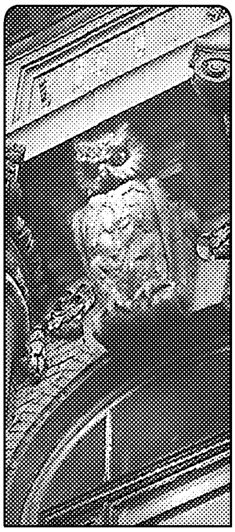
МАТЕМАТИКА



НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

УДК 517.984

ОБРАТНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ВОССТАНОВЛЕНИЯ ОДНОМЕРНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ВОЛЬТЕРРОВА ОПЕРАТОРА

С. А. Бутерин

Саратовский государственный университет,
кафедра математической физики и вычислительной математики
E-mail: buterinsa@info.sgu.ru

Рассматривается интегральный оператор, представимый в виде суммы вольтеррова оператора и одномерного, причем обратным оператором к вольтеррову является интегро-дифференциальный оператор второго порядка. Исследуется обратная задача восстановления одномерного слагаемого по спектральным данным в предположении, что вольтеррова компонента известна априори. Доказана единственность решения обратной задачи и получены условия, необходимые и достаточные для ее разрешимости.

Inverse Spectral Problem of Reconstructing One-dimensional Perturbation of Integral Volterra Operator

S. A. Buterin

An integral operator representable as the sum of a Volterra operator and one-dimensional one is considered, when the inverse operator for Volterra one is an integro-differential operator of second order. The inverse problem of reconstruction of the one-dimensional item from spectral data provided that the Volterra component is known a priori is investigated. The uniqueness of the solution of the inverse problem is proved and conditions are obtained that are necessary and sufficient for its solvability.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим интегральный оператор $A = A(M, g, v)$ вида

$$Af = Mf + g(x)\int_0^\pi f(t)v(t)\,dt,\ \ Mf = \int_0^x M(x,t)f(t)\,dt,\ \ 0 \le x \le \pi, \quad (1.1)$$

где $g(x), v(x) \in W_2^1[0,\pi]$, $g(0)v(\pi) \ne 0$. Пусть функции

$$\frac{\partial^{\nu+j}}{\partial x^\nu \partial t^j} M(x,t), \upsilon, j = 0,1,2,$$

непрерывны при $0 \le t \le x \le \pi$, причем

$$M(x,x) \equiv 0 \ \ \frac{\partial}{\partial x} M(x,t)\Big|_{t=x} \equiv -1 \ \ \frac{\partial^2}{\partial x^2} M(x,t)\Big|_{t=x} \equiv 0.$$

При этих условиях будем говорить, что функция $M(x, t)$ принадлежит классу M_2.

Характеристические числа λ_k оператора A вида (1.1) совпадают с нулями характеристической функции

$$L(\lambda) = 1 - \lambda\int_0^\pi v(x)g(x,\lambda)\,dx \quad (1.2)$$

с учетом кратности, где $g(x,\lambda) = (E - \lambda M)^{-1} g$, а E – тождественный оператор (см. [1]). Для краткости последовательность $\{\lambda_k\}$ будем называть спектром. При этом функции $g_k(x)$, определяемые формулой

$$g_{k+\nu}(x) = \frac{\partial^\nu}{\partial\lambda^\nu} g(x,\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_k} \quad \nu = 0,1,\ldots,r_k - 1,$$

где r_k – кратность $\lambda_k\left(\lambda_k=\lambda_{k+1}=\ldots=\lambda_{k+r_k-1}\right)$, являются собственными и присоединенными функциями оператора. Обозначим $\beta_k=g_k(\pi)$. Совокупность чисел $\{\lambda_k,\beta_k\}$ назовем спектральными данными оператора A. В статье исследуются следующие обратные задачи.

Задача 1. По спектру $\{\lambda_k\}$ оператора $A(M, g, v)$ найти функцию $v(x)$ в предположении, что функции $M(x, t)$, $g(x)$ известны априори.

Задача 2. По спектральным данным $\{\lambda_k,\beta_k\}$ оператора $A(M, g, v)$ найти функции $v(x)$, $g(x)$ в предположении, что функция $M(x, t)$ известна априори.

Основные результаты теории обратных задач спектрального анализа получены для дифференциального оператора Штурма – Лиувилля, а позднее – и для дифференциальных операторов высших порядков (см., например, обзоры в [2], [3]). Что касается интегральных операторов, в [4] дано решение задач 1, 2 для случая, когда M^{-1} является интегро-дифференциальным оператором первого порядка, и показана связь задачи 1 с обратной задачей Штурма – Лиувилля. Принадлежность $M(x, t)$ классу M_2 означает, что оператор $D = M^{-1}$ имеет вид

$$Dy=-y''+q(x)y+\int_0^x H(x,t)y(t)\,dt,\ \ y(0)=y'(0)=0,$$

где функции $q(x)$, $H(x, t)$ непрерывны[1] при $0\le t\le x\le\pi$. Заметим, что в наших условиях обратный оператор к оператору Штурма – Лиувилля (с краевыми условиями Неймана) является частным случаем оператора вида (1.1), и введенные спектральные данные $\{\lambda_k,\beta_k\}$ обобщают данные Левинсона [5] для оператора Штурма – Лиувилля. Отметим, что в [6], [7] исследовалась обратная задача восстановления оператора M, по спектру $\{\lambda_k\}$ оператора вида (1.1), когда функция $M(x, t)$ зависит только от разности аргументов, а функции $g(x)$, $v(x)$ предполагаются известными. Прямые спектральные задачи для конечномерных возмущений вольтерровых операторов и, в частности, операторов вида (1.1) исследовались в работах А.П. Хромова (см., например, [1], [8]) и других математиков.

В разделе 2 приведены вспомогательные утверждения. Основные результаты статьи содержатся в разделе 3. Установлена единственность решения задач 1, 2 и получены условия, необходимые и достаточные для их разрешимости (теоремы 1 – 3).

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Построим оператор преобразования, связывающий ядро $M(x, t, \lambda)$ интегрального оператора $R_\lambda(M)=\left(E-\lambda M\right)^{-1}M$ с функцией $-\dfrac{\sin\rho(x-t)}{\rho}$, $\rho=\sqrt{\lambda}$, которая, в свою очередь, является ядром оператора $R_\lambda(M)$, когда $M(x, t) = t - x$. Предварительно докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 1. Интегральное уравнение

$$P(x,t,\alpha)=\frac{1}{2}\left\{\int_{\frac{t}{2}+\alpha}^{x-\frac{t}{2}+\alpha} q(\tau)d\tau+\int_{2(x+\alpha)-t}^{2(x+\alpha)}d\tau\int_{\frac{\tau-t}{2}}^{\tau-x-\alpha}H(s,\tau-t-s)\,ds-\right.$$

$$-\int_{2\alpha-t}^{2\alpha}d\tau\int_{\frac{\tau+t}{2}}^{\tau+t-\alpha}H(s,\tau+t-s)\,ds+\int_0^t d\tau\int_{t-\tau+\alpha}^{x-\tau-\alpha}H(s,\tau-t+s)\,ds+$$

$$+\int_{2(x+\alpha)-t}^{2(x+\alpha)}d\tau\int_{\frac{\tau-t}{2}}^{\tau-x-\alpha}q(s)P(s-\alpha,2s-\tau+t,\alpha)\,ds-$$

[1] Условия на $M(x, t)$ можно видоизменить так, чтобы охватывался и случай суммируемых с квадратом $g(x)$. $H(x, t)$ и основные результаты статьи остались верными.

$$-\int\limits_{2\alpha-t}^{2\alpha}d\tau\int\limits_{\frac{\tau+t}{2}}^{\tau+t-\alpha}q(s)P(s-\alpha,2s-\tau-t,\alpha)ds+\int\limits_{0}^{t}d\tau\int\limits_{t-\tau+\alpha}^{x-\tau+\alpha}q(s)P(s-\alpha,t-\tau,\alpha)ds+$$

$$+\int\limits_{2(x+\alpha)-t}^{2(x+\alpha)}d\tau\int\limits_{\frac{\tau-t}{2}}^{\tau-x-\alpha}ds\int\limits_{\tau-t-s}^{s}H(s,\xi)P(\xi-\alpha,\xi+t-\tau+s,\alpha)d\xi-$$

$$+\int\limits_{2\alpha-t}^{2\alpha}d\tau\int\limits_{\frac{\tau+t}{2}}^{\tau+t-\alpha}ds\int\limits_{\tau+t-s}^{s}H(s,\xi)P(\xi-\alpha,\xi-t-\tau+s,\alpha)d\xi+$$

$$\left.+\int\limits_{0}^{t}d\tau\int\limits_{t-\tau+\alpha}^{x-\tau+\alpha}ds\int\limits_{s+\tau-t}^{s}H(s,\xi)P(\xi-\alpha,\xi+t-\tau-s,\alpha)d\xi\right\}, \qquad (2.1)$$

где $0\le t\le x\le\pi-\alpha$, $0\le\alpha\le\pi$, имеет единственное решение $P(x,t,\alpha)$, причем функции $P(x,t,\alpha)$, $\frac{\partial}{\partial x}P(x,t,\alpha)$, $\frac{\partial}{\partial\alpha}P(x,t,\alpha)$ непрерывны по всем переменным, и $P(x,x,\alpha)\equiv 0$.

Доказательство. Решаем уравнение (2.1) методом последовательных приближений. Для простоты ограничимся случаем $H(x,t)\equiv 0$. В общем случае доказательство проводится аналогично. Обозначим

$$P_0(x,t,\alpha)=\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{t}{2}+\alpha}^{x-\frac{t}{2}+\alpha}q(\tau)d\tau,$$

$$P_{j+1}(x,t,\alpha)=\frac{1}{2}\left\{\int\limits_{2(x+\alpha)-t}^{2(x+\alpha)}d\tau\int\limits_{\frac{\tau-t}{2}}^{\tau-x-\alpha}q(s)P_j(s-\alpha,2s-\tau+t,\alpha)ds-\right.$$

$$\left.-\int\limits_{2\alpha-t}^{2\alpha}d\tau\int\limits_{\frac{\tau+t}{2}}^{\tau+t-\alpha}q(s)P_j(s-\alpha,2s-\tau-t,\alpha)ds+\int\limits_{0}^{t}d\tau\int\limits_{t-\tau+\alpha}^{x-\tau+\alpha}q(s)P_j(s-\alpha,t-\tau,\alpha)ds\right\}.$$

Положим $q=\max\limits_{0\le x\le\pi}|q(x)|$. Тогда, очевидно, $|P_0(x,t,\alpha)|\le\pi q/2$. Нетрудно видеть, что

$$|P_{j+1}(x,t,\alpha)|\le\frac{q}{2}\left\{\int\limits_0^{\pi}d\tau\int\limits_0^{t}\left|P_j\left(\frac{s+\tau-t}{2}-\alpha,s,\alpha\right)\right|ds+\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^{\pi}d\tau\int\limits_0^{t}\left|P_j\left(\frac{s+\tau+t}{2}-\alpha,s,\alpha\right)\right|ds+\int\limits_0^{\pi}d\tau\int\limits_0^{t}|P_j(\tau-\alpha,s,\alpha)|ds\right\}.$$

Отсюда по индукции получаем оценки

$$|P_j(x,t,\alpha)|\le C^{j+1}\frac{t^j}{j!},\ j=0,1,2,\ldots,$$

где $C=3\pi q/2$.Таким образом, непрерывная функция

$$P(x,t,\alpha)=\sum_{j=0}^{\infty}P_j(x,t,\alpha)$$

дает решение уравнения (2.1). Существование и непрерывность производных по x, α следует из возможности почленного дифференцирования ряда. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Справедливо соотношение

$$M(x,t,\lambda)=-\frac{\sin\rho(x-t)}{\rho}-\int_0^{x-t}P(x-t,x-t-\tau,t)\frac{\sin\rho\tau}{\rho}d\tau, \tag{2.2}$$

где функция $P(x, t, \alpha)$ является решением уравнения (2.1).

Доказательство. Легко показать, что

$$M(x,x,\lambda)\equiv 0,\ \frac{\partial}{\partial x}M(x,t,\lambda)\Big|_{t=x}\equiv -1.$$

Действуя оператором $(R_\lambda(M))^{-1}=D-\lambda E$ на функцию $y=R_\lambda(M)f$, где $f\in L_2(0,\pi)$, в силу произвольности f приходим к соотношению

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2}M(x,t,\lambda)+q(x)M(x,t,\lambda)+\int_t^x H(x,\tau)M(\tau,t,\lambda)d\tau=\lambda M(x,t,\lambda).$$

Таким образом, при фиксированном $\alpha\in[0,\pi]$ функция $z(x) = M(x+\alpha, \alpha, \lambda)$ является решением задачи Коши

$$-z''(x)+q(x+\alpha)z(x)+\int_0^x H(x+\alpha,t+\alpha)z(t)dt=\lambda z(x),\ z(0)=0,\ z'(0)=-1,$$

где $0\le x\le \pi-\alpha$. Она эквивалентна интегральному уравнению

$$z(x)=-\frac{\sin\rho x}{\rho}+\int_0^x\frac{\sin\rho(x-t)}{\rho}\left\{q(t+\alpha)z(t)+\int_0^t H(t+\alpha,\tau+\alpha)z(\tau)d\tau\right\}dt.$$

Подстановкой можно проверить, что его решение имеет вид

$$z(x)=-\frac{\sin\rho x}{\rho}-\int_0^x P(x,t,\alpha)\frac{\sin\rho(x-t)}{\rho}dt, \tag{2.3}$$

где функция $P(x, t, \alpha)$ является решением уравнения (2.1). Делая в (2.3) соответствующие замены переменных, приходим к (2.2). Лемма 2 доказана.

Перейдем к изучению функций $L(\lambda)$, $g(\pi, \lambda)$.

Лемма 3. 1) Для функции $L(\lambda)$ справедливо представление

$$L(\lambda)=1-\rho^2\int_0^\pi m(x)\cos\rho(\pi-x)dx, \tag{2.4}$$

где

$$m(x)=g(0)u(x)+\int_0^x u(t)Q(x,t)dt. \tag{2.5}$$

Здесь $u(x)=v(\pi-x)$,

$$Q(x,t)=\frac{\partial}{\partial x}\left(g(x-t)+\int_0^{x-t}P(\pi-x+\tau,\tau,x-t-\tau)g(x-t-\tau)d\tau\right). \tag{2.6}$$

При этом $m(x)\in W_2^1[0,\pi]$.

2) Для функции $g(\pi, \lambda)$ справедливо представление

$$g(\pi,\lambda)=g(0)\cos\rho\pi+\int_0^\pi\chi(x)\cos\rho x dx, \tag{2.7}$$

где $\chi(x)=\sigma'(x)\in L_2(0,\pi)$,

$$\sigma(\pi-x)=-g(x)-\int_0^x P(\pi-t,x-t,t)g(t)dt. \tag{2.8}$$

Доказательство. Подставляя (2.2) в представление

$$g(x,\lambda)=g(x)+\lambda\int_0^x M(x,t,\lambda)g(t)\,dt,$$

будем иметь

$$g(x,\lambda)=g(x)-\rho\int_0^x \sin\rho t\left(g(x-t)+\int_0^{x-t}P(x-\tau,x-t-\tau,\tau)g(\tau)\,d\tau\right)dt. \tag{2.9}$$

При $x=\pi$ (2.9) дает

$$g(\pi,\lambda)=g(\pi)+\rho\int_0^\pi \sigma(t)\sin\rho t\,dt,$$

откуда, интегрируя по частям с учетом $\sigma(0)=-g(\pi), \sigma(\pi)=-g(0)$, приходим к (2.7), и второе утверждение леммы доказано. Докажем первое утверждение. Подставляя (2.9) в (1.2), имеем

$$L(\lambda)=1-\lambda\int_0^\pi g(x)v(x)\,dx+\rho^3\int_0^\pi \sin\rho(\pi-x)\,dx\int_0^x\Bigg(g(x-t)-$$

$$-\int_0^{x-t}P(\pi-x+\tau,\tau,x-t-\tau)g(x-t-\tau)\,d\tau\Bigg)\,u(t)\,dt.$$

Интегрируя по частям, получаем (2.4), где функция $m(x)$ определяется по формулам (2.5), (2.6). Покажем, что $m(x)\in W_2^1[0,\pi]$. Для этого перепишем (2.5) в виде

$$m(x)=g(0)u(x)+\int_0^x u(x-t)T(x,t)\,dt,$$

где $T(x,t)=Q(x,x-t)$. Согласно (2.6) имеем

$$T(x,t)=g'(t)+P(\pi-x+t,t,0)g(0)+\int_0^t P(\pi-x+\tau,\tau,t-\tau)g'(t-\tau)\,d\tau+$$

$$+\int_0^t \breve{P}(\pi-x+\tau,\tau,s-\tau)g(t-\tau)\,d\tau,$$

где $\breve{P}(x,t,\alpha)=\left(\dfrac{\partial}{\partial\alpha}-\dfrac{\partial}{\partial x}\right)P(x,t,\alpha)$.

Далее ограничимся для краткости рассмотрением случая $H(x,t)\equiv 0$. В общем случае рассуждения аналогичны. Учитывая (2.1), находим

$$\breve{P}(x,t,\alpha)=\frac{1}{2}\Bigg\{q\left(\frac{t}{2}+\alpha\right)+\int_0^t d\tau\int_{t-\tau+\alpha}^{x-\tau+\alpha}q(s)\breve{P}(s-\alpha,t-\tau,\alpha)\,ds+$$

$$+2\int_{\alpha+\frac{t}{2}}^{\alpha+t}q(\tau)P(\tau-\alpha,2\tau-2\alpha-t,\alpha)\,d\tau-\int_{2\alpha-t}^{2\alpha}d\tau\int_{\frac{\tau+t}{2}}^{\tau+t-\alpha}q(s)\breve{P}(s-\alpha,2s-\tau-t,\alpha)\,ds+$$

$$+\int_{2(x+\alpha)-t}^{2(x+\alpha)}d\tau\int_{\frac{\tau-t}{2}}^{\tau-x-\alpha}q(s)\breve{P}(s-\alpha,2s-\tau+t,\alpha)\,ds\Bigg\}.$$

Теперь вычисляем

$$\breve{P}(\pi-x+\tau,\tau,t-\tau)=\frac{1}{2}\Bigg\{q\left(t-\frac{\tau}{2}\right)+\int_0^\tau ds\int_{t-s}^{\pi-x+t-s}q(\xi)\breve{P}(\xi-t+\tau,\tau-s,t-\tau)\,d\xi+$$

$$+2\int_{t-\frac{\tau}{2}}^{t}q(s)P(s-t+\tau,2s-2t+\tau,t-\tau)\,ds-$$

$$-\int\limits_{2t-3\tau}^{2t-2\tau} ds \int\limits_{\frac{s+\tau}{2}}^{s+2\tau-t} q(\xi)\breve{P}(\xi-t+\tau,2\xi-s-\tau,t-\tau)\,d\xi+$$

$$\left.+\int\limits_{2(\pi-x+t)-\tau}^{2(\pi-x+t)} ds \int\limits_{\frac{s-\tau}{2}}^{s-\pi+x-t} q(\xi)\breve{P}(\xi-t+\tau,2\xi-s+\tau,t-\tau)\,d\xi\right\}.$$

Таким образом, функция $T(x, t)$ имеет непрерывную частную производную по x и, следовательно, $m(x)\in W_2^1[0,\pi]$. Лемма 3 доказана.

Докажем еще одно вспомогательное утверждение.

Лемма 4. Даны числа λ_k, $k = 0,1,2,\ldots$, вида $\rho_k = \sqrt{\lambda_k} = k+\kappa_k$, $\lambda_k \neq 0$, $\{\kappa_k\}\in l_2$. Тогда для функции

$$X(\lambda)=\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k}\right) \tag{2.10}$$

имеет место представление

$$X(\lambda)=-\gamma\rho\sin\rho\pi+1+\rho\int\limits_0^\pi w(x)\sin\rho x\,dx\,, \tag{2.11}$$

где $\rho=\sqrt{\lambda}$, $w(x)\in L_2(0,\pi)$,

$$\gamma=\frac{1}{\pi\lambda_0}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{\lambda_k}\,. \tag{2.12}$$

Доказательство. Функция $X_0(\lambda)=-\rho\sin\rho\pi$ имеет нули $k=0,\pm1\pm2,\ldots$ и допускает представление

$$X_0(\lambda)=-\lambda\pi\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{k^2}\right). \tag{2.13}$$

Из (2.10), (2.12) и (2.13) вытекает соотношение

$$X(\lambda)=\lambda_0\gamma X_0(\lambda)F(\lambda),\ F(\lambda)=\left(\frac{1}{\lambda_0}-\frac{1}{\lambda}\right)\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k-\lambda}{k^2-\lambda}. \tag{2.14}$$

Покажем, что в области $G_\delta=\{\rho:|\rho-k|\geq\delta, k=0,\pm1,\pm2,\ldots\}$ при фиксированном $\delta>0$ верна оценка $|F(\lambda)|<C_\delta$. Обозначим $\kappa_{-k}=-\kappa_k$, $\rho_{-k}=-\rho_k$, $k = 1,2, \ldots$. Тогда

$$F(\lambda)=\left(\frac{1}{\lambda_0}-\frac{1}{\lambda}\right)\prod_{k=-\infty,k\neq0}^{\infty}\frac{\rho_k-\rho}{k-\rho}=\left(\frac{1}{\lambda_0}-\frac{1}{\lambda}\right)\prod_{k=-\infty,k\neq0}^{\infty}\left(1+\frac{\kappa_k}{k-\rho}\right).$$

Выберем натуральное N так, чтобы при $k\geq N\ |\kappa_k|\leq\delta/2$. Имеем

$$F(\lambda)=\left(\frac{1}{\lambda_0}-\frac{1}{\lambda}\right)\exp\left(H_N(\rho)\right)\prod_{|k|<N,k\neq0}\left(1+\frac{\kappa_k}{k-\rho}\right), \tag{2.15}$$

где

$$H_N(\rho)=\sum_{|k|\geq N}\ln\left(1+\frac{\kappa_k}{k-\rho}\right)=\sum_{|k|\geq N}\frac{\kappa_k}{k-\rho}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{\nu+1}\left(\frac{\kappa_k}{k-\rho}\right)^\nu.$$

Так как

$$|H_N(\rho)|\leq\sum_{|k|\geq N}\frac{|\kappa_k|}{|k-\rho|}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{2^\nu}\leq C\left(\sum_{|k|\geq N}\frac{1}{|k-\rho|^2}\right)^{\frac12},$$

то из (2.15) следует, что $|F(\lambda)|<C_\delta$ при $\rho\in G_\delta$. Далее, из (2.14) получаем

$$X(\lambda)=-\lambda_0\gamma\rho(\lambda_\nu-\lambda)\left(\frac{1}{\lambda_0}-\frac{1}{\lambda}\right)\frac{\sin\rho\pi}{\nu^2-\rho^2}\prod_{k=1,k\neq\nu}^{\infty}\frac{\lambda_k-\lambda}{k^2-\lambda}.$$

Отсюда приходим к

$$X\left(\nu^2\right)=\lambda_0\gamma\left(2\kappa_\nu\nu+\kappa_\nu^2\right)\left(\frac{1}{\lambda_0}-\frac{1}{\nu^2}\right)\frac{(-1)^\nu\pi}{2}\prod_{k=1,k\neq\nu}^{\infty}\frac{\lambda_k-\nu^2}{k^2-\nu^2},$$

т. е. $\left\{X\left(\nu^2\right)/\nu\right\}\in l_2$. Рассмотрим функцию

$$\Delta(\rho)=\frac{X(\lambda)-\gamma X_0(\lambda)-1}{\rho}, \tag{2.16}$$

которая после устранения особенности является целой аналитической по ρ. Обозначим $\theta_k=\Delta(k)$, $k=0,\pm1,\pm2,\dots$. Очевидно, что $\{\theta_k\}\in l_2$, $\theta_{-k}=-\theta_k$. Построим функцию $w(x)\in L_2(0,\pi)$ так, чтобы

$$\theta_k=\int_0^\pi w(x)\sin kx dx .$$

Рассмотрим функцию

$$\theta(\rho)=\int_0^\pi w(x)\sin\rho x dx$$

и обозначим

$$S(\rho)=\frac{\theta(\rho)-\Delta(\rho)}{\sin\rho\pi}.$$

Функция $S(\rho)$ после устранения особенностей является целой аналитической по ρ. Из (2.14), (2.16) следует, что $\Delta(\rho)=\gamma\sin\rho\pi\left(1-\lambda_0F(\lambda)\right)-1/\rho$. Используя оценку $|\sin\rho\pi|\ge C_\sigma\exp\left(|\operatorname{Im}\rho|\pi\right)>0$, $\rho\in G_\delta$, и принцип максимума модуля для аналитических функций, получаем, что функция $S(\rho)$ ограничена и, следовательно, по теореме Лиувилля (см. [9, с. 209]) $S(\rho)\equiv C$. А так как при $|\rho|\to\infty$ $\lim S(\rho)=0$, то $C=0$, и приходим к соотношению (2.11). Лемма 4 доказана.

3. РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Следующие теоремы дают условия, необходимые и достаточные для разрешимости задач 1, 2.

Теорема 1. Спектральные данные $\{\lambda_k,\beta_k\}$, $k=0,1,2,\dots$, оператора A имеют вид

$$\rho_k=\sqrt{\lambda_k}=k+\kappa_k,\ \lambda_k\neq0,\ \{\kappa_k\}\in l_2, \tag{3.1}$$

$$\beta_k=(-1)^k\alpha+\kappa_{k,1},\ \alpha\neq0,\ \{\kappa_{k,1}\}\in l_2. \tag{3.2}$$

Доказательство. В силу леммы 3 характеристическая функция $L(\lambda)$ оператора A имеет вид

$$L(\lambda)=-h\rho\sin\rho\pi+1+\rho\int_0^\pi w(x)\sin\rho x dx, \tag{3.3}$$

где $h=g(0)v(\pi)$, $w(x)=-m'(\pi-x)$. При фиксированном $\delta>0$ для достаточно больших $|\rho|$, $\rho\in G_\delta=\{\rho:|\rho-k|\ge\delta,k=0,\pm1,\pm2,\dots\}$ имеем

$$|h\rho\sin\rho\pi|>\left|1+\rho\int_0^\pi w(x)\sin\rho x dx\right|.$$

Тогда по теореме Руше (см. [9], с. 206) внутри контура $\Gamma_N=\left\{\lambda:|\lambda|=(N+1/2)^2\right\}$ при достаточно больших N расположен в точности $N+1$ нуль λ_k, $k=0,1,\dots,N$, функции $L(\lambda)$, а внутри контура $\gamma_k(\delta)=\{\rho:|\rho-k|=\delta\}$ при достаточно больших k лежит ровно один нуль ρ_k функции $L(\rho^2)$, т. е. $\rho_k=\sqrt{\lambda_k}=k+\kappa_k,\kappa_k=o(1)$. Подставляя это выражение в (3.3), уточняем, что $\{\kappa_k\}\in l_2$. Таким образом, представление (3.1) доказано. Далее, используя (2.7), получаем требуемую асимптотическую формулу (3.2) для чисел β_k. Теорема 1 доказана.

Свойства спектральных данных (3.1), (3.2) являются и достаточными условиями разрешимости задач 1, 2. При этом их решение единственно.

Теорема 2. Пусть задана функция $M(x,t)$ класса M_2 и функция $g(x)\in W_2^1[0,\pi]$, $g(0)\neq0$. Пусть, кроме того, заданы числа λ_k, $k = 0,1,2,\ldots$, вида (3.1). Тогда существует единственный оператор $A(M,g,v)$ вида (1.1), для которого λ_k являются характеристическими числами.

Доказательство. По заданным числам λ_k строим функцию $X(\lambda)$ по формуле (2.10), причем согласно лемме 4 для $X(\lambda)$ имеет место представление (2.11) с некоторой функцией $w(x) \in L_2(0,\pi)$. Построим функцию

$$m(x) = \gamma - \int_0^x w(\pi - t)\,dt.$$

Далее, пусть функция $u(x)$ является решением уравнения (2.5). Ясно, что $u(x) \in W_2^1[0,\pi]$, $u(0) \neq 0$. Обозначим $v(x) = u(\pi - x)$ и рассмотрим оператор $A=A(M,g,v)$ вида (1.1). Пусть $L(\lambda)$ – характеристическая функция оператора A. Тогда, как и при доказательстве леммы 3, получаем, что

$$L(\lambda) = 1 - \rho^2 \int_0^\pi m(x)\cos\rho(\pi - x)\,dx$$

или после интегрирования по частям

$$L(\lambda) = -\gamma\rho\sin\rho\pi + 1 + \rho\int_0^\pi w(x)\sin\rho x dx\,.$$

Сравнивая это равенство с соотношением (2.11), получаем $L(\lambda) \equiv X(\lambda)$, и, следовательно, оператор A имеет спектр $\{\lambda_k\}$. Если предположить, что существует также оператор $A(M,g,\tilde{v})$ вида (1.1) с таким же спектром $\{\lambda_k\}$, то из леммы 3 и единственности решения интегрального уравнения (2.5) будет следовать, что $v(x) = \tilde{v}(x)$, $x \in [0,\pi]$. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Если задана функция $M(x, t)$ класса M_2 и числа λ_k, β_k, $k = 0,1,2, \ldots$, вида (3.1), (3.2), то существует единственный оператор $A(M,g,v)$ вида (1.1), для которого $\{\lambda_k, \beta_k\}$ являются спектральными данными.

Доказательство. Ограничимся для простоты случаем, когда все λ_k различны. Как и при доказательстве теоремы 2 по заданным числам λ_k и функции $M(x, t)$ строим функции $X(\lambda)$, $m(x)$, $P(x, t, \alpha)$. Обозначим $\beta_{k,1} = \beta_k - \alpha\cos\rho_k\pi$. Ясно, что $\{\beta_{k,1}\} \in l_2$. Система функций $\{\cos\rho_k x\}_{k=0}^\infty$ образует базис Рисса в пространстве $L_2(0,\pi)$, так как она полна и квадратично близка к ортогональному базису $\{\cos kx\}_{k=0}^\infty$ (см., например, [2], с. 131). Пусть $\chi(x) \in L_2(0,\pi)$ такова, что

$$\beta_{k,1} = \int_0^\pi \chi(x)\cos\rho_k x dx\,.$$

Положим

$$\sigma(x) = -\alpha - \int_x^\pi \chi(t)\,dt\,.$$

Пусть функция $g(x)$ является решением уравнения (2.8). Ясно, что $g(x) \in W_2^1[0,\pi]$, $g(0) = \alpha \neq 0$. Как и в теореме 2, находим теперь функцию $v(x)$. Тем самым построили оператор $A(M,g,v)$ вида (1.1), причем числа $\{\lambda_k, \beta_k\}$ являются его спектральными данными. Как и в теореме 2, единственность очевидным образом следует из леммы 3. В случае кратных λ_k рассматриваемым базисом Рисса будет система функций

$$\left\{\frac{\partial^\nu}{\partial\lambda^\nu}\cos\rho x\Big|_{\rho=\rho_k}\right\},\ \nu = 0,1,\ldots,r_k - 1,\ k = 0,1,2,\ldots,$$

где r_k – кратность λ_k. Теорема 3 доказана.

Замечание. Доказательства теорем 2, 3 конструктивны и дают возможность построить алгоритм решения задач 1, 2. Отметим также, что аналогичные результаты имеют место и для случаев, когда функции $g(x)$, $v(x)$ обладают более высокой степенью гладкости.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект 04-01-00007).

Библиографический список

1. *Хромов А.П.* Конечномерные возмущения вольтерровых операторов в банаховом пространстве // Дифференциальные уравнения и вычислительная математика. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1973. Вып. 3. С. 3–23.
2. *Юрко В.А.* Обратные спектральные задачи и их приложения. Саратов: Изд-во Сарат. пед. ин-та, 2001.
3. *Yurko V.* Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory. Inverse and Ill-posed Problems Series. Utrecht: VSP, 2002.
4. *Юрко В.А.* Обратная задача для интегральных операторов // Мат. заметки. 1985. Т. 37, № 5. С. 690–701.
5. *Levinson N.* The inverse Sturm-Liouville problem // Math. Tidsskr. 1949. Vol. 13. P. 25–30.
6. *Бутерин С.А.* О единственности восстановления одномерного возмущения оператора свертки // Математика. Механика. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2002. Вып. 4. С. 15–18.
7. *Бутерин С.А.* Необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи для одномерного возмущения оператора свертки // Математика. Механика. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2003. Вып. 5. С. 8–10.
8. *Хромов А.П.* Конечномерные возмущения вольтерровых операторов: Автореф. дис. … д-ра физ.-мат. наук. // Мат. заметки. 1974. Т. 16, № 4. С. 669–680.
9. *Привалов И.И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Физматгиз, 1977.

УДК 517.518.82

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ МНОГОЗНАЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИМ ПОЛИНОМОМ

И.Ю. Выгодчикова

Саратовский государственный университет,
кафедра математической экономики
E-mail: VigodchikovaIY@info.sgu.ru

В настоящей статье рассмотрена задача о наилучшем приближении дискретного многозначного отображения, образами которого в узлах дискретной сетки являются фиксированные отрезки, алгебраическим полиномом заданной степени. Получены необходимые и достаточные условия единственности решения этой задачи. Доказательство основано на опубликованных ранее статьях о свойствах решения рассматриваемой задачи, а также на двух вспомогательных леммах. Используется теория минимаксных задач, теория приближений П.Л. Чебышева дискретных функций алгебраическими полиномами и многозначный анализ.

About the only Solution in the Problem of the Best Plural Reflection's Approximation by Algebraic Polynomial

I. Y. Vygodchikova

This paper is devoted to the proof of the theorem including necessary and sufficient conditions in the problem of the best plural reflection's approximation by algebraic polynomial. In the proof is used several author's were published results and two auxiliary lemmas. The proof is based on the minim ax's problems theory, the approximation's theory by algebraic polynomials of the P.L. Chebyshev and the plural's analysis.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Требуется получить необходимые и достаточные условия единственности решения следующей задачи:

$$,\qquad (1)$$

где $Af = Mf + g(x)\int_0^\pi f(t)v(t)\,dt,\ Mf = \int_0^x M(x,t)f(t)\,dt,\ 0 \le x \le \pi$ – образы многозначного отображения (м.о.) $\Phi(\bullet)$ в узлах сетки $T = \{ t_0 < t_1 < \ldots < t_N \}$, причём $y_{2,k} \ge y_{1,k}, k \in [0:N]$, $p_n(A, t_k) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$ – алгебраический полином степени n с вектором коэффициентов $A = (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in R^{n+1}$.

Через $f(A,k) := \max\{ y_{2,k} - p_n(A,t_k); p_n(A,t_k) - y_{1,k} \}$ обозначим уклонение образа м.о. от значения алгебраического полинома в точке $t_k \in T$. Функция $f(A,k)$ является непрерывной и выпуклой по A при каждом фиксированном $k \in [0:N]$, но не является дифференцируемой по A на R^{n+1}. Такими же свойствами обладает и целевая функция $\rho(A)$ задачи (1).

Положим $f_1(A,k) := p_n(A,t_k) - y_{1,k}$, $f_2(A,k) := y_{2,k} - p_n(A,t_k)$, $k \in [0:N]$. Обозначим через $\rho^* := \inf_{A \in R^{n+1}} \rho(A)$, $\mathfrak{R} := \{ A \in R^{n+1} : \rho(A) = \rho^* \}$. Доказано ([1]), что $\mathfrak{R} \ne \varnothing$. Несложно показать, что множество $\mathfrak{R}$ выпукло и замкнуто, а при $N \ge n$ оно ещё и *ограничено*.

Если $N \le n$, множество решений задачи (1) представимо в виде ([2]):