УДК 514.7

О КОГОМОЛОГИЯХ АЛГЕБРЫ ЛИ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ НА S_1/Z_2

Е. Ю. Волокитина

Саратовский государственный университет,
кафедра геометрии
E-mail: evgenia.yu@gmail.com

Вычислены диагональные когомологии алгебры Ли векторных полей на орбифолде S_1/Z_2 с коэффициентами в пространстве гладких функций и 1-форм, одномерные и двумерные когомологии с коэффициентами в $\mathbb{R}$.

Ключевые слова: орбифолд, алгебра Ли, когомологии.

Cohomology of Lie Algebra of Vector Fields on S_1/Z_2

E. Yu. Volokitina

Saratov State University,
Chair of Geometry
E-mail: evgenia.yu@gmail.com

In the present paper we calculate the diagonal cohomology of Lie algebra of vector fields on S_1/Z_2 with coefficients in the space of smooth functions and 1-forms, one-dimensional and two-dimensional cohomology with coefficients in $\mathbb{R}$.

Key words: orbifold, Lie algebra, cohomology.

ВВЕДЕНИЕ

В работах И. М. Гельфанда и Д. Б. Фукса [1, 2] было доказано, что кольцо $H^*(\mathcal{U}(S_1))$ изоморфно тензорному произведению кольца полиномов с одной двумерной образующей и внешней алгебры с одной трехмерной образующей. В работе В. Н. Решетникова [3] рассматривалась задача о нахождении когомологий алгебры Ли векторных полей на окружности обращающихся в нуль в данной точке и были вычислены одномерные и двумерные когомологии.

Пусть S_1 — единичная окружность в плоскости комплексного переменного z. В данной работе рассматриваются когомологии алгебры Ли векторных полей орбифолда S_1/Z_2, получающегося из окружности действием группы Z_2, порожденной отражением относительно оси x. Эта алгебра Ли является подалгеброй алгебры Ли векторных полей на окружности. Заметим, что ограничения коциклов, представляющих образующие Гельфанда – Фукса для $H^*(\mathcal{U}(S_1))$, на нашу подалгебру тривиальны.

1. ДИАГОНАЛЬНЫЕ КОГОМОЛОГИИ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ФУНКЦИЯХ И 1-ФОРМАХ

Пусть t — угловой параметр на окружности, тогда гладкими функциями на орбифолде S_1/Z_2 являются четные периодические гладкие функции на $\mathbb{R}$. Векторными полями на S_1/Z_2 являются дифференцирования алгебры гладких функций на S_1/Z_2. Любое векторное поле на окружности представляется в виде $X(t)\dfrac{d}{dt}$, где $X(t)$ — гладкая периодическая функция. Аналогичным образом векторное поле на орбифолде S_1/Z_2 можно представить в виде $X(t)\dfrac{d}{dt}$, где $X(t)$ — нечетная периодическая гладкая функция. Алгебра Ли $\mathcal{U}(S_1/Z_2)$ векторных полей на орбифолде S_1/Z_2 — топологическая алгебра Ли с C^∞-топологией. В дальнейшем будем вместо $X(t)\dfrac{d}{dt}$ писать просто $X(t)$.

Пусть $X \to Xv$ — непрерывное представление алгебры Ли $\mathcal{U}(S_1/Z_2)$, где $v \in V$, V — топологическое пространство. Коцепью $L \in C^q(\mathcal{U}(S_1/Z_2), V)$ называется q-линейный, кососимметрический непрерывный функционал, определенный на $\mathcal{U}(S_1/Z_2)$ и принимающий значения в V. Дифференциал $d^q\colon C^q \to C^{q+1}$ определяется следующим образом:

$$d^qL(X_1,\dots,X_{q+1}) = \sum_{1\le i<j\le q+1}(-1)^{i+j-1}L\big([X_i,X_j],X_1,\dots,\widehat{X_i},\dots,\widehat{X_j},\dots,X_{q+1}\big)+ \\ +\sum_{1\le s\le q+1}(-1)^sX_sL(X_1,\dots,\widehat{X_s},\dots,X_{q+1}), \qquad (1)$$

где $L \in C^q(\mathcal{U}(S_1/Z_2), V)$ и $[X(t), Y(t)] = X(t)Y'(t) - X'(t)Y(t)$.

Если V — алгебра над $\mathbb{R}$, то стандартным образом определяется внешнее произведение коцепей: пусть $L_1 \in C^q(\mathcal{U}(S_1/Z_2), V)$, $L_2 \in C^r(\mathcal{U}(S_1/Z_2), V)$, тогда

$$L_1 \wedge L_2(X_1,\dots,X_{q+r}) =$$

$$= \sum_{1\le i_1<\ldots<i_q\le q+r} (-1)^{i_1+\ldots+i_q-\frac{q(q+1)}{2}} L_1(X_{i_1},\ldots,X_{i_q}) L_2(X_1,\ldots,\widehat{X_{i_1}},\ldots,\widehat{X_{i_q}},\ldots,X_{q+r}).$$

Можно показать, что

$$d(L_1\wedge L_2) = dL_1\wedge L_2 + (-1)^q L_1\wedge dL_2.$$

Для произвольного комплекса $C^*(\mathcal{U}(S_1/Z_2),V)$, где V — пространство гладких тензорных полей данного типа на S_1/Z_2, определяется так называемый диагональный комплекс $C^*_\Delta(\mathcal{U}(S_1/Z_2),V)$, состоящий из таких коцепей, что $L(X_1,\ldots,X_q)=0$ в точке t, если хотя бы одно из векторных полей $X_1,\ldots,X_q$ равно нулю в окрестности t.

Рассмотрим сначала комплекс $C^*_0 = \{C^q_\Delta(\mathcal{U}(S_1/Z_2),\Omega^0(S_1/Z_2)),d^q\}$, где $\Omega^0(S_1/Z_2)$ — алгебра гладких функций на орбифолде S_1/Z_2.

Каждую коцепь ω из C^q_0 можно представить в виде

$$\omega = \sum_{n_1,\ldots,n_q} f^{n_1\ldots n_q}\omega_{n_1}\wedge\ldots\wedge\omega_{n_q},$$

где $f^{n_1\ldots n_q}$ — функция на окружности, четная, если $n_1+\ldots+n_q-q$ — четно, и нечетная в противном случае; если $X(t)\dfrac{d}{dt}$ — векторное поле на окружности, то $\omega_n(X(t)) = \dfrac{d^nX(t)}{dt^n}$. При этом сумма состоит из конечного числа ненулевых слагаемых. Для этого комплекса дифференциал (1) задается формулами:

$$d^q(f\omega_{n_1}\wedge\ldots\wedge\omega_{n_q}) = -\frac{df}{dt}\omega_0\wedge\omega_{n_1}\wedge\ldots\wedge\omega_{n_q} + f(n_1+\ldots+n_q-q)\omega_1\wedge\omega_{n_1}\wedge\ldots\wedge\omega_{n_q}+$$
$$+f\tilde{d}^q(\omega_{n_1}\wedge\ldots\wedge\omega_{n_q}),\quad \text{если}\quad n_1,\ldots,n_q\ne 0,$$
$$d^{q+1}(f\omega_0\wedge\omega_{n_1}\wedge\ldots\wedge\omega_{n_q}) =$$
$$= -f(n_1+\ldots+n_q-q)\omega_0\wedge\omega_1\wedge\omega_{n_1}\wedge\ldots\wedge\omega_{n_q} - f\omega_0\wedge\tilde{d}^{q+1}(\omega_{n_1}\wedge\ldots\wedge\omega_{n_q}),$$
$$\tilde{d}^q(\omega_{n_1}\wedge\ldots\wedge\omega_{n_q}) = \sum_{i=1}^{q}(-1)^{i-1}\sum_{j=2}^{[n_i/2]}(C^j_{n_i}-C^{n_i-j+1}_{n_i})\omega_j\wedge\omega_{n_i-j+1}\wedge\omega_{n_1}\wedge\ldots\wedge\widehat{\omega_{n_i}}\wedge\ldots\wedge\omega_{n_q}.$$

Справедлива

Теорема 1. *Имеют место следующие изоморфизмы:*

$$H^0(C^*_0) = H^1(C^*_0) = \mathbb{R}\quad \text{и}\quad H^k(C^*_0) = 0\quad \text{при}\quad k\ne 0,1.$$

Образующей одномерных когомологий является класс коцикла ω_1.

Доказательство. Произвольную коцепь ω нашего комплекса можно представить в следующем виде:

$$\omega = \sum_{n_1,\ldots,n_q\ne 0,1} f^{n_1,\ldots,n_q}\omega_{n_1}\wedge\ldots\wedge\omega_{n_q} + \sum_{k_1,\ldots,k_{q-1}\ne 0,1} g_0^{k_1,\ldots,k_{q-1}}\omega_0\wedge\omega_{k_1}\wedge\ldots\wedge\omega_{k_{q-1}}+$$
$$+\sum_{l_1,\ldots,l_{q-1}\ne 0,1} g_1^{l_1,\ldots,l_{q-1}}\omega_1\wedge\omega_{l_1}\wedge\ldots\wedge\omega_{l_{q-1}} + \sum_{m_1,\ldots,m_{q-2}\ne 0,1} h^{m_1,\ldots,m_{q-2}}\omega_0\wedge\omega_1\wedge\omega_{m_1}\wedge\ldots\wedge\omega_{m_{q-2}}.$$

Положим $n=\sum\limits_{i=1}^{q} n_i$, $k=\sum\limits_{i=1}^{q-1} k_i$, $l=\sum\limits_{i=1}^{q-1} l_i$, $m=\sum\limits_{i=1}^{q-2} m_i$.

Предположим $q>1$ и рассмотрим следующий оператор $F^q\colon C^q_0\to C^{q-1}_0$:

$$F^q\omega = \sum_{l_1,\ldots,l_{q-1}\ne 0,1}\frac{g_1^{l_1,\ldots,l_{q-1}}}{l+1-q}\omega_{l_1}\wedge\ldots\wedge\omega_{l_{q-1}} + \sum_{m_1,\ldots,m_{q-2}\ne 0,1}\frac{h^{m_1,\ldots,m_{q-2}}}{q-m-2}\omega_0\wedge\omega_{m_1}\wedge\ldots\wedge\omega_{m_{q-2}},$$

если $q-m-2\ne 0$. $q-m-2$ может равняться нулю только в случае $q=2$, $m=0$, тогда положим

$$F^2\Big(\sum_{n_1,n_2\ne 0,1} f^{n1,n2}\omega_{n_1}\wedge\omega_{n_2} + \sum_{k\ne 0,1} g_0^k\omega_0\wedge\omega_k + \sum_{l\ne 0,1} g_1^l\omega_1\wedge\omega_l + h\omega_0\wedge\omega_1\Big) = \sum_{l\ne 0,1}\frac{g_1^l}{l-1}\omega_l - \int_0^t h(\tau)d\tau\,\omega_1.$$

Так как h — нечетная функция, то ее интеграл по окружности равен 0 и функция $\int\limits_0^t h(\tau)d\tau$ — периодическая.

Прямыми вычислениями можно показать, что справедливо равенство $F^{q+1}\circ d^q + d^{q-1}\circ F^q = id_{C_0^q}$, т. е. F — оператор гомотопии. Следовательно, $H^k(C_0^*) = 0$, при $k > 1$.

Рассмотрим случай $q = 1$. Тогда форма нашего комплекса будет иметь вид $\omega = f(t)\omega_n$. Из формулы для дифференциала видно, что коцепь $f(t)\omega_n$ не является коциклом при $n > 1$.

Пусть $\omega = f(t)\omega_0$. Коцепь такого вида является коциклом. Коцепи нулевого порядка — гладкие четные функции на окружности и $df(X(t)) = -f'(t)X = -f'(t)\omega_0$. Рассмотрим функцию $g(t) = -\int\limits_0^t f(\tau)d\tau$, тогда $dg = \omega$, т. е. коцикл $f(t)\omega_0$ является границей.

Остается случай $\omega = f\omega_1$. Дифференциал от такой формы равен нулю только в случае $f \equiv \mathrm{const}$. Из формулы для дифференциала нуль-коцепи мы получаем, что форма ω_1 не является дифференциалом, а следовательно, ее класс когомологий является образующей одномерных когомологий данного комплекса и других образующих при $q > 0$ нет. При $q = 0$ циклами являются постоянные функции. Таким образом получаем, что $H^k(C_0^*) = \mathbb{R}$, если $k = 0, 1$. □

Рассмотрим теперь комплекс диагональных коцепей с коэффициентами в пространстве 1-форм на S_1/Z_2 $C_1^* = \{C_\Delta^q(\mathcal{U}(S_1/Z_2), \Omega^1(S_1/Z_2), d^q\}$. Любая коцепь C_1^q представляется в виде

$$\omega = \sum_{n_1,\ldots,n_q} f^{n_1\ldots n_q}\omega_{n_1}\wedge\ldots\wedge\omega_{n_q}dt,$$

где $f^{n_1\ldots n_q}$ — функция на окружности, нечетная, если $n_1+\ldots+n_q-q$ — четно, и четная в противном случае и

$$f^{n_1\ldots n_q}\omega_{n_1}\wedge\ldots\wedge\omega_{n_q}dt(X_1,\ldots,X_q) = f^{n_1\ldots n_q}\omega_{n_1}\wedge\ldots\wedge\omega_{n_q}(X_1,\ldots,X_q)dt.$$

Дифференциал вычисляется по формуле

$$d^q(f\omega_{n_1}\wedge\ldots\wedge\omega_{n_q}dt) = \big(d^q(f\omega_{n_1}\wedge\ldots\wedge\omega_{n_q}) - f\omega_1\wedge\omega_{n_1}\wedge\ldots\wedge\omega_{n_q}\big)dt.$$

Тогда

$$d^q(f\omega_{n_1}\wedge\ldots\wedge\omega_{n_q}dt) = -\frac{df}{dt}\omega_0\wedge\omega_{n_1}\wedge\ldots\wedge\omega_{n_q}dt + f(n_1+\ldots+n_q-q-1)\omega_1\wedge\omega_{n_1}\wedge\ldots\wedge\omega_{n_q}dt +$$
$$+f\tilde{d}^q(\omega_{n_1}\wedge\ldots\wedge\omega_{n_q}))dt, \quad \text{если} \quad n_1,\ldots,n_q \neq 0,$$
$$d^{q+1}(f\omega_0\wedge\omega_{n_1}\wedge\ldots\wedge\omega_{n_q}dt) =$$
$$= f(q+1-n_1-\ldots-n_q)\omega_0\wedge\omega_1\wedge\omega_{n_1}\wedge\ldots\wedge\omega_{n_q}dt - f\omega_0\wedge\tilde{d}^{q+1}(\omega_{n_1}\wedge\ldots\wedge\omega_{n_q})dt.$$

Справедлива

Теорема 2. *Имеют место следующие изоморфизмы:*

$$H^1(C_1^*) = H^2(C_1^*) = \mathbb{R} \quad \text{и} \quad H^k(C_1^*) = 0, \quad \text{при} \quad k \neq 1, 2.$$

Образующей одномерных когомологий является класс коцикла $\omega_2 dt$, а двумерных — класс коцикла $\omega_1\wedge\omega_2 dt$.

Доказательство. Всякую коцепь нашего комплекса можно представить в виде

$$\omega = \sum_{n_1,\ldots,n_q\neq 0,1} f^{n_1,\ldots,n_q}\omega_{n_1}\wedge\ldots\wedge\omega_{n_q}dt + \sum_{k_1,\ldots,k_{q-1}\neq 0,1} g_0^{k_1,\ldots,k_{q-1}}\omega_0\wedge\omega_{k_1}\wedge\ldots\wedge\omega_{k_{q-1}}dt +$$
$$+ \sum_{l_1,\ldots,l_{q-1}\neq 0,1} g_1^{l_1,\ldots,l_{q-1}}\omega_1\wedge\omega_{l_1}\wedge\ldots\wedge\omega_{l_{q-1}}dt + \sum_{m_1,\ldots,m_{q-2}\neq 0,1} h^{m_1,\ldots,m_{q-2}}\omega_0\wedge\omega_1\wedge\omega_{m_1}\wedge\ldots\wedge\omega_{m_{q-2}}dt.$$

n, k, l, m определяются также как и ранее. Предположим $q > 1$, $q - l \neq 0$ и рассмотрим оператор $F^q\colon C_1^q \to C_1^{q-1}$:

$$F^q\omega = \sum_{l_1,\ldots,l_{q-1}\neq 0,1} \frac{g_1^{l_1,\ldots,l_{q-1}}}{q-p}\omega_{l_1}\wedge\ldots\wedge\omega_{l_{q-1}}dt + \sum_{m_1,\ldots,m_{q-2}\neq 0,1} \frac{h^{m_1,\ldots,m_{q-2}}}{q-m-1}\omega_0\wedge\omega_{m_1}\wedge\ldots\wedge\omega_{m_{q-2}}dt,$$

если $m-q+1 \neq 0$. Пусть теперь $m-q+1=0$. Это возможно только при $q=3, m=2$, тогда положим

$$F^3\Big(\sum_{n_1,n_2,n_3\neq 0,1} f^{n_1,n_2,n_3}\omega_{n_1}\wedge\omega_{n_2}\wedge\omega_{n_3}dt+\sum_{k_1,k_2\neq 0,1} g_0^{k_1,k_2}\omega_0\wedge\omega_{k_1}\wedge\omega_{k_2}dt+$$

$$+\sum_{l_1,l_2\neq 0,1} g_1^{l_1,l_2}\omega_1\wedge\omega_{l_1}\wedge\omega_{l_2}dt+h\omega_0\wedge\omega_1\wedge\omega_2 dt\Big)=\sum_{l_1,l_2\neq 0,1}\frac{g_1^{l_1,l_2}}{l-2}\omega_{l_1}\wedge\omega_{l_2}dt-\int\limits_0^t h(\tau)d\tau\omega_1\wedge\omega_2,$$

где $\int\limits_0^t h(\tau)d\tau$ — периодическая функция, так как h — нечетная функция.

При $p-k=0$ (это возможно только при $q=k=2$) положим

$$F^2\Big(\sum_{n_1,n_2\neq 0,1} f^{n_1,n_2}\omega_{n_1}\wedge\omega_{n_2}dt+\sum g_0\omega_0\wedge\omega_2 dt+\sum_{l\neq 0,1} g_1^l\omega_1\wedge\omega_l dt+h\omega_0\wedge\omega_1 dt\Big)=$$

$$=-\int\limits_0^t g_0(\tau)d\tau\omega_2 dt+h\omega_0 dt,$$

где $\int\limits_0^t g_0(\tau)d\tau$ — периодическая функция, так как g_0 — нечетная функция.

Прямыми вычислениями можно показать, что справедливо равенство $F^{q+1}\circ d^q+d^{q-1}\circ F^q=id_{C_1^q}$, и, следовательно, F — оператор гомотопии.

Пусть теперь $q=l$. Это возможно только в том случае, когда $q=2, l=2$. В этом случае коцепь представляется в виде

$$\omega=\widetilde{\omega}+\sum g_1\omega_1\wedge\omega_2 dt,$$

где

$$\widetilde{\omega}=\sum_{n_1,n_2\neq 0,1} f^{n_1,n_2}\omega_{n_1}\wedge\omega_{n_2}dt+\sum_{k\neq 0,1} g_0^k\omega_0\wedge\omega_k dt+h\omega_0\wedge\omega_1 dt.$$

Рассмотрим $d^2(g_1\omega_1\wedge\omega_2 dt)=-\dfrac{dg_1(t)}{dt}\omega_0\wedge\omega_1\wedge\omega_2 dt$. Слагаемое $\dfrac{dg_1(t)}{dt}\omega_0\wedge\omega_1\wedge\omega_2 dt$ в $d^2\omega$ ни с чем не может сократиться, ω будет коциклом, только при $g_1(t)\equiv\mathrm{const}=c$. В этом случае

$$d^2\omega=d^2\widetilde{\omega}.$$

Для $\widetilde{\omega}$ определен оператор F, поэтому если ω является коциклом, то $\widetilde{\omega}$ — граница. Из формулы для дифференциала 1-коцепи

$$d^1(f\omega_n dt)=\frac{df}{dt}\omega_0\wedge\omega_n dt+f(2-n)\omega_1\wedge\omega_n+f\tilde{d}(\omega_n)),\quad \text{если}\quad n\neq 0.$$

Видно, что цикл $\omega_1\wedge\omega_2 dt$ не может являтся границей, т. е. его класс когомологий является образующей двумерных когомологий. Получаем, что $H^k(C_1^*)=0$ при $k>2$ и $H^2(C_1^*)=\mathbb{R}$.

Пусть теперь $q=1$. Тогда любая коцепь может быть записана в виде

$$\omega=f\omega_n dt+g_1\omega_1 dt+g_0\omega_0 dt.$$

Рассмотрим

$$d^1\omega=-\frac{df}{dt}\omega_0\wedge\omega_n dt+f(n-2)\omega_1\wedge\omega_n+f\tilde{d}^1(\omega_n)dt-\frac{dg_1}{dt}\omega_0\wedge\omega_1 dt+g_0\omega_0\wedge\omega_1 dt.$$

Откуда видно, что для выполнения равенства $d^1\omega=0$ необходимо, чтобы $g_0=\dfrac{dg_1}{dt}$, $\dfrac{df}{dt}=0$, и либо $n=2$, либо $f\equiv 0$ ($f\tilde{d}^1(\omega_n)dt$ в этом случае равняется нулю автоматически). Тогда если $d\omega=0$, то коцепь записывается в виде

$$\omega=c\omega_2 dt+g_1\omega_1 dt+\frac{dg_1}{dt}\omega_0.$$

Так как дифференциал нуль-мерной коцепи записывается в виде

$$d^0(fdt) = -\frac{df}{dt}\omega_0 dt - f(t)\omega_1 dt,$$

то $\omega = c\omega_2 dt - d(g_1 dt)$. Коцикл $\omega_2 dt$ не является границей нуль-мерной коцепи, и поэтому его класс когомологий является образующей одномерных когомологий. Из формулы для дифференциала нуль-мерных коцепей видно, что только нулевая коцепь является коциклом.

Таким образом, получаем, что $H^1(C_1^*) = \mathbb{R}$ и $H^0(C_1^*) = 0$. □

Обозначим через $\widetilde{d}^q\colon C_0^q \to C_1^q$ внешний диференциал форм на S/Z_2. В нашем случае он действует по формуле

$$\widetilde{d}^q(f\omega_{n_1} \wedge \ldots \wedge \omega_{n_q})(X_1, \ldots, X_q) = \frac{df}{dt}\omega_{n_1} \wedge \ldots \wedge \omega_{n_q}(X_1, \ldots, X_q)dt+$$
$$+f\omega_{n_1+1} \wedge \ldots \wedge \omega_{n_q}(X_1, \ldots, X_q)dt + f\omega_{n_1} \wedge \ldots \wedge \omega_{n_q+1}(X_1, \ldots, X_q)dt.$$

Прямым вычислением можно показать, что $d^q\widetilde{d}^q = -\widetilde{d}^{q+1}d^q$. Тогда возникает двойной комплекс $C^* = \bigoplus\limits_{q,p} C^q_{\triangle}(\mathcal{U}(S/Z_2)), \Omega^p(S/Z_2))$ с полным дифференциалом $d + \widetilde{d}$. Так как окружность одномерна, то в нашем случае $p = 0, 1$.

Справедлива

Теорема 3. *Имеют место следующие изоморфизмы:*

$$H^0(C^*) = H^3(C^*) = \mathbb{R} \quad \text{и} \quad H^k(C^*) = 0 \quad \text{при} \quad k \neq 0, 3.$$

Образующей трехмерных когомологий является класс коцикла $\omega_1 \wedge \omega_2\, dt$.

Доказательство. Рассмотрим первую фильтрацию двойного комплекса и соответствующую спектральную последовательность E_r^{qp}. Для нее $E_2^{q1} = H^q(\widetilde{H}^1(C^*)) = H^q((C_1/\widetilde{d}C_0)^*)$, где H и $\widetilde{H}$ когомологии относительно дифференциалов d и $\widetilde{d}$ соответственно и $E_2^{qp} = 0$ при $p \neq 1$, $q > 0$.

Найдем сначала $H^q(\widetilde{d}C_0^*)$. Определим для подкомплекса $\widetilde{d}C_0^*$ оператор $\widetilde{F}^q\colon \widetilde{d}C_0^q \to \widetilde{d}C_0^{q-1}$. Пусть $c = \widetilde{d}^q\omega$, тогда

$$\widetilde{F}^q c = -\widetilde{d}^{q-1}(F^q\omega),$$

где F — оператор гомотопии для C_0^*. Тогда в силу антикоммутирования дифференциалов и условия того, что F — оператор гомотопии, следует

$$d^{q-1}(\widetilde{F}^q c) + \widetilde{F}^{q+1}(d^q c) = c,$$

т. е. $\widetilde{F}$ — оператор гомотопии для $\widetilde{d}C_0^*$. Образующая ω_1 одномерных когомологий с коэффициентами в функциях при действии $\widetilde{d}$ перейдет в образующую $\omega_2 dt$ для $H^1(\widetilde{d}C_0^*)$. В итоге получаем $H^1(\widetilde{d}C_0^*) = H^1(C_0^*) = \mathbb{R}$, $H^q(\widetilde{d}C_0^*) = 0$, если $q > 1$, и $H^0(\widetilde{d}C_0^*) = 0$, так как в комплексе C_1^* нет ненулевых нуль-мерных коциклов. Тогда из точной последовательности когомологий для C_1^*, $\widetilde{d}C_0^*$ и C_1^*/dC_0^* получаем, что $H^3(C^*) = \mathbb{R}$, $H^0(C^*) = H^0(C_0^*) = \mathbb{R}$, $H^k(C^*) = 0$ при $k \neq 0, 3$, а образующей трехмерных когомологий является класс коцепи $\omega_1 \wedge \omega_2 dt$. □

2. КОГОМОЛОГИИ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ В $\mathbb{R}$

Рассмотрим теперь комплекс коцепей $C^*(\mathcal{U}(S_1/Z_2))$ с коэффициентами в тривиальном модуле $\mathbb{R}$.

Дифференциал в этом случае задается правилом: если $L \in C^q(\mathcal{U}(S_1/Z_2))$, то

$$dL(X_1, \ldots, X_{q+1}) = \sum_{1 \le i < j \le q+1} (-1)^{i+j-1} L\big([X_i, X_j], X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, X_{q+1}\big).$$

Рассмотрим отображения $\varphi_0\colon C_0^q \to C^q(\mathcal{U}(S_1/Z_2))$, $\varphi_1\colon C_0^q \to C^q(\mathcal{U}(S_1/Z_2))$, $\psi\colon C^{q+1} \to$ $\to C^q(\mathcal{U}(S_1/Z_2))$, которые определяются следующим образом: пусть $\omega \in C_0^q$, $c \in C^{q+1}$, тогда

$$\varphi_0(\omega)(X_1, \ldots, X_q) = \omega(X_1, \ldots, X_q)(0), \quad \varphi_1(\omega)(X_1, \ldots, X_q) = \omega(X_1, \ldots, X_q)(\pi),$$

$$\psi(c)(X_1, \ldots, X_q) = \int_0^{\pi} c(X_1, \ldots, X_q).$$

Можно показать, что эти отображения являются гомоморфизмами комплексов.

Для комплекса $C^*(\mathcal{U}(S_1/Z_2))$ определяется диагональный подкомплекс. Коцепь $c \in C^q(\mathcal{U}(S_1/Z_2))$ принадлежит диагональному подкомплексу, если $c(X_1, \ldots, X_q) = 0$, когда носители векторных полей $X_1\dfrac{d}{dt}, \ldots, X_q\dfrac{d}{dt}$ имеют пустое пересечение. В одномерном случае полный комплекс и диагональный подкомплекс совпадают. В случае гладкого многообразия когомологии диагонального подкомплекса с коэффициентами в тривиальном модуле $\mathbb{R}$ получаются из двойного комплекса с помощью гомоморфизма, аналогичного ψ. В нашем случае это не так. А именно справедлива

Теорема 4. *Имеют место следующие изоморфизмы:*

$$H^1(C^q(\mathcal{U}(S_1/Z_2))) = H^2(C^q(\mathcal{U}(S_1/Z_2))) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}.$$

Образующими одномерых когомологий являются классы коциклов $\varphi_0(\omega_1)$ и $\varphi_1(\omega_1)$, а двумерных — классы коциклов $\psi(\omega_1 \wedge \omega_2 dt)$ и $\varphi_0(\omega_1) \wedge \varphi_1(\omega_1)$.

Доказательство. Известно, что подпространство векторных полей, порожденных векторными полями вида $\sin kt\dfrac{d}{dt}$, $k \in \mathbb{N}$, всюду плотно в $\mathcal{U}(S_1/Z_2)$.

Поставим в соответствие коцепи $L \in C^q(\mathcal{U}(S_1/Z_2))$ набор чисел $\{a_{i_1,\ldots,i_q}\}_{i_1,\ldots,i_q \in \mathbb{Z}}$, где $a_{i_1,\ldots,i_q} = L(\sin i_1 t, \ldots, \sin i_q t)$. L однозначно определяется этим набором. При этом, так как $a_0 = 0$, а $a_{-i} = -a_i$ и в силу кососимметричности коцепи, можно считать, что $i_1, \ldots, i_q \in \mathbb{N}$ и $i_1 > i_2 > \ldots > i_q$.

Условие $dL = 0$ можно написать в терминах $a_{i_1,\ldots,i_q}$ следующим образом:

$$\frac{1}{2}\sum_{1 \le l < k \le q+1} (-1)^{l+k-1}\big((i_l + i_k)a_{i_l - i_k, i_1,\ldots,\hat{i}_l,\ldots,\hat{i}_k,\ldots,i_{q+1}} - (i_l - i_k)a_{i_l + i_k, i_1,\ldots,\hat{i}_l,\ldots,\hat{i}_k,\ldots,i_{q+1}}\big) = 0. \tag{2}$$

Рассмотрим случай $q = 1$. Тогда формула (2) будет иметь вид

$$(i_1 + i_2)a_{i_1 - i_k} - (i_1 - i_2)a_{i_1 + i_2} = 0. \tag{3}$$

Если $i_1 + i_2$ — четное(нечетное) число, то и $i_1 - i_2$ — четное(нечетное) число. Поэтому уравнения (3) разбиваются на две независимые группы: когда $i_1 + i_2$ — четно и соответственно нечетно. Пусть $i_1 = 1$, тогда (3) примет вид $(2k+1)a_1 - a_{2k+1} = 0$, $k = 1, 2\ldots$ Откуда получаем $a_{2k+1} = (2k+1)a_1$. Аналогично, полагая $i_1 = 2$, получаем $a_{2k} = ka_2$, где $k = 2, 3\ldots$ Таким образом, размерность множества решений системы уравнений (3) не превосходит 2.

Обозначим $c_1 = \varphi_0(\omega_1)$ и $c_2 = \varphi_1(\omega_1)$. Так как φ_0 и φ_1 — гомоморфизмы комплексов, то c_1 и c_2 являются коциклами. Обозначим $a_1 = c_1(\sin t)$, $a_2 = c_1(\sin 2t)$, $b_1 = c_2(\sin t)$, $b_2 = c_2(\sin 2t)$ Из того что

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

следует, что c_1 и c_2 — линейно независимы. Таким образом, получаем $H^1(C^*(\mathcal{U}(S_1/Z_2))) = \mathbb{R}^2$.

Рассмотрим теперь случай $q = 2$. Тогда формула (2) будет иметь вид

$$\begin{gathered}(i_1 + i_2)a_{i_1 - i_2, i_3} - (i_1 - i_2)a_{i_1 + i_2, i_3} - (i_1 + i_3)a_{i_1 - i_3, i_2} + \\ +(i_1 - i_3)a_{i_1 + i_3, i_2} + (i_2 + i_3)a_{i_2 - i_3, i_1} - (i_2 - i_3)a_{i_2 + i_3, i_1} = 0.\end{gathered} \tag{4}$$

Как и в одномерном случае уравнения (4) разбиваются на две независимые группы: 1) когда $i_1 + i_2 + i_3$ — четное число и 2) когда $i_1 + i_2 + i_3$ — нечетное число.

Пусть сначала $i_1 + i_2 + i_3$ — четное число. В этом случае суммы индексов всех $a_{k,l}$ — четные числа. Условие того, что коцикл a_{i_1, i_2} является границей, записывается в виде

$$a_{i_1, i_2} = \frac{1}{2}((i_1 + i_2)a_{i_1 - i_k} - (i_1 - i_2)a_{i_1 + i_2}). \tag{5}$$

Записывая формулу (5) в случае, когда $i_1 = i_2 + 2$, получим $a_{i_1, i_1 - 2} = (i_1 - 1)a_2 - a_{2(i_1 - 1)}$. Откуда

$$2a_{2(i_1 - 1)} = 2(i_1 - 1)a_2 - a_{i_1, i_1 - 2}. \tag{6}$$

Пусть теперь $i_1+i_2=2m$, $i_1-i_2=2n$. Тогда формула (5) примет вид

$$a_{i_1,\,i_2}=ma_{2n}-na_{2m}. \tag{7}$$

Полагая сначала $i_1=m+1$, а потом $i_1=n+1$, из формулы (6) найдем $2a_{2m}$ и $2a_{2n}$ и подставим в (7). Тогда получим, что в случае четной суммы индексов условие того, что коцикл является границей, можно записать в виде

$$a_{i_1,\,i_2}=\frac{i_1-i_2}{2}a_{\frac{i_1+i_2}{2}+1,\,\frac{i_1+i_2}{2}-1}-\frac{i_1+i_2}{2}a_{\frac{i_1-i_2}{2}+1,\,\frac{i_1-i_2}{2}-1}. \tag{8}$$

Обозначим

$$X_{i_1,\,i_2}=a_{i_1,\,i_2}-\frac{i_1-i_2}{2}a_{\frac{i_1+i_2}{2}+1,\,\frac{i_1+i_2}{2}-1}-\frac{i_1+i_2}{2}a_{\frac{i_1-i_2}{2}+1,\,\frac{i_1-i_2}{2}-1}.$$

Так как любая граница является коциклом, то каждое уравнение системы (4) может быть записано как линейная комбинация уравнений системы (8), т. е. в терминах $X_{i_1,\,i_2}$. При этом $X_{i_1,\,i_2}$, у которых $i_1-i_2=2$ в уравнения входить не будут, $X_{i_1,\,i_1}=0$, так как $a_{i_1,\,i_1}=0$, остальные $X_{i_1,\,i_2}$ входят в уравнение с теми же коэффициентами, а нулевое решение соответствует границам.

Из формулы (4) видно, что в каждое уравнение входят $a_{k,\,l}$ с суммой индексов $k+l=i_1+i_2+i_3$ и меньше. Из этого следует, что в уравнения, для которых $i_1+i_2+i_3\le 2k$, входит лишь конечное число неизвестных с суммами индексов, не превосходящими $2k$. Индукцией по $i_1+i_2+i_3$ покажем, что других решений кроме границ система (4) не имеет.

Пусть сначала $i_1+i_2+i_3=6$ — наименьшая возможная сумма при $i_1>i_2>i_3>0$. Такой сумме соответствует единственный случай, когда $i_1=3, i_2=2, i_3=1$. Формула (4) будет иметь вид

$$5a_{1,\,1}-a_{5,\,1}-4a_{2,\,2}+2a_{4,\,2}+3a_{1,\,3}-a_{3,\,3}=-a_{5,\,1}+2a_{4,\,2}+3a_{1,\,3}=0,$$

или в терминах $X_{k_1,\,k_2}$:

$$-X_{5,\,1}=0.$$

Предположим, что все $X_{k_1,\,k_2}$, входящие в уравнения, при $k_1+k_2<2m$ равны нулю. И пусть теперь $i_1+i_2+i_3=2m$. Записывая формулу (4) для случаев $i_1=m+l-1, i_2=m-l, i_3=1$, где $l=\overline{1,m-2}$, и используя предположение индукции, получим, что

$$X_{m+2,\,m-2}=X_{m+3,\,m-3}=\ldots=X_{m+(m-2),\,m-(m-2)}=X_{m+(m-2),\,m-(m-2)}=0,$$

т. е. $X_{k,\,l}$, входящие в уравнения с суммой индексов равной $2m$, равны нулю — индукция завершена. Получаем, что в случае четной суммы индексов других решений уравнений (4) кроме границ нет.

Рассмотрим теперь случай, когда $i_1+i_2+i_3$ — нечетное число.

Запишем условие того, что коцепь $a_{i_1,\,i_2}$ является границей (формула (5)) для случая $i_2=i_1-1$: $a_{i_1,\,i_1-1}=\dfrac{1}{2}((2i_1-1)a_1-a_{2i_1-1})$. Откуда

$$a_{2i_1-1}=(2i_1-1)a_1-2a_{i_1,\,i_1-1}. \tag{9}$$

Запишем формулу (5) для случая нечетной суммы индексов или $i_1=2k+1$, $i_2=2l$:

$$a_{2k+1,\,2l}=\frac{1}{2}((2(k+l)+1)a_{2(k-l)+1}-(2(k-l)+1)a_{2(k+l)+1}). \tag{10}$$

Полагая сначала $i_1=k-l+1$, а затем $i_1=k+l+1$, найдем $a_{2(k-l)+1}$ и $a_{2(k+l)+1}$ из формулы (9) и подставим в (10). Полученное условие того, что коцикл является границей, запишем в виде

$$a_{2k+1,\,2l}=(2(k-l)+1)a_{k+l+1,\,k+l}-(2(k+l)+1)a_{k-l+1,\,k-l}. \tag{11}$$

Обозначим $X_{2k+1,\,2l}=a_{2k+1,\,2l}-(2(k-l)+1)a_{k+l+1,\,k+l}-(2(k+l)+1)a_{k-l+1,\,k-l}$.

Аналогично четному случаю условие коцикла (формула (4)) может быть записано в терминах $X_{2k+1,\,2l}$. При этом $X_{i_1,\,i_1-1}$ в уравнения входить не будут. А границам соответствует нулевое решение.

Индукцией по сумме $i_1+i_2+i_3$ покажем, что все $X_{2k+1,\,2l}$ можно выразить через $X_{5,\,2}$ и $X_{1,\,4}$. Рассмотрим формулу (4) для случая $i_1=4, i_2=2, i_1=1$. Она будет иметь вид

$$6a_{2,\,1}-2a_{6,\,1}-5a_{3,\,2}+3a_{5,\,2}+3a_{1,\,4}-a_{3,\,4}=0,$$

или в терминах $X_{k,\,l}$:

$$-2X_{6,\,1}+3X_{5,\,2}+3X_{1,\,4}=0.$$

Откуда получаем

$$X_{6,\,1}=\frac{1}{2}(3X_{5,\,2}+3X_{1,\,4}).$$

Предположим, что все $X_{k_1,\,k_2}$, у которых $k_1+k_2<2m+1$, $m>3$, выражаются через $X_{5,\,2}$ и $X_{1,\,4}$. Пусть $i_1+i_2+i_3=2m+1$. Записывая формулу (4) для $i_1=m+l, i_2=m-l, i_3=1$, где $1\le l\le m-2$, получим, что все $X_{k_1,\,k_2}$ с суммой индексов $k_1+k_2=2m+1$ можно выразить через $X_{m+2,m-1}$, $X_{5,\,2}$ и $X_{1,\,4}$.

Записывая формулу (4) для $i_1=m$, $i_2=m-1$, $i_3=2$, получим, что и $X_{m+2,m-1}$ выражается через $X_{5,\,2}$ и $X_{1,\,4}$, т. е. мы получили, что все $X_{k_1,\,k_2}$ с суммой индексов, равной $2m+1$, выражаются через $X_{5,\,2}$ и $X_{1,\,4}$, индукция завершена.

В итоге мы получаем, что размерность множества решений системы в терминах $X_{k_1,\,k_2}$ не превосходит двух, т. е. не может быть больше двух независимых коциклов, не являющихся границами.

Рассмотрим коцепи α и β, определяющиеся следующим образом: $\alpha=c_1\wedge c_2$, $\beta=\psi(\omega_1\wedge\omega_2 dt)$, α является коциклом как внешнее произведение коциклов, β также является коциклом, так как ψ — гомоморфизм комплексов.

Пусть $a_{i_1,\,i_2}=\alpha(\sin i_1t,\sin i_2t)$. Если i_1+i_2 — четно, то $a_{i_1,\,i_2}=0$, и $a_{2k+1,\,2l}=2(2k+1)2l$, $a_{2k,\,2l+1}=-2(2l+1)2k$. Тогда $X_{5,\,2}=a_{5,\,2}-3a_{4,\,3}+7a_{2,\,1}\neq 0$, $X_{4,\,1}=a_{4,\,1}-3a_{3,\,2}+5a_{2,\,1}\neq 0$. Откуда следует, что коцикл α не является границей.

Пусть $b_{i_1,\,i_2}=\beta(\sin i_1t,\sin i_2t)$. Если $i_1=0$, $i_2=0$ или i_1+i_2 — четное число, то $b_{i_1,\,i_2}=0$. В остальных случаях $b_{i_1,\,i_2}=2\dfrac{i_1^3i_2+i_1i_2^3}{i_1^2-i_2^2}$. Тогда $Y_{5,\,2}=b_{5,\,2}-3b_{4,\,3}+7b_{2,\,1}\neq 0$, $Y_{4,\,1}=b_{4,\,1}-3b_{3,\,2}+5b_{2,\,1}\neq 0$, откуда следует, что коцикл β не является границей. А из того, что

$$\begin{vmatrix} X_{5,\,2} & X_{4,\,1} \\ Y_{5,\,2} & Y_{4,\,1} \end{vmatrix}\neq 0,$$

следует, что α с β определяют разные классы когомологий. Таким образом, мы получили, что $H^2(C^*(\mathcal{U}(S_1/Z_2)))=\mathbb{R}^2$ с образующими классами коциклов α и β. □

Можно предположить, что найденные классы когомологий являются образующими алгебры когомологий с коэффициентами в $\mathbb{R}$.

В заключение автор выражает благодарность М. В. Лосику за поставленную задачу и помощь в работе.

Библиографический список

1. *Гельфанд И. М., Фукс Д. Б.* Когомологии алгебры Ли векторных полей на окружности // Функц. анализ и его прил. 1968. Т. 2, вып. 4. С. 92–93.

2. *Гельфанд И. М., Фукс Д. Б.* Когомологии алгебры Ли касательных векторных полей гладкого многообразия // Функц. анализ и его прил. 1969. Т. 3, вып. 3. С. 32–52.

3. *Решетников В. Н.* О когомологиях двух алгебр Ли векторных полей на окружности // УМН. 1971. Т. 26, вып. 1(157). С. 231–232.