-J_{\nu+1}(z),$$

применяя признак Даламбера, доказывается, что ряды (27), (32) и продифференцированные ряды сходятся абсолютно и равномерно.

Далее, используя оценки [8]

$$|k_n|\leq c_1 n^{m-2},\qquad \left|\frac{\partial^q}{\partial\theta_j^q}Y_{n,m}^k(\theta)\right|\leq c_2 n^{\frac{m}{2}-1+q},\qquad j=\overline{1,m-1},\qquad q=0,1,\ldots,$$

а также леммы, ограничения на заданные функции $\varphi(r,\,\theta)$, $\psi(t,\,\theta)$, $\tau(r,\theta)$, показывается, что полученное решение (33) принадлежит искомому классу $C(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$.

Теорема доказана.

Библиографический список

1. *Бицадзе А. В.* Уравнения смешанного типа. М. : Изд-во АН СССР, 1959. 164 с.

2. *Бицадзе А. В.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М. : Наука, 1966. 203 с.

3. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М. : Наука, 1981. 448 с.

4. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М. : Наука, 1973. 576 с.

5. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М. : Наука, 1973. 407 с.

6. *Алдашев С. А.* Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. Алматы : Гылым, 1994. 170 с.

7. *Алдашев С. А.* О задачах Дарбу для одного класса многомерных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 1. С. 64–68.

8. *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М. : Физматгиз, 1962. 254 с.

9. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М. : Наука, 1965. 703 с.

10. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции : в 2 т. Т. 2. М. : Наука, 1974. 295 с.

11. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М. : Наука, 1966. 724 с.