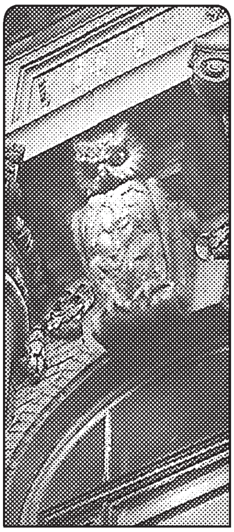
МАТЕМАТИКА



НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

УДК 517.51

ОБ L^1-СХОДИМОСТИ РЯДОВ ПО МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ СИСТЕМАМ

Н. Ю. Агафонова

Агафонова Нина Юрьевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций и стохастического анализа, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, AgafonovaNYu@gmail.com

В статье устанавливаются два аналога тригонометрических результатов Гаррета – Станоевича для мультипликативных систем $\{\chi_n\}_{n=0}^{\infty}$ ограниченного типа. Во-первых, модифицированные частные суммы ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\chi_k$ с коэффициентами ограниченной вариации сходятся в $L^1[0,1)$ к сумме ряда тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое что

$$\int_0^{\delta} \left| \sum_{k=n}^{\infty} (a_k - a_{k+1}) D_{k+1}(x) \right| dx < \varepsilon, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

где $D_{k+1}(x) = \sum\limits_{i=0}^{k} \chi_i(x)$. Во-вторых, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \ln(n+1) = 0$ и $\sum\limits_{k=n}^{\infty} |a_k - a_{k+1}| \leqslant C a_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\chi_n(x)$ сходится к своей сумме $f(x)$ в $L^1[0,1)$ тогда и только тогда, когда $f \in L^1[0,1)$.

Ключевые слова: мультипликативные системы, ряд Фурье – Виленкина, мультипликаторы, L^1-сходимость.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-371-377

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел, такая что $2 \leqslant p_n \leqslant N$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Положим по определению $m_0 = 1$, $m_n = p_1 \dots p_n$, при $n \in \mathbb{N}$. Каждое число $x \in [0,1)$ имеет разложение

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{m_n}, \qquad x_n \in \mathbb{Z} \cap [0, p_n). \tag{1}$$

Представление (1) единственно, если для $x = k/m_j$, $k, j \in \mathbb{N}$, $0 < k < m_j$, брать разложение с конечным числом $x_n \neq 0$. Если $k \in \mathbb{Z}_+$ записано в виде $k = \sum\limits_{j=1}^{\infty} k_j m_{j-1}$, $\quad k_j \in \mathbb{Z} \cap [0, p_j)$, а $x \in [0,1)$ имеет разложение (1), то по определению

$$\chi_k(x) = \exp\left(2\pi i \sum_{j=1}^{\infty} x_j k_j / p_j\right).$$

Система $\{\chi_k\}_{k=0}^{\infty}$ является ортонормированной и полной в $L^1[0,1)$ [1, § 1.5].

Далее мы изучаем L^1-интегрируемость рядов вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \chi_k(x). \tag{2}$$

Для ряда (2) пусть $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k \chi_k(x)$, $\sigma_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} S_k(x)/n$. Для $f \in L^1[0,1)$ определим коэффициенты Фурье, частные суммы ряда Фурье и средние Фейера равенствами

$$\hat{f}(n) = \int_0^1 f(t)\overline{\chi_n(t)}d\,t, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \qquad S_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k)\chi_k(x), \qquad \sigma_n(f)(x) = \sum_{k=1}^{n} S_k(f)(x)/n.$$

Важную роль далее будут играть ядра Дирихле и Фейера для системы $\{\chi_k\}_{k=0}^{\infty}$:

$$D_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \chi_k(x), \qquad F_n(x) = \sum_{k=1}^{n} D_k(x)/n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Для последовательности $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ пусть $\Delta a_k = \Delta^1 a_k = a_k - a_{k+1}$, $\Delta^2 a_k = a_k - 2a_{k+1} + a_{k+2}$. Как обычно $\|f\|_1 = \int\limits_0^1 |f(t)|dt$.

Хорошо известно, что из $f \in L^1[0,1)$ не следует, что $\|S_n(f) - f\|_1 \to 0$. Более того, К. Оневир (Onneweer) [2] установил существование такой функции в классе функций, L^1-модуль непрерывности которых есть $O((\ln 1/\delta)^{-1})$.

Поэтому большое внимание уделялось условиям L^1-сходимости рядов (2) в терминах коэффициентов $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$. Так, Ш. Яно (Yano) [3] установил следующий аналог результата А. Н. Колмогорова [4] для тригонометрических рядов.

Теорема A. *Пусть $p_i \equiv 2$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ и $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ квазивыпукла, т. е. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)|\Delta^2 a_n| < \infty$. Тогда ряд* (2) *сходится при $x \neq 0$ к функции $f \in L^1[0,1)$ и является ее рядом Фурье по системе $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$.*

Из теоремы A легко получить утверждение: в условиях теоремы A норма $\|S_n(x) - f\|_1$ стремится к нулю тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{k\to\infty} a_k \|D_k\|_1 = 0$.

Мы получим более общий критерий, аналогичный теореме Гаррета – Станоевича [5], из которого будет следовать утверждение выше и его обобщение для ограниченной последовательности $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$.

В [6] Дж. В. Гаррет (Garrett) и Ч. В. Станоевич (Stanojević) установили связь между поведением производной сопряженной суммы Фурье и сходимостью тригонометрического ряда Фурье в пространстве $L^1_{2\pi}$ интегрируемых по Лебегу на периоде 2π-периодических функций. Как следствие, ими была получена

Теорема B. *Пусть $a_n \log n = o(1)$, $b_n \log n = o(1)$, $\Delta a_n \geqslant 0$, $\Delta b_n \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда сумма $f(x)$ ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ принадлежит $L^1_{2\pi}$ в том и только том случае, когда $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ сходится к f в $L^1_{2\pi}$.*

Будем писать $\{a_k\}_{k=0}^{\infty} \in RBVS$, если $\sum\limits_{k=n}^{\infty} |\Delta a_n| \leqslant C a_n$ для всех $n \in \mathbb{Z}_+$. В работе получен аналог теоремы B и предшествующего ей результата для ряда (2), где $\{a_k\}_{k=0}^{\infty} \in RBVS$. Приведем необходимые нам вспомогательные результаты.

Лемма 1. *1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0,1)$. Тогда $|D_n(x)| \leqslant N x^{-1}$, где $2 \leqslant p_i \leqslant N$ для всех $i \in \mathbb{N}$.*
2. Справедливо неравенство $\|D_n\|_1 \leqslant C \ln(n+1)$, $n \in \mathbb{N}$.

Доказательства обоих утверждений леммы 1 можно найти в [7, гл. 4, § 3, 4].

Лемма 2. *Если* $\sum\limits_{k=0}^{\infty}|\Delta a_k| \leqslant \infty$ *и* $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$*, то ряд* (2) *сходится на* $(0,1)$ *и*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k\chi_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\Delta a_k D_{k+1}(x), \quad x \in (0,1). \tag{3}$$

Доказательство. С помощью преобразования Абеля получаем

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k\chi_k(x) = \sum_{k=0}^{n-2}(a_k - a_{k+1})D_{k+1}(x) + a_{n-1}D_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\Delta a_k D_{k+1}(x) + a_n D_n(x). \tag{4}$$

По лемме 1 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{k-1}D_k(x) = 0$ при $x \in (0,1)$, откуда следует формула (3) и сходимость ряда в левой части (4). □

Лемма 3. *1. Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0,1)$*. Тогда* $|nF_n(x)| \leqslant Cx^{-2}$*, где* C *не зависит от* n *и* x*.*
2. Справедливо неравенство $\|F_n\|_1 \leqslant C$*.*

Утверждение 1 леммы 3 установлена в [8], доказательство утверждения 2 можно найти в [7, гл. 4, § 10].

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим модифицированные частные суммы ряда (2)

$$S_n^*(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{j=k}^{n-1}\Delta a_j\right)\chi_k(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k\chi_k(x) - a_n D_n(x).$$

Если $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$ и $\sum\limits_{k=0}^{\infty}|\Delta a_k| < \infty$ (будем писать $\{a_k\}_{k=0}^{\infty} \in bV_0$), то $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\chi(k)$ существует при всех $x \in (0,1)$. Из леммы 1 следует, что в этом случае также $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^*(x) = f(x)$, $x \in (0,1)$.

Теорема 1. *Пусть* $\{a_k\}_{k=0}^{\infty} \in bV_0$ *и* $f(x)$ *— сумма ряда* (2)*. Тогда* $S_n^*(x) \to f(x)$ *в* $L^1[0,1)$ *в том и только том случае, когда* $\{a_k\}$ *удовлетворяет условию (А): для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется* $\delta > 0$*, такое что для всех* $n \in \mathbb{Z}_+$ *верно неравенство*

$$\int_0^{\delta}\left|\sum_{k=n}^{\infty}\Delta a_k D_{k+1}(x)\right| dx < \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ и $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ удовлетворяет условию (А). Тогда существует $\delta > 0$ со свойством

$$\int_0^{\delta}\left|\sum_{k=n}^{\infty}\Delta a_k D_{k+1}(x)\right| dx < \varepsilon/2, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

В силу леммы 2, (4) и леммы 1 имеем

$$\int_0^1 |f(x) - S_n^*(x)|dx = \int_0^1\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta a_k D_{k+1}(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\Delta a_k D_{k+1}(x) + a_n D_n(x) - a_n D_n(x)\right| dx =$$

$$= \int_0^1\left|\sum_{k=n}^{\infty}\Delta a_k D_{k+1}(x)\right| dx = \left(\int_0^{\delta} + \int_{\delta}^1\right)\left|\sum_{k=n}^{\infty}\Delta a_k D_{k+1}(x)\right| dx <$$

$$< \varepsilon/2 + \sum_{k=n}^{\infty}|\Delta a_k|\int_{\delta}^1 Nx^{-1}dx \leqslant \varepsilon/2 + N\ln 1/\delta\sum_{k=n}^{\infty}\Delta a_k < \varepsilon \tag{5}$$

при достаточно больших n.

Обратно, пусть $\lim\limits_{n\to\infty}\|S_n^*-f\|_1=0$ и $\varepsilon>0$. Найдем $M\in\mathbb{N}$, такое что $\int_0^1|f(x)-S_n^*(x)|dx<\varepsilon/2$ при $n\geqslant M$. В силу (5) получаем

$$\int\limits_0^1\left|\sum_{k=n}^{\infty}\Delta a_kD_{k+1}(x)\right|dx<\varepsilon/2,\qquad n\geqslant M. \tag{6}$$

Если $\Delta a_k=0$ при $0\leqslant k\leqslant M$, то (6) верно при всех $n\in\mathbb{N}$. Если же $\sum\limits_{k=0}^{M}|\Delta a_k|\neq 0$, то пусть $\delta=\varepsilon\left(2M\sum\limits_{k=0}^{M}|\Delta a_k|\right)^{-1}$. При $n\geqslant M$ в силу (6) имеем

$$\int\limits_0^\delta\left|\sum_{k=n}^{\infty}\Delta a_kD_{k+1}(x)\right|dx\leqslant\int\limits_0^1\left|\sum_{k=n}^{\infty}\Delta a_kD_{k+1}(x)\right|dx<\varepsilon/2<\varepsilon.$$

При $0\leqslant n<M$ находим, что

$$\int\limits_0^\delta\left|\sum_{k=n}^{\infty}\Delta a_kD_{k+1}(x)\right|dx\leqslant\int\limits_0^\delta\left|\sum_{k=n}^{M-1}\Delta a_kD_{k+1}(x)\right|dx+\int\limits_0^\delta\left|\sum_{k=M}^{\infty}\Delta a_kD_{k+1}(x)\right|dx\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_0^\delta\sum_{k=0}^{M-1}(k+1)|\Delta a_k|dx+\int\limits_0^1\left|\sum_{k=M}^{\infty}\Delta a_kD_{k+1}(x)\right|dx\leqslant\delta M\sum_{k=0}^{M-1}|\Delta a_k|+\varepsilon/2<\varepsilon.\qquad\square$$

Следствие 1. *Пусть* $\{a_k\}_{k=0}^\infty\in bV_0$ *удовлетворяет условию (А) и* $f(x)$ *— сумма ряда* (2). *Тогда соотношения* $\lim\limits_{n\to\infty}\|S_n-f\|_1=0$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\|D_n\|_1=0$ *равносильны.*

Доказательство. Так как $S_n(x)=S_n^*(x)+a_nD_n(x)$ и по теореме 1 имеем $\lim\limits_{n\to\infty}\|S_n^*-f\|_1=0$, то из неравенств

$$|a_n|\cdot\|D_n\|_1=\|S_n(x)-S_n^*\|_1\leqslant\|f-S_n\|_1+\|f-S_n^*\|_1,$$
$$\|S_n-f\|_1\leqslant\|S_n^*-f\|_1+|a_n|\cdot\|D_n\|_1$$

вытекает справедливость следствия. $\square$

Следствие 2. *Пусть* $\{a_k\}_{k=0}^\infty\in bV_0$ *удовлетворяет условиям теоремы А. Тогда* $S_n^*(x)\to f(x)$ *в* $L^1[0,1)$ *в том и только том случае, когда* $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\|D_n\|_1=0$.

Доказательство. Сходимость ряда (2) и интегрируемость его суммы f установлены в [9] вместе с равенством $f(x)-S_n(x)=\sum\limits_{i=n}^{\infty}\Delta^2a_i(i+1)F_{i+1}(x)-n\Delta a_nF_n(x)-a_nD_n(x)$. Пусть $\|F_n\|_1\leqslant C_1$ (см. лемму 3). Так как $n|\Delta a_n|\leqslant(n+1)\left|\sum\limits_{k=n}^{\infty}\Delta^2a_k\right|\leqslant\sum\limits_{k=n}^{\infty}(k+1)\left|\Delta^2a_k\right|$, $n\in\mathbb{N}$, то $\lim\limits_{n\to\infty}n|\Delta a_n|=0$. Пусть при $n\geqslant n_0$ верны неравенства $\sum\limits_{k=n}^{\infty}(k+1)\left|\Delta^2a_k\right|<\varepsilon/4C_1$ и $|n\Delta a_n|<\varepsilon/4C_1$. Тогда для любых $\delta\in[0,1)$ и $n\geqslant n_0$ справедливы неравенства

$$\int\limits_0^\delta\left|\sum_{k=n}^{\infty}\Delta a_kD_{k+1}(x)\right|dx\leqslant\int\limits_0^1\left|\sum_{k=n}^{\infty}(k+1)\Delta^2a_kF_{k+1}(x)-na_nF_n(x)\right|dx\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=n_0}^{\infty}|\Delta^2(k+1)a_k|\cdot\|F_{k+1}\|_1+|n\Delta a_n|\cdot\|F_n\|_1\leqslant\varepsilon/2. \tag{7}$$

При $n<n_0$ аналогично (7) получаем

$$\int\limits_0^\delta\left|\sum_{k=n}^{\infty}\Delta a_kD_{k+1}(x)\right|dx\leqslant\int\limits_0^\delta\left(\sum_{k=n}^{\infty}(k+1)|\Delta^2a_k|\cdot|F_{k+1}(x)|+n|\Delta a_n|\cdot|F_n(x)|\right)dx\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_0^\delta\left(\sum_{k=n}^{n_0-1}(k+1)|\Delta^2a_k|\cdot|F_{k+1}(x)|+n|\Delta a_n|\cdot|F_n(x)|\right)dx+\varepsilon/2=I_1+\varepsilon/2. \tag{8}$$

Но по определению $|F_k(x)| \leqslant (1+2+\dots+k)/k = (k+1)/2 \leqslant (n_0+1)/2$ при $k \leqslant n_0$. Поэтому при $\delta < \varepsilon/(2M(n_0+1)$, где $M = \max\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty}(k+1)|\Delta^2 a_k|,\ \sup\limits_n |n\Delta a_n|\right)$, имеем

$$I_1 \leqslant \delta M(n_0+1)/2 + \delta M(n_0+1)/2 < \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = \varepsilon/2$$

и левая часть (8) меньше ε. Таким образом, выполнено условие (A) из теоремы 1, и следствие 2 вытекает из следствия 1. □

Для $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k\chi_k(x)$ пусть $S_n^{[1]}(x) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} ka_k\chi_k(x)$ —обобщенная производная первого порядка. Подробнее об этом понятии см. [10].

Теорема 2. *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \ln(n+1) = 0$ *и* $\{a_k\}_{k=0}^{\infty} \in RBVS$. *Тогда* $\|S_n^{[1]}\|_1 = o(n)$, *при* $n \to \infty$.

Доказательство. По определению и лемме 1 имеем

$$\|S_{n+1}^{[1]}\|_1 = \left\|\sum_{k=1}^{n} ka_k\chi_k\right\|_1 = \left\|\sum_{k=1}^{n-1} ka_k(D_{k+1} - D_1 - (D_k - D_1))\right\|_1 =$$

$$= \left\|\sum_{k=1}^{n-1}(k\Delta a_k - a_{k+1})(D_{k+1} - D_1) + na_n(D_{n+1} - D_1)\right\|_1 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n-1} k|\Delta a_k| \cdot \|D_{k+1} - D_1\|_1 + \sum_{k=1}^{n-1} |a_{k+1}| \cdot \|D_{k+1} - D_1\|_1 + na_n\|D_{n+1} - D_1\|_1 \leqslant$$

$$\leqslant C_1\left(\sum_{k=1}^{n-1} k|\Delta a_k|\ln(k+1) + \sum_{k=1}^{n-1}|a_{k+1}|\ln(n+1) + na_n\ln(n+1)\right) =: C_1(I_1 + I_2 + I_3).$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\ln(n+1) = 0$, то $I_3 = o(n)$, $n \to \infty$, а в силу регулярности метода Чезаро верно, что $I_2 = o(n)$. Чтобы оценить I_1 рассмотрим $P_k = \sum\limits_{i=k}^{\infty}|\Delta a_i|$, которые не превосходят $C_2 a_k$ согласно условию. Сначала запишем

$$I_1 = \sum_{k=1}^{n-1} k|\Delta a_k|\ln k + \sum_{k=1}^{n-1} k|\Delta a_k|\ln(1+1/k) = I_{11} + I_{12}.$$

Так как $\ln(1+1/k) < 1/k$, то $I_{12} \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty}|\Delta a_k| \leqslant C_2 a_1$ и

$$0 \leqslant I_{11} = \sum_{k=1}^{n-1} k\ln k(P_k - P_{k+1}) = \sum_{k=2}^{n-1} P_k(k\ln k - (k-1)\ln(k-1)) - P_n(n-1)\ln(n-1).$$

Так как $(x\ln x)' = \ln x - 1$, то при $k \geqslant 4$ по теореме Лагранжа $(k\ln k - (k-1)\ln(k-1)) \leqslant \ln k$, а при $k = 2, 3$ верно $(k\ln k - (k-1)\ln(k-1)) \leqslant C_3 \ln k$, где $C_3 > 1$. Поэтому $I_{11} \leqslant \sum\limits_{k=2}^{n-1} C_3C_2 a_k \ln k$. Правая часть последнего неравенства есть $o(n)$ также в силу регулярности $(C, 1)$ метода Чезаро. Объединяя полученные оценки, получаем $\|S_n^{[1]}\|_1 = o(n)$. □

Следствие 3. *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\ln(n+1) = 0$ *и* $\{a_k\}_{k=0}^{\infty} \in RBVS$, $f(x)$ *— сумма ряда* (2). *Для сходимости* $S_n(x)$ *к* $f(x)$ *в* $L^1[0,1)$ *необходимо и достаточно, чтобы* $f(x) \in L^1[0,1)$.

Доказательство. *Необходимость* условия $f(x) \in L^1[0,1)$ для равенства $\lim\limits_{n\to\infty}\|f - S_n\|_1 = 0$ очевидна.

Достаточность. Пусть $f(x) \in L^1[0,1)$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\|f - \sigma_n\|_1 = 0$ (см. [7, гл. 4, § 10]). В то же время по теореме 2

$$\|\sigma_n(f) - S_n(f)\|_1 = n^{-1}\left\|\sum_{k=1}^{n-1} ka_k\chi_k\right\|_1 = o(1).$$

Поэтому $\|f - S_n\|_1 \leqslant \|f - \sigma_n\|_1 + \|\sigma_n - S_n\|_1$, где правая и, как следствие, левая части последнего неравенства стремятся к нулю. □

Следствие 3 является аналогом и обобщением теоремы B.

Библиографический список

1. *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша : Теория и применения. М. : Наука, 1987. 344 с.
2. *Onneweer C. W.* On Moduli of Continuity and Divergence of Fourier Series on Groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1971. Vol. 29, № 1. P. 109–112. DOI: 10.2307/2037681.
3. *Yano Sh.* On Walsh – Fourier series // Tohoku Math. J. 1951. Vol. 3, № 2. P. 223–242. DOI: 10.2748/tmj/1178245527.
4. *Kolmogoroff A.* Sur l'ordre de grandeur des coefficient de la serie de Fourier – Lebesgue // Bull. Acad. Polon. 1923. Iss. A. P. 83–86.
5. *Garrett J. W., Stanojević Č. V.* On L^1 convergence of certain cosine sums // Proc. Amer. Math. Soc. 1976. Vol. 54, № 1. P. 101–105. DOI: 10.1090/S0002-9939-1976-0394002-8.
6. *Garrett J. W., Stanojevi'c Č. V.* Necessary and sufficient conditions for L^1 convergence of trigonometric series // Proc. Amer. Math. Soc. 1976. Vol. 60, № 1. P. 68–71. DOI: 10.1090/S0002-9939-1976-0425 480-3.
7. *Агаев Г. Н., Виленкин Н. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И.* Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нульмерных группах. Баку : ЭЛМ, 1981. 180 с.
8. *Iofina T. V., Volosivets S. S.* On the degree of approximation by means of Fourier – Vilenkin series in Holder and L_p norm // East J. Approx. 2009. Vol. 15, № 3. P. 143–158.
9. *Volosivets S. S., Fadeev R. N.* Estimates of best approximations in integral metrics and Fourier coefficients with respect to multiplicative systems // Analysis Mathematica. 2011. Vol. 37, № 3. P. 215–238. DOI: 10.1007/s10476-011-0304-8.
10. *Zelin H.* The derivatives and integrals of fractional order in Walsh-Fourier analysis, with applications to approximation theory // J. of Approx. Theory. 1983. Vol. 39, iss. 4. P. 361–373. DOI: 10.1016/0021-9045(83)90079-5.

Образец для цитирования:

Агафонова Н. Ю. Об L^1-сходимости рядов по мультипликативным системам // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 4. С. 371–377. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-371-377.

On the L^1-convergence of Series in Multiplicative Systems

N. Yu. Agafonova

Nina Yu. Agafonova, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., 410012, Saratov, Russia, AgafonovaNYu@gmail.com

In the paper two analogs of Garrett – Stanojević trigonometric results are established for multiplicative systems $\{\chi_n\}_{n=0}^{\infty}$ of bounded type. First, the modified partial sums of a series $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\chi_k$ with coefficients of bounded variation converge in $L^1[0,1)$ to its sum if and only if for all $\varepsilon > 0$ there exists $\delta > 0$ such that $\int_0^\delta \left|\sum\limits_{k=n}^{\infty}(a_k - a_{k+1})D_{k+1}(x)\right| dx < \varepsilon, \quad n \in \mathbb{Z}_+$, where $D_{k+1}(x) = \sum\limits_{i=0}^{k}\chi_i(x)$. Secondly, if $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \ln(n+1) = 0$ and $\sum\limits_{k=n}^{\infty}|a_k - a_{k+1}| \leqslant Ca_n, n \in \mathbb{Z}_+$, then the series $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\chi_n(x)$ converges to its sum $f(x)$ in $L^1[0,1)$ if and only if $f \in L^1[0,1)$.

Key words: multiplicative systems, Fourier – Vilenkin series, multipliers, L^1-convergence.

References

1. Golubov B. I., Efimov A. V., Skvortsov V. A. *Walsh series and transforms. Theory and applications*. Dordrecht, Kluwer Academic Publ., 1991. 380 p.
2. Onneweer C. W. On Moduli of Continuity and Divergence of Fourier Series on Groups. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1971, vol. 29, no. 1, pp. 109–112. DOI: 10.2307/2037681.
3. Yano Sh. On Walsh – Fourier series. *Tohoku Math. J.*, 1951, vol. 3, no. 2, pp. 223–242. DOI: 10.2748/tmj/1178245527.
4. Kolmogoroff A. Sur l'ordre de grandeur des coefficient de la serie de Fourier – Lebesgue. *Bull. Acad. Polon.*, 1923, iss. A, pp. 83–86.
5. Garrett J. W., Stanojević Č. V. On L^1 conver-

gence of certain cosine sums. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1976, vol. 54, no. 1, pp. 101–105. DOI: 10.1090/S0002-9939-1976-0394002-8.

6. Garrett J. W., Stanojević Č. V. Necessary and sufficient conditions for L^1 convergence of trigonometric series. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1976, vol. 60, no. 1, pp. 68–71. DOI: 10.1090/S0002-9939-1976-0425480-3.
7. Agaev G. N., Vilenkin N. Ya., Dzafarli G. M., Rubinstein A. I. *Mul'tiplikativnye sistemy funkcij i garmonicheskij analiz na nul'mernyh gruppah* [Multiplicative Systems of Functions and Harmonic Analysis on Zero-dimensional Groups]. Baku, ELM, 1981. 180 p. (in Russian).
8. Iofina T. V., Volosivets S. S. On the degree of approximation by means of Fourier – Vilenkin series in Holder and L_p norm. *East J. Approx.*, 2009, vol. 15, no. 3, pp. 143–158.
9. Volosivets S. S., Fadeev R. N. Estimates of best approximations in integral metrics and Fourier coefficients with respect to multiplicative systems. *Analysis Mathematica*, 2011, vol. 37, no. 3, pp. 215–238. DOI: 10.1007/s10476-011-0304-8.
10. Zelin H. The derivatives and integrals of fractional order in Walsh – Fourier analysis, with applications to approximation theory. *J. of Approx. Theory*, 1983, vol. 39, iss. 4, pp. 361–373. DOI: 10.1016/0021-9045(83)90079-5.

Please cite this article in press as:

Agafonova N. Yu. On the L^1-convergence of Series in Multiplicative Systems. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 4, pp. 371–377 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-371-377.

УДК 517.986.62

ГРАФЫ С КОНТУРАМИ В КРАТНОМАСШТАБНОМ АНАЛИЗЕ НА ГРУППАХ ВИЛЕНКИНА

Г. С. Бердников

Бердников Глеб Сергеевич, ассистент кафедры математического анализа, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, evrointelligent@gmail.com

В данной статье исследуется вопрос построения ортогонального кратномасштабного анализа на группах Виленкина. В предыдущих работах С. Ф. Лукомского, Ю. С. Крусс и автора обсуждается алгоритм построения масштабирующей функции φ с компактным носителем, преобразование Фурье которой также имеет компактный носитель. Реализация данного алгоритма тесно связана с определенного типа ориентированными графами, строящимися по так называемым N-валидным деревьям. Особенностью этих графов является отсутствие ориентированных циклов — контуров, что позволяет строить функции с ограниченным носителем преобразования Фурье. Такой подход обладает рядом преимуществ. Во-первых, он не является переборным, в отличие от алгоритма, связанного с использованием блокированных множеств, описанного в работах Ю. А. Фаркова. Во-вторых, он удобен для обобщения на локальные поля положительной характеристики, что было проделано Ю. С. Крусс. Данная работа является первым шагом в использовании графов с контурами для аналогичных целей. Развивая идеи из предыдущих работ, по 1-валидному дереву мы строим граф с единственным простым контуром. Удается доказать, что такой граф также порождает ортогональную масштабирующую функцию. Однако из-за появления контура преобразование Фурье масштабирующей функции уже не будет иметь компактный носитель.

Ключевые слова: кратномасштабный анализ, группа Виленкина, графы, масштабирующая функция, вейвлет-анализ.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-377-388

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $(G, \dot{+})$ — локально компактная группа Виленкина, элементами которой являются бесконечные в обе стороны последовательности

$$x = (\ldots, 0_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \ldots), \qquad x_j = \overline{0, p-1},$$

где p — любое простое число; $g_n = (\ldots, 0_{n-1}, 1_n, 0_{n+1}, \ldots)$ — базисные элементы в G. Операция сложения $\dot{+}$ определяется как покоординатное сложение по модулю p, т. е. $x \dot{+} y = (x_j \dot{+} y_j) = (x_j + y_j \bmod p)$.

Пусть $G_n = \{x \in G : \ x = (\ldots, 0_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \ldots)\}$, $n \in \mathbb{Z}$, — основная цепочка подгрупп, $G_n^{\perp}$ — совокупность аннуляторов, X — группа всех характеров, $r_n \in G_{n+1}^{\perp} \setminus G_n^{\perp}$ — функции Радемахера на