



- gence of certain cosine sums. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1976, vol. 54, no. 1, pp. 101–105. DOI: 10.1090/S0002-9939-1976-0394002-8.
6. Garrett J. W., Stanojević Č. V. Necessary and sufficient conditions for  $L^1$  convergence of trigonometric series. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1976, vol. 60, no. 1, pp. 68–71. DOI: 10.1090/S0002-9939-1976-0425480-3.
  7. Agaev G. N., Vilenkin N. Ya., Dzafarli G. M., Rubinstein A. I. *Mul'tiplikativnye sistemy funktsij i garmonicheskij analiz na nul'mernyh gruppah* [Multiplicative Systems of Functions and Harmonic Analysis on Zero-dimensional Groups]. Baku, ELM, 1981. 180 p. (in Russian).
  8. Iofina T. V., Volosivets S. S. On the degree of approximation by means of Fourier – Vilenkin series in Holder and  $L_p$  norm. *East J. Approx.*, 2009, vol. 15, no. 3, pp. 143–158.
  9. Volosivets S. S., Fadeev R. N. Estimates of best approximations in integral metrics and Fourier coefficients with respect to multiplicative systems. *Analysis Mathematica*, 2011, vol. 37, no. 3, pp. 215–238. DOI: 10.1007/s10476-011-0304-8.
  10. Zelin H. The derivatives and integrals of fractional order in Walsh – Fourier analysis, with applications to approximation theory. *J. of Approx. Theory*, 1983, vol. 39, iss. 4, pp. 361–373. DOI: 10.1016/0021-9045(83)90079-5.

**Please cite this article in press as:**

Agafonova N. Yu. On the  $L^1$ -convergence of Series in Multiplicative Systems. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 4, pp. 371–377 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-371-377.

УДК 517.986.62

## ГРАФЫ С КОНТУРАМИ В КРАТНОМАСШТАБНОМ АНАЛИЗЕ НА ГРУППАХ ВИЛЕНКИНА

Г. С. Бердников

Бердников Глеб Сергеевич, ассистент кафедры математического анализа, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, evrointelligent@gmail.com

В данной статье исследуется вопрос построения ортогонального кратномасштабного анализа на группах Виленкина. В предыдущих работах С. Ф. Лукомского, Ю. С. Крусс и автора обсуждается алгоритм построения масштабирующей функции  $\varphi$  с компактным носителем, преобразование Фурье которой также имеет компактный носитель. Реализация данного алгоритма тесно связана с определенного типа ориентированными графами, строящимися по так называемым  $N$ -валидным деревьям. Особенностью этих графов является отсутствие ориентированных циклов — контуров, что позволяет строить функции с ограниченным носителем преобразования Фурье. Такой подход обладает рядом преимуществ. Во-первых, он не является переборным, в отличие от алгоритма, связанного с использованием заблокированных множеств, описанного в работах Ю. А. Фаркова. Во-вторых, он удобен для обобщения на локальные поля положительной характеристики, что было сделано Ю. С. Крусс. Данная работа является первым шагом в использовании графов с контурами для аналогичных целей. Развивая идеи из предыдущих работ, по 1-валидному дереву мы строим граф с единственным простым контуром. Удастся доказать, что такой граф также порождает ортогональную масштабирующую функцию. Однако из-за появления контура преобразование Фурье масштабирующей функции уже не будет иметь компактный носитель.

*Ключевые слова:* кратномасштабный анализ, группа Виленкина, графы, масштабирующая функция, вейвлет-анализ.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-377-388

### ВВЕДЕНИЕ

Пусть  $(G, \dot{+})$  — локально компактная группа Виленкина, элементами которой являются бесконечные в обе стороны последовательности

$$x = (\dots, 0_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \dots), \quad x_j = \overline{0, p-1},$$

где  $p$  — любое простое число;  $g_n = (\dots, 0_{n-1}, 1_n, 0_{n+1}, \dots)$  — базисные элементы в  $G$ . Операция сложения  $\dot{+}$  определяется как покомпонентное сложение по модулю  $p$ , т.е.  $x \dot{+} y = (x_j \dot{+} y_j) = (x_j + y_j \bmod p)$ .

Пусть  $G_n = \{x \in G : x = (\dots, 0_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \dots)\}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , — основная цепочка подгрупп,  $G_n^\perp$  — совокупность аннуляторов,  $X$  — группа всех характеров,  $r_n \in G_{n+1}^\perp \setminus G_n^\perp$  — функции Радемахера на



группе  $G$ . Оператор растяжения  $\mathcal{A}$  в группе  $G$  определяется равенством  $\mathcal{A}x := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g_{n-1}$ , где  $x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g_n \in G$ , в группе характеров — равенством  $(\chi \mathcal{A}, x) = (\chi, \mathcal{A}x)$ . Определим множества

$$H_0^{(s)} = \{h \in G : h = a_{-1}g_{-1} + a_{-2}g_{-2} + \dots + a_{-s}g_{-s}\}, \quad s \in \mathbb{N},$$

$$H_0 = \{x \in G : x = a_{-1}g_{-1} + a_{-2}g_{-2} + \dots + a_{-s}g_{-s}, s \in \mathbb{N}\}.$$

Множество  $H_0$  есть множество сдвигов в  $G$ . Оно есть аналог множества целых неотрицательных чисел.

В. Протасов, Ю. Фарков в работах [1–3] охарактеризовали все двоичные финитные всплески на  $\mathbb{R}_+$  и указали алгоритм их построения. Ю. Фарков в работах [4, 5], рассматривая масштабирующие функции  $\varphi(x)$  с компактным носителем  $G_{-N}$ , получил необходимые и достаточные условия на маску  $m_0(\chi)$ , которая порождает ортогональный кратномасштабный анализ (КМА). Эти условия были даны при дополнительном предположении

$$\sum_{\alpha_0=0}^{p-1} |m_0(G_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha_0} r_{-N+1}^{\alpha_0} \dots r_{-1}^{\alpha_0} r_0^{\alpha_0})|^2 = 1,$$

которое является необходимым для ортогональности системы сдвигов соответствующей масштабирующей функции  $\varphi$ . Ю. Фарков доказал, что в этом случае масштабирующая функция  $\varphi$  порождает ортогональный КМА тогда и только тогда, когда маска  $m_0$  не имеет блокированных множеств. Задача нахождения блокированных множеств является переборной и требует перебора примерно  $2^p$  различных вариантов, что реально только при достаточно малых  $p$  и  $N$ .

Поэтому возникла необходимость найти алгоритм построения ортогональной масштабирующей функции, не требующий перебора, что дало начало новому подходу, связанному с использованием различного типа графов. В работах [6, 7] был найден непереборный алгоритм для нахождения  $\varphi$ , но этот метод работает только в случае, когда функция  $|\hat{\varphi}(\chi)|$  постоянна на смежных классах по подгруппе  $G_{-1}^\perp$  и принимает только два значения: 0 или 1. Впервые деревья появились в работах [8, 9] и были использованы для построения КМА Рисса. В [10] удалось избавиться от условия  $\text{supp } \varphi(x) \subset G_{-1}$ , для этого было введено понятие  $N$ -валидного дерева и было доказано, что ступенчатая функция  $\varphi(x)$  с носителем  $\text{supp } \varphi(x) \subset G_{-1}$  и условием  $|\hat{\varphi}(\chi)| = 0$  или 1 порождает ортогональный КМА тогда и только тогда, когда  $\varphi(x)$  порождена  $N$ -валидным деревом.

В работе [11] удалось избавиться от условия  $|\hat{\varphi}(\chi)| = 0$  или 1 и указан алгоритм построения ортогональной масштабирующей функции с единственным ограничением:  $\hat{\varphi}(\chi)$  — ступенчатая функция. Полученный алгоритм не требует перебора.

Задача построения такой функции сводится к построению некоторого графа, который, в свою очередь, строится по произвольному  $N$ -валидному дереву. Результатом является ортогональная масштабирующая функция с компактным носителем, преобразование Фурье которой также имеет компактный носитель, или, можно сказать, что функция имеет компактный носитель и ограниченную частотную полосу.

В данной работе идеи из работы [11] будут развиты с целью нахождения некоторых ортогональных масштабирующих функций с компактным носителем и неограниченной частотной полосой.

Построение работы следующее. В параграфе 1 описаны основные понятия, связанные с масштабирующей функцией, у которой преобразование Фурье имеет ограниченный носитель. В параграфе 2 описан алгоритм построения таких масштабирующих функций. Параграф 3 содержит новые результаты, касающиеся построения масштабирующей функции с неограниченной частотной полосой.

## 1. МАСШТАБИРУЮЩАЯ ФУНКЦИЯ С ОГРАНИЧЕННОЙ ЧАСТОТНОЙ ПОЛОСОЙ

Сначала обсудим случай, когда масштабирующая функция  $\varphi$ , порождающая ортогональный КМА, является ступенчатой. Множество ступенчатых функций, постоянных на смежных классах по подгруппе  $G_M$  с носителем  $\text{supp}(\varphi) \subset G_{-N}$ , обозначим через  $\mathfrak{D}_M(G_{-N})$ ,  $M, N \in \mathbb{N}$ . Аналогично  $\mathfrak{D}_{-N}(G_M^\perp)$  есть множество ступенчатых функций, постоянных на смежных классах по подгруппе  $G_{-N}^\perp$  с носителем  $\text{supp}(\varphi) \subset G_M^\perp$ . Если функция  $\varphi \in \mathfrak{D}_M(G_{-N})$  порождает ортогональный КМА, то она



удовлетворяет масштабирующему уравнению  $\varphi(x) = \sum_{h \in H_0^{(N+1)}} \beta_h \varphi(\mathcal{A}x \dot{-} h)$ , которое можно записать в частотном виде (см. [7]):

$$\hat{\varphi}(\chi) = m_0(\chi) \hat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-1}), \quad (1)$$

где

$$m_0(\chi) = \frac{1}{p} \sum_{h \in H_0^{(N+1)}} \beta_h \overline{\chi \mathcal{A}^{-1}, h} \quad (2)$$

— маска уравнения (1). В [7] были доказаны следующие утверждения.

1. Если  $\hat{\varphi}(\chi) \in \mathfrak{D}_{-N}(G_M^\perp)$  есть решение масштабирующего уравнения (1) и система сдвигов  $(\varphi(x \dot{-} h))_{h \in H_0}$  есть ортонормированная система, то  $\varphi$  порождает ортогональный КМА.

2. Если  $\hat{\varphi}(\chi) \in \mathfrak{D}_{-N}(G_M^\perp)$ , то система сдвигов  $(\varphi(x \dot{-} h))_{h \in H_0}$  будет ортонормированной системой тогда и только тогда, когда для любых  $\alpha_{-N}, \alpha_{-N+1}, \dots, \alpha_{-1} = \overline{0, p-1}$

$$\sum_{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{M-1}=0}^{p-1} |\hat{\varphi}(G_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha_{-N}} \dots r_0^{\alpha_0} \dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}})|^2 = 1. \quad (3)$$

Таким образом, для построения ортогонального КМА нужно построить функцию  $\hat{\varphi}(\chi) \in \mathfrak{D}_{-N}(G_M^\perp)$ , которая является решением масштабирующего уравнения (1) и для которой выполнены условия (3).

## 2. ПОСТРОЕНИЕ ОРТОГОНАЛЬНОЙ МАСШТАБИРУЮЩЕЙ ФУНКЦИИ С ОГРАНИЧЕННОЙ ЧАСТОТНОЙ ПОЛОСОЙ

**Определение 1.** Пусть  $N$  — натуральное число,  $p$  — простое. Под  $N$ -валидным деревом мы будем понимать дерево, ориентированное от листа к корню и удовлетворяющее следующим условиям:

1) корень и все вершины вплоть до  $(N-1)$ -го уровня имеют значение, равное нулю;

2) любой путь  $(\alpha_k \rightarrow \alpha_{k+1} \rightarrow \dots \rightarrow \alpha_{k+N-1})$  длины  $N-1$  присутствует в дереве ровно один раз.

Здесь  $\alpha_i = \overline{0, p-1}$ .

Выберем  $N$ -валидное дерево  $T$  и будем строить по нему масштабирующую функцию.

### Алгоритм 1.

1. По дереву  $T$  строим новое дерево  $\tilde{T}$  следующим образом. Заменяем последовательность из  $N$  нулей, заканчивающуюся корнем дерева на одну вершину со значением  $(0_N, 0_{N-1}, \dots, 0_1)$ . Все вершины  $(N+1)$ -го уровня дерева  $T$  теперь связаны с этой вершиной в дереве  $\tilde{T}$ . Она является корнем дерева  $\tilde{T}$ . Без изменения связей переобозначаем остальные вершины. Если в дереве  $T$  с вершины  $\alpha_N$  начинался путь из  $N$  элементов в направлении к корню  $\alpha_N \rightarrow \alpha_{N-1} \rightarrow \dots \rightarrow \alpha_1$ , то в новом дереве  $\tilde{T}$  данная вершина будет иметь значение, равное  $N$ -мерному вектору  $(\alpha_N, \alpha_{N-1}, \dots, \alpha_1)$ . В силу условия  $N$ -валидности дерева  $T$  каждому такому вектору в дереве  $\tilde{T}$  соответствует единственная вершина. Так, если мы обозначим  $height(T) = H$ ,  $height(\tilde{T}) = \tilde{H}$ , то, очевидно,  $\tilde{H} = H - N + 1$ .

Такое дерево будем называть  $N$ -валидным деревом в развернутой форме записи.

2. Теперь по дереву  $\tilde{T}$  строим граф  $\Gamma$ . Каждую вершину  $\bar{\alpha}_N = (\alpha_N, \alpha_{N-1}, \dots, \alpha_1)$  дерева  $\tilde{T}$  свяжем со всеми вершинами нижнего уровня, имеющими вид  $(\alpha_{N-1}, \dots, \alpha_1, \alpha_0)$ , т. е. первые  $(N-1)$  элементов этой вершины совпадают с последними  $(N-1)$  элементами вершины  $\bar{\alpha}_N$ . Вершины, с которыми вершина  $\bar{\alpha}_N$  связана, мы будем обозначать  $(\alpha_{N-1}, \dots, \alpha_1, \tilde{\alpha}_0)$ , т. е.  $\alpha_0 \in \{\tilde{\alpha}_0\}$  тогда и только тогда, когда вершина  $\bar{\alpha}_N$  связана с вершиной  $(\alpha_{N-1}, \dots, \alpha_1, \alpha_0)$  в графе  $\Gamma$ .

3. Обозначим

$$\lambda_{\alpha_{-N}, \alpha_{-N+1}, \dots, \alpha_{-1}, \alpha_0} = |m_0(G_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha_{-N}} r_{-N+1}^{\alpha_{-N+1}} \dots r_{-1}^{\alpha_{-1}} r_0^{\alpha_0})|^2.$$

Если вершина  $(\alpha_{-N}, \alpha_{-N+1}, \dots, \alpha_{-1})$  в графе  $\Gamma$  связана с вершинами  $(\alpha_{-N+1}, \alpha_{-N+2}, \dots, \alpha_{-1}, \tilde{\alpha}_0)$ , то значения маски определяем так, чтобы

$$\sum_{\tilde{\alpha}_0} \lambda_{\alpha_{-N}, \alpha_{-N+1}, \dots, \alpha_{-1}, \tilde{\alpha}_0} = 1, \quad \lambda_{\alpha_{-N}, \alpha_{-N+1}, \dots, \alpha_{-1}, \alpha_0} = 0, \quad \alpha_0 \notin \{\tilde{\alpha}_0\}. \quad (4)$$

Определим  $m_0(G_{-N}^\perp) = 1$ , откуда следует, что  $\lambda_{0,0,\dots,0} = 1$ .

4. Пользуясь равенством (1), по маске можно восстановить преобразование Фурье масштабирующей функции  $\hat{\varphi}$ . Затем при помощи обратного преобразования Фурье можно получить саму функцию  $\varphi$ .



В работе [11] был использован следующий подход. Можно заметить, что условие (3) ортонормированности системы сдвигов масштабирующей функции  $\varphi(x)$  можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \forall \alpha_{-N}, \alpha_{-N+1}, \dots, \alpha_{-1} = \overline{0, p-1}, \\ 1 &= \sum_{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{M-1}=0}^{p-1} |\hat{\varphi}(G_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha_{-N}} \dots r_{-1}^{\alpha_{-1}} r_0^{\alpha_0} \dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}})|^2 = \\ &= \sum_{\alpha_0=0}^{p-1} \lambda_{\alpha_{-N}, \alpha_{-N+1}, \dots, \alpha_0} \sum_{\alpha_1=0}^{p-1} \lambda_{\alpha_{-N+1}, \alpha_{-N+2}, \dots, \alpha_1} \dots \sum_{\alpha_{M-2}=0}^{p-1} \lambda_{\alpha_{M-N-2}, \alpha_{M-N-1}, \dots, \alpha_{M-2}}, \\ & \sum_{\alpha_{M-1}=0}^{p-1} \lambda_{\alpha_{M-N-1}, \alpha_{M-N}, \dots, \alpha_{M-1}} \lambda_{\alpha_{M-N}, \alpha_{M-N+1}, \dots, \alpha_{M-1}, 0} \lambda_{\alpha_{M-N+1}, \alpha_{M-N+2}, \dots, \alpha_{M-1}, 0, 0} \dots \lambda_{\alpha_{M-1}, 0, \dots, 0}. \end{aligned} \quad (5)$$

Задаётся последовательность  $N$ -мерных массивов  $A^{(n)} = (a_{i_1, i_2, \dots, i_N}^{(n)})_{i_1, i_2, \dots, i_N=0}^{p-1}$  рекуррентно через их элементы:

$$a_{i_1, i_2, \dots, i_N}^{(0)} = \lambda_{i_1, i_2, \dots, i_N, 0} \lambda_{i_2, i_3, \dots, i_N, 0, 0} \dots \lambda_{i_N, 0, \dots, 0}, \quad (6)$$

$$a_{i_1, i_2, \dots, i_N}^{(n)} = \sum_{j=0}^{p-1} \lambda_{i_1, i_2, \dots, i_N, j} a_{i_2, i_3, \dots, i_N, j}^{(n-1)}. \quad (7)$$

Мы будем говорить, что элемент массива  $a_{i_1, i_2, \dots, i_N}^{(s)}$  соответствует вершине  $(i_1, i_2, \dots, i_N)$ . Пользуясь новыми обозначениями, условие ортонормированности (5) можно переформулировать в следующем виде.

Система сдвигов масштабирующей функции  $\varphi(x) \in \mathfrak{D}_M(G_{-N})$  будет ортонормированной тогда и только тогда, когда для любых  $i_1, i_2, \dots, i_N$   $a_{i_1, i_2, \dots, i_N}^{(M)} = 1$ , иными словами, когда массив  $A^{(M)}$  состоит только из единиц.

В работе [11] были доказаны следующие три утверждения.

**Лемма 1.** В массиве  $A^{(0)}$  на местах, соответствующих вершинам уровня  $s \leq N$  в дереве  $\tilde{T}$ , стоят единицы.

**Лемма 2.** Пусть по  $N$ -валидному дереву  $T$  построены дерево  $\tilde{T}$ , граф  $\Gamma$  и определены значения маски  $m_0(\chi)$  так, как указано в равенствах (4). Пусть  $(A^{(n)})_{n=0}^\infty$  — последовательность массивов, определяемая равенствами (6) и (7). Тогда в массиве  $A^{(n)}$  элементы, соответствующие вершинам уровня  $s \leq N + n$  в дереве  $\tilde{T}$ , равны единице.

**Теорема 1.** Пусть по  $N$ -валидному дереву  $T$  построены дерево  $\tilde{T}$ , граф  $\Gamma$  и определены значения маски  $m_0(\chi)$  так, как указано в равенствах (4). Пусть  $\tilde{H} = \text{height}(\tilde{T})$ . Тогда равенство

$$\hat{\varphi}(\chi) = \prod_{k=0}^\infty m_0(\chi \mathcal{A}^{-k}) \in \mathfrak{D}_{-N}(G_M^\perp)$$

определяет ортогональную масштабирующую функцию  $\varphi(x) \in \mathfrak{D}_M(G_{-N})$ , причем  $M = \tilde{H} - N$ .

Таким образом, была решена задача о поиске алгоритма построения масштабирующей функции с компактным носителем и ограниченной частотной полосой. В следующем параграфе будет представлен алгоритм для нахождения масштабирующей функции с неограниченной частотной полосой для случая  $N = 1$ . Этот алгоритм также будет представлен в терминах графов определенного типа.

### 3. МАСШТАБИРУЮЩИЕ ФУНКЦИИ С НЕОГРАНИЧЕННОЙ ЧАСТОТНОЙ ПОЛОСОЙ

В этом параграфе мы будем рассматривать такие функции  $\varphi$ , что промежутки постоянства их преобразования Фурье  $\hat{\varphi}$  — смежные классы по  $G_{-1}^\perp$ , а носитель неограничен. По аналогии с предыдущими обозначениями будем говорить, что  $\hat{\varphi} \in \mathfrak{D}_{-1}(G_\infty^\perp)$  и  $\varphi(x) \in \mathfrak{D}_\infty(G_{-1})$ .



Критерий ортонормированности системы сдвигов по функциям такого класса можно записать как:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{M-1}=0}^{p-1} |\hat{\varphi}(G_{-1}^\perp r_{-1}^{\alpha_{-1}} r_0^{\alpha_0} \dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}})|^2 = 1, \quad \forall \alpha_{-1} = \overline{0, p-1}. \quad (8)$$

Рассмотрим 1-валидное дерево  $T$ . Корнем его является 0, а остальные вершины принимают различные значения от 1 до  $p-1$ .

Например, при  $p = 2$  существует только одно 1-валидное дерево (рис. 1, а), а при  $p = 3$  — три различных дерева (рис. 1, б).

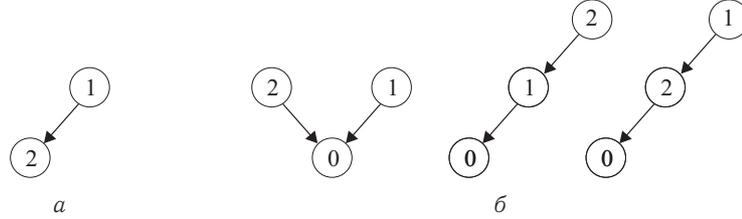


Рис. 1. 1-валидные деревья

При увеличении  $p$  их количество быстро возрастает.

Найдем в 1-валидном дереве путь, удовлетворяющий следующим условиям:

T1. Он не содержит вершину 0.

T2. Полустепень захода всех вершин пути не более чем 1, т. е. в каждую вершину «входит» не более чем одна дуга.

T3. Путь содержит лист.

Такой путь будем называть путем  $T_h$ , где  $h \geq 0$  — длина пути. В случае  $h = 0$  будем считать, что путь состоит только из листа.

Имея путь  $T_h$ , соединим последнюю вершину пути со входящим в него листом. Получим граф  $\Gamma_h$ , содержащий простой контур, который мы также будем обозначать  $T_h$ .

Построить по такому контуру функцию  $\hat{\varphi}$  можно, воспользовавшись третьим пунктом алгоритма 1.

Для удобства доказательства последующей теоремы мы введем некоторые обозначения по аналогии с работой [11] (см. формулу (5)). Сначала заметим: условие (8) о том, что система сдвигов по функции  $\varphi(x) \in \mathfrak{D}_\infty(G_{-1})$  является ортонормированной, можно переписать в следующем виде:

$$1 = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{M-1}=0}^{p-1} |\hat{\varphi}(G_{-1}^\perp r_{-1}^{\alpha_{-1}} r_0^{\alpha_0} \dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}})|^2 = \\ = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{\alpha_0=0}^{p-1} \lambda_{\alpha_{-1}, \alpha_0} \sum_{\alpha_1=0}^{p-1} \lambda_{\alpha_0, \alpha_1} \dots \sum_{\alpha_{M-2}=0}^{p-1} \lambda_{\alpha_{M-3}, \alpha_{M-2}} \sum_{\alpha_{M-1}=0}^{p-1} \lambda_{\alpha_{M-2}, \alpha_{M-1}} \lambda_{\alpha_{M-1}, 0}, \quad \forall \alpha_{-1} = \overline{0, p-1}.$$

Теперь зададим последовательность одномерных массивов  $A^{(n)} = (a_i^{(n)})_{i=0}^{p-1}$  рекуррентно через их элементы:

$$a_i^{(0)} = \lambda_{i,0}, \quad (9)$$

$$a_i^{(n)} = \sum_{j=0}^{p-1} \lambda_{i,j} a_j^{(n-1)}. \quad (10)$$

Мы будем говорить, что элемент массива  $a_i^{(s)}$  соответствует вершине  $i$ .

Если представить массивы  $A^{(n)}$  в виде столбцов, то можно заметить, что в данном случае при  $N = 1$  рекуррентные соотношения (10) соответствуют умножению матрицы  $\Lambda = (\lambda_{i_1, i_2})_{i_1, i_2=0}^{p-1}$  на столбец  $A^{(n-1)}$  и могут быть переписаны в виде  $A^{(n)} = \Lambda A^{(n-1)}$ .

Пользуясь новыми обозначениями, условие ортонормированности (8) можно переформулировать в следующем виде.

Система сдвигов функции  $\varphi(x) \in \mathfrak{D}_\infty(G_{-1})$  будет ортонормированной тогда и только тогда, когда  $\lim_{M \rightarrow \infty} a_i^{(M)} = 1$  для всех  $i$ , иными словами, когда предел каждой компоненты массива  $A^{(M)}$  равен единице.



**Лемма 3.** Предел каждой компоненты массива  $A^{(M)}$ , построенного вышеописанным образом, равен единице.

**Доказательство.** Пусть дано 1-валидное дерево  $T$ . Выберем путь  $T_h$ , удовлетворяющий условиям Т1–Т3 и построим граф  $\Gamma_h$ , связав последнюю вершину этого пути с первой. Теперь перенумеруем вершины, пользуясь обходом в ширину поддерева графа  $\Gamma_h$ , которое получается исключением из него вершин и дуг контура  $T_h$ . Таким образом, сначала будем иметь корень — вершину 0, затем — вершины первого уровня, затем — вершины, связанные с первой из вершин первого уровня, затем — вершины, связанные со второй из вершин второго уровня, и т. д. После этого нумеруем вершины пути  $T_h$  в порядке от вершины меньшего уровня до листа. Они будут иметь номера от  $p - h - 1$  до  $p - 1$ . Полученная по алгоритму 1 матрица значений маски будет иметь вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \tilde{\Lambda} & 0 \\ \tilde{B}^1 & \tilde{B}^2 \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\tilde{\Lambda}$  — матрица размерности  $(p - h - 1) \times (p - h - 1)$ , состоящая из нулей и единиц, причем в каждой строке ровно одна единица:

$$\tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Она описывает связи в поддереве графа  $\Gamma_h$ , которое получается исключением из него контура  $T_h$ .

Матрица  $\tilde{B}^1$  имеет размерность  $(h + 1) \times (p - h - 1)$  и описывает связь контура с остальной частью графа. В ней только один ненулевой элемент. Если  $i$  — это номер (в новой нумерации) той вершины, с которой связан путь  $T_h$ , то  $\tilde{b}_{0,i}^1 = \beta_1$ , а остальные элементы — нули.

Матрица  $\tilde{B}^2$  имеет размерность  $(h + 1) \times (h + 1)$  и следующий вид:

$$\tilde{B}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_2 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Она описывает связи между элементами внутри контура. Заметим, что исходя из пункта 3 алгоритма 1  $\beta_1 > 0$ ,  $\beta_2 > 0$ ,  $\beta_1 + \beta_2 = 1$ .

Нулевой столбец  $\Lambda_0$  матрицы  $\Lambda$  будет являться вектором  $A^{(0)} = \Lambda_0$ .

Представим столбец  $A^{(M)}$  в виде

$$A^{(M)} = \begin{pmatrix} \tilde{A}^{(M)} \\ \tilde{B}^{(M)} \end{pmatrix}.$$

Здесь длины  $\tilde{A}^{(M)}$  и  $\tilde{B}^{(M)}$  равны  $p - h - 1$  и  $h + 1$  соответственно. Тогда

$$A^{(M+1)} = \Lambda A^{(M)} = \begin{pmatrix} \tilde{\Lambda} & 0 \\ \tilde{B}^1 & \tilde{B}^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{A}^{(M)} \\ \tilde{B}^{(M)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\Lambda} \cdot \tilde{A}^{(M)} \\ \tilde{B}^1 \cdot \tilde{A}^{(M)} + \tilde{B}^2 \cdot \tilde{B}^{(M)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A}^{(M+1)} \\ \tilde{B}^{(M+1)} \end{pmatrix}.$$



Матрица  $\tilde{A}$  и столбец  $\tilde{A}^{(0)}$ , а также все столбцы  $\tilde{A}^{(M)}$  соответствуют той части графа, в которой контура нет, и видно, что ни матрицы, ни столбцы  $\tilde{B}$  на них никак не влияют. Значит, применима лемма 2 — на каждом месте  $i$  столбца  $\tilde{A}^{(M)}$  единица появится на шаге  $M = l - 1$ , где  $l$  — уровень вершины  $i$ . Следовательно, при  $M \rightarrow \infty$  единица появится на всех местах этого столбца.

Рассмотрим теперь столбец  $\tilde{B}^{(M)}$ . Пусть вершина низшего уровня в пути  $T_h = ((p - 1) \rightarrow (p - 2) \rightarrow \dots \rightarrow (p - h - 1))$  имела уровень  $s + 1$ , а вершина  $p - h - 1$  связана с вершиной  $i$ , очевидно, уровня  $s$ . Пусть  $s \geq 2$ . Тогда  $a_i^{(s-1)} = 1$  по лемме 2, т. е. на  $(s - 1)$ -м шаге, на  $i$ -м месте в массиве  $A^{(s-1)}$  стоит единица. Во время предыдущих шагов на этом месте стоит ноль, следовательно, и подстолбец  $\tilde{B}^{(s-1)}$  состоит только из нулей.

Докажем, что на шаге  $s - 1 + n = s - 1 + k_1(h + 1) + k_2$ ,  $k_1 \in \mathbb{Z}$ ,  $k_2 = \overline{0, h}$  столбец  $\tilde{B}^{(n+s)}$  имеет вид

$$\tilde{B}^{(n+s)} = \underbrace{(a_{k_1+1}, a_{k_1+1}, \dots, a_{k_1+1})}_{k_2 \text{ раз}}, a_{k_1}, \dots, a_{k_1})^T, \tag{11}$$

где последовательность  $a_k$  определяется формулами:

$$a_0 = 0, \quad a_{k+1} = \beta_1 + \beta_2 a_k. \tag{12}$$

Доказательство проведем по индукции.

1. Сначала пусть  $n = 1$ , что означает  $k_1 = 0$ ,  $k_2 = 1$ . Уже было замечено, что, с одной стороны,  $a_i^{(s)} = 1$ , а с другой,  $\tilde{b}_{0,i}^1 = \beta_1$ , а остальные элементы  $\tilde{B}^1$  равны нулю, следовательно,

$$\tilde{B}^1 \cdot \tilde{A}^{(s)} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \beta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0^{(s)} \\ \vdots \\ a_{i-1}^{(s)} \\ 1 \\ a_{i+1}^{(s)} \\ \vdots \\ a_{p-h}^{(s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Более того, этот же результат, очевидно, будет верен и для любого шага  $s - 1 + n$ , где  $s$  определено ранее, а  $n$  — произвольное натуральное число, так как единица останется на том же месте, а остальные элементы свой вклад не вносят.

Столбец  $\tilde{B}^{(s)}$  состоит только из нулей, следовательно,  $\tilde{B}^2 \cdot \tilde{B}^{(s)}$  — также нулевая матрица. Имеем

$$\tilde{B}^{(s+1)} = \tilde{B}^1 \tilde{A}^{(s)} + \tilde{B}^2 \tilde{B}^{(s)} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \\ \vdots \\ a_0 \end{pmatrix},$$

что доказывает базу индукции.

2. Пусть теперь равенство (11) выполняется для  $n = k$ . Докажем, что оно верно для  $n = k + 1$ .

Рассмотрим два случая.

2.1. Пусть  $k = k_1(h + 1)$ ,  $k_2 = 0$ . Значит, на шаге  $k$  имеем

$$\tilde{B}^{(s+k)} = \begin{pmatrix} a_{k_1} \\ a_{k_1} \\ \vdots \\ a_{k_1} \end{pmatrix}; \quad \tilde{B}^1 \cdot \tilde{A}^{(s+k)} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$



Можно заметить, что при умножении на вектор матрицы

$$\tilde{B}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_2 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

происходит циклическая перестановка элементов вектора с последующим умножением первой компоненты на  $\beta_2$ . Тогда получаем

$$\tilde{B}^{(s+k+1)} = \tilde{B}^1 \tilde{A}^{(s+k)} + \tilde{B}^2 \tilde{B}^{(s+k)} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_2 a_{k_1} \\ a_{k_1} \\ \vdots \\ a_{k_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{k_1+1} \\ a_{k_1} \\ \vdots \\ a_{k_1} \end{pmatrix}.$$

2.2. Пусть теперь  $k = k_1(h + 1) + k_2$ ,  $k_2 = \overline{1, h}$ . Имеем

$$\tilde{B}^{(k+s)} = \underbrace{(a_{k_1+1}, a_{k_1+1}, \dots, a_{k_1+1})}_{k_2 \text{ раз}}, a_{k_1}, \dots, a_{k_1}^T.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{B}^{(k+s+1)} = \tilde{B}^1 \tilde{A}^{(s+k)} + \tilde{B}^2 \tilde{B}^{(s+k)} &= \begin{pmatrix} \beta_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_2 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{k_1+1} \\ a_{k_1+1} \\ \vdots \\ a_{k_1+1} \\ a_{k_1} \\ a_{k_1} \\ \vdots \\ a_{k_1} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \beta_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_2 a_{k_1} \\ a_{k_1+1} \\ \vdots \\ a_{k_1+1} \\ a_{k_1} \\ a_{k_1} \\ \vdots \\ a_{k_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{k_1+1} \\ a_{k_1+1} \\ \vdots \\ a_{k_1+1} \\ a_{k_1} \\ a_{k_1} \\ \vdots \\ a_{k_1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Индукция доказана, представление (11) верно.

Исследуем теперь последовательность (12). Нетрудно проверить, что последовательность  $a_{k+1} = \beta_1 + \beta_2 a_k$  является монотонно возрастающей и ограниченной сверху при  $\beta_1 + \beta_2 = 1$ ,  $\beta_1 > 0$ ,  $\beta_2 > 0$ , следовательно, имеет конечный предел. Обозначим его  $a$ . Для нахождения предела положим в (12)  $k \rightarrow \infty$ . Получим

$$a = \beta_1 + (1 - \beta_1)a, \quad a = 1.$$

Отсюда имеем

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \tilde{B}^{(M)} = (1, 1, \dots, 1)^T.$$



Учитывая, что также по лемме  $2 \lim_{M \rightarrow \infty} \tilde{A}^{(M)} = (1, 1, \dots, 1)^T$ , получаем

$$\lim_{M \rightarrow \infty} A^{(M)} = (1, 1, \dots, 1)^T.$$

Таким образом, утверждение леммы справедливо при  $s \geq 2$ .

Напомним, что вершина низшего уровня в пути  $T_h = ((p-1) \rightarrow (p-2) \rightarrow \dots \rightarrow (p-h-1))$  имела уровень  $s+1$ , а вершина  $p-h-1$  связана с вершиной  $i$ , очевидно, уровня  $s$ . Пусть теперь  $s=0$  или  $s=1$ . В этом случае уже на нулевом шаге в столбце  $A^{(0)}$  на  $i$ -м месте стоит 1, что упрощает доказательство. Результат, аналогичный результату при  $s \geq 2$ , можно получить, проведя подобную индукцию для шагов вида  $n = k_1(h+1) + k_2$ , т. е. в сравнении со случаем  $s \geq 2$  пропадает слагаемое  $s-1$ . В остальном доказательство абсолютно идентичное. Лемма доказана полностью.  $\square$

**Замечание.** Стоит заметить, что перенумерация вершин, использованная для удобства построения матрицы  $\Lambda$  и реализации блочного матричного умножения, не делает доказательство менее общим. Перенумерация влечет за собой перестановку элементов в матрице, соответствующей графу  $\Gamma_h$ , и аналогичную перестановку элементов в столбцах  $A^{(n)}$ . Соответственно элементы будут появляться на других местах, но сам вид элементов не изменится.

Для иллюстрации этого процесса рассмотрим следующий пример.

**Пример.** Рассмотрим дерево  $p=7$  (рис. 2, а). Выберем путь  $T_1 = (6 \rightarrow 1)$  и соединим последнюю вершину с первой. Получим граф  $\Gamma_1$  (рис. 2, б).

Следуя схеме доказательства теоремы, необходимо перенумеровать вершины. Сначала рассмотрим поддереву графа  $\Gamma_1$ , получающуюся исключением из него контура  $T_1$ . Перенумеруем вершины соответственно обходу в ширину, как показано на рис. 2, в.

После этого занумеруем вершины, входящие в контур, и получим граф, изображенный на рис. 2, г.

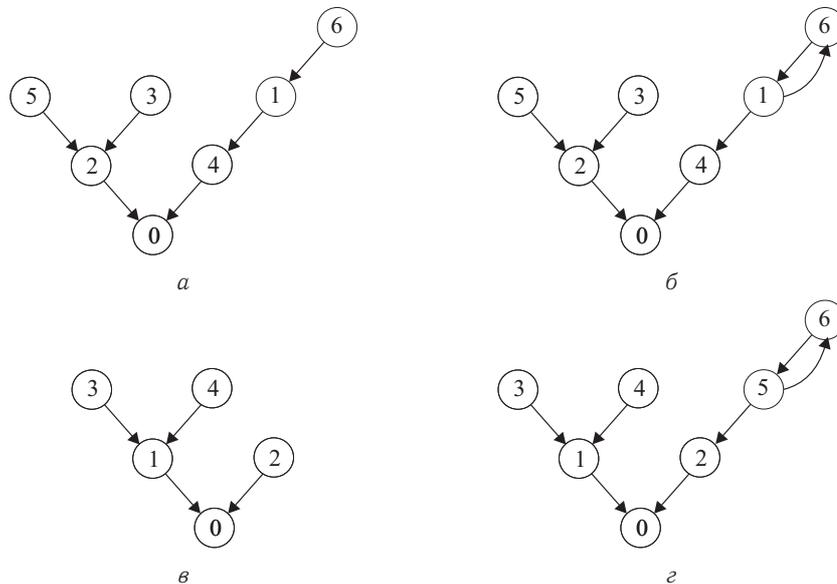


Рис. 2. Построение графа  $\Gamma_1$  и перенумерация его вершин

Его матрица  $\Lambda$  имеет вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_1 & 0 & 0 & 0 & \beta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$



В этом случае

$$\tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}^2 = \begin{pmatrix} 0 & \beta_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Далее выпишем несколько первых элементов последовательности столбцов  $A^{(n)}$ , определяемых по формулам (9), (10). Иными словами,  $A^{(0)} = \Lambda_0$ , где  $\Lambda_0$  — нулевой столбец матрицы  $\Lambda$ , а  $A^{(n)} = \Lambda A^{(n-1)}$ . Последовательность получается следующая:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \beta_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \beta_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \beta_1 + \beta_1\beta_2 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \beta_1 + \beta_1\beta_2 \\ \beta_1 + \beta_1\beta_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \beta_1 + \beta_2(\beta_1 + \beta_1\beta_2) \\ \beta_1 + \beta_1\beta_2 \end{pmatrix}, \dots \quad (13)$$

Так как  $s$  — уровень вершины, с которой связан контур, — равен 1, то уже на первом шаге в массиве появляются элементы последовательности  $a_n$ , причем появляются они на последних местах.

Если же рассмотреть граф  $\Gamma_h$  до перенумерации и построить его матрицу  $\Lambda$ , то получим

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_1 & 0 & \beta_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Построенная по такой матрице последовательность  $A^{(n)}$  будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \beta_1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \beta_1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \beta_1 + \beta_2\beta_1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \beta_1 + \beta_2\beta_1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \beta_1 + \beta_2\beta_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \beta_1 + \beta_2(\beta_1 + \beta_2\beta_1) \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \beta_1 + \beta_2\beta_1 \end{pmatrix}, \dots \quad (14)$$

Можно заметить, что в этом случае не изменился вид элементов, а изменился только их порядок. Следовательно, и в случае (13), и в случае (14) в пределе получим столбец из единиц. На этом мы заканчиваем пример.

Основным результатом работы является следующая теорема.

**Теорема 2.** Пусть по 1-валидному дереву  $T$  построен граф  $\Gamma_h$  и определены значения маски  $m_0(\chi)$  так, как указано в пункте 3 алгоритма 1. Тогда равенство

$$\hat{\varphi}(\chi) = \prod_{k=0}^{\infty} m_0(\chi \mathcal{A}^{-k}) \in \mathfrak{D}_{-1}(G_{\infty}^{\perp})$$

определяет ортогональную масштабирующую функцию  $\varphi(x) \in \mathfrak{D}_{\infty}(G_{-1})$ .

Доказательство этого факта очевидным образом вытекает из леммы 3.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00152-а).



### Библиографический список

1. Протасов В. Ю., Фарков Ю. А. Диадические вейвлеты и масштабирующие функции на полупрямой // Матем. сб. 2006. Т. 197, № 10. С. 129–160. DOI: 10.4213/sm1126.
2. Фарков Ю. А. Биортогональные диадические вейвлеты на полупрямой // УМН. 2007. Т. 62, № 6(378). С. 189–190. DOI: 10.4213/rm8541.
3. Протасов В. Ю. Аппроксимация диадическими всплесками // Матем. сб. 2007. Т. 198, № 11. С. 135–152. DOI: 10.4213/sm1981.
4. Фарков Ю. А. Ортогональные вейвлеты с компактными носителями на локально компактных Абелевых группах // Изв. РАН. Сер. матем. 2005. Т. 69, вып. 3. С. 193–220. DOI: 10.4213/im644.
5. Фарков Ю. А. Ортогональные вейвлеты на прямых произведениях циклических групп // Матем. заметки. 2007. Т. 82, вып. 6. С. 934–952. DOI: 10.4213/mzm4181.
6. Лукомский С. Ф. Кратномасштабный анализ на нульмерных группах и всплесковые базисы // Матем. сб. 2010. Т. 201, № 5. С. 41–65. DOI: 10.4213/sm7580.
7. Lukomskii S. F. Step Refinable Functions and Orthogonal MRA on Vilenkin Groups // J. Fourier Anal. Appl. 2014. Vol. 20, iss. 1. P. 42–65. DOI: 10.1007/s00041-013-9301-6.
8. Лукомский С. Ф. Кратномасштабный анализ Рисса на группах Виленкина // Докл. АН. 2014. Т. 457, № 1. С. 24–27. DOI: 10.7868/S0869565214190086.
9. Лукомский С. Ф. Кратномасштабный анализ Рисса на нульмерных группах // Изв. РАН. Сер. матем. 2015. Т. 79, вып. 1. С. 153–184. DOI: 10.4213/im8181.
10. Lukomskii S. F., Berdnikov G. S. N-Valid trees in wavelet theory on Vilenkin groups // Int. J. Wavelets Multiresolut Inf. Process. 2015. Vol. 13, iss. 5, 1550037. 23 p. DOI: 10.1142/S021969131550037X.
11. Бердников Г. С., Лукомский С. Ф., Крусс Ю. С. Об ортогональности системы сдвигов масштабирующей функции на группах Виленкина // Матем. заметки. 2015. Т. 98, № 2. С. 310–313. DOI: 10.4213/mzm10664.

### Образец для цитирования:

Бердников Г. С. Графы с контурами в кратномасштабном анализе на группах Виленкина // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 4. С. 377–388. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-377-388.

## Graphs with Contours in Multiresolution Analysis on Vilenkin Groups

G. S. Berdnikov

Gleb S. Berdnikov, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., 410012, Saratov, Russia, evrintelligent@gmail.com

The aim of this article is to study the problem of constructing multiresolution analysis on Vilenkin group. Previous papers by S. F. Lukomskii, Iu. S. Kruss and the author present an algorithm for constructing scaling functions  $\varphi$  with compact support, Fourier transform of which also has compact support. The description of such algorithm is tightly connected with directed graphs of special structure, which are constructed with the help of so-called  $N$ -valid trees. One of the special properties of these graphs is the absence of directed cycles — contours. This property allows admits the construction of scaling functions  $\varphi$ , Fourier transform of which has compact support. This approach has a number of advantages. Firstly, this algorithm does not include exhaustive search in contrast to algorithm using the notion of "blocked sets", which is described in the papers by Yu. A. Farkov. Secondly, such approach is conveniently generalized to the case of local fields of positive characteristic, which was done in the papers by Kruss Iu. S. The contents of the current paper represents the first step of using digraphs with contours for similar purpose. Taking further the ideas of previous research we construct digraph with only one simple contour using 1-valid tree. It appears that such graph also generates a scaling function  $\varphi$ . However, since the contour appears, such scaling function's Fourier transform does not have compact support.

**Key words:** multiresolution analysis, Vilenkin group, scaling function, graphs, wavelet analysis.

*This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 16-01-00152-a).*

### References

1. Protasov V. Yu., Farkov Yu. A. Dyadic wavelets and refinable functions on a half-line. *Sb. Math.*, 2006, vol. 197, no. 10, pp. 1529–1558. DOI: 10.1070/SM2006v197n10ABEH003811.
2. Farkov Yu. A. Biorthogonal dyadic wavelets on a half-line. *Russian Math. Surveys*, 2007, vol. 62, no. 6, pp. 1197–1198. DOI: 10.1070/RM2007v062n06ABEH004494.
3. Protasov V. Yu. Approximation by dyadic wavelets. *Sb. Math.*, 2007, vol. 198, no. 11, pp. 1665–1681. DOI: 10.1070/SM2007v198n11ABEH003900.
4. Farkov Yu. A. Orthogonal wavelets with compact



- support on locally compact Abelian groups. *Izv. Math.*, 2005, vol. 69, iss. 3, pp. 623–650. DOI: 10.1070/IM2005v069n03ABEH000540.
5. Farkov Yu. A. Orthogonal wavelets on direct products of cyclic groups. *Math. Notes*, 2007, vol. 82, iss. 5–6, pp. 843–859. DOI: 10.1134/S0001434607110296.
  6. Lukomskii S. F. Multiresolution analysis on zero-dimensional Abelian groups and wavelets bases. *Sb. Math.*, 2010, vol. 201, no. 5, pp. 669–691. DOI: 10.1070/SM2010v201n05ABEH004088.
  7. Lukomskii S. F. Step Refinable Functions and Orthogonal MRA on Vilenkin Groups. *J. Fourier Anal. Appl.*, 2014, vol. 20, iss. 1, pp. 42–65. DOI: 10.1007/s00041-013-9301-6.
  8. Lukomskii S. F. Riesz Multiresolution Analysis on Vilenkin Groups. *Doklady Math.*, 2014, vol. 90, no. 1, pp. 412–415. DOI: 10.1134/S1064562414040061
  9. Lukomskii S. F. Riesz multiresolution analysis on zero-dimensional groups. *Izv. Math.*, 2015, vol. 79, iss. 1, pp. 145–176. DOI: 10.1070/IM2015v079n01ABEH002737.
  10. Lukomskii S. F., Berdnikov G. S. N-Valid trees in wavelet theory on Vilenkin groups. *Int. J. Wavelets Multiresolut Inf. Process.*, 2015, vol. 13, iss. 5, 1550037. 23 p. DOI: 10.1142/S021969131550037X.
  11. Berdnikov G. S., Lukomskii S. F., Kruss Yu. S. On orthogonal systems of shifts of scaling function on local fields of positive characteristic. *Math. Notes*, 2015, vol. 98, iss. 2, pp. 339–342. DOI: 10.1134/S000143461507038X.

**Please cite this article in press as:**

Berdnikov G. S. Graphs with Contours in Multiresolution Analysis on Vilenkin Groups. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 4, pp. 377–388 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-377-388.

УДК 517.52

## РЯДЫ ФУРЬЕ ПО ПОЛИНОМАМ МЕЙКСНЕРА, ОРТОГОНАЛЬНЫМ ПО СОБОЛЕВУ

Р. М. Гаджимирзаев

Гаджимирзаев Рамис Махмудович, младший научный сотрудник отдела математики и информатики, Дагестанский научный центр РАН, Махачкала, ramis3004@gmail.com

В настоящей статье рассматривается система дискретных функций  $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$ , которая является ортонормированной относительно скалярного произведения типа Соболева следующего вида:

$$\langle f, g \rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} \Delta^{\nu} f(-r) \Delta^{\nu} g(-r) + \sum_{t \in \Omega_r} \Delta^r f(t) \Delta^r g(t) \mu(t),$$

где  $\mu(t) = q^t(1-q)$ ,  $\Omega_r = \{-r, -r+1, \dots, 0, 1, \dots\}$ ,  $0 < q < 1$ . Показано, что сдвинутые классические полиномы Мейкснера  $\{M_k^{-r}(x+r)\}_{k=r}^{\infty}$  вместе с функциями вида  $\left\{\frac{(x+r)^{[k]}}{k!}\right\}_{k=0}^{r-1}$  образуют полную ортогональную систему в пространстве  $l_{2,\mu}(\Omega_r)$ , в котором введено указанное скалярное произведение  $\langle f, g \rangle$ . Установлено, что ряд Фурье по полиномам Мейкснера  $\{a_k M_k^{-r}(x+r)\}_{k=r}^{\infty}$  ( $a_k$  — нормирующие множители), ортонормированным в смысле Соболева, является частным случаем смешанных рядов по полиномам Мейкснера. Кроме того, введен новый специальный ряд по ортогональным полиномам Мейкснера  $M_k^{\alpha}(x)$  с  $\alpha > -1$ , который в случае  $\alpha = r$  совпадает с соответствующим смешанным рядом по полиномам Мейкснера  $M_k^0(x)$  и рядом Фурье по системе полиномов Мейкснера  $\{a_k M_k^{-r}(x+r)\}_{k=r}^{\infty}$ , ортонормированным в смысле Соболева.

*Ключевые слова:* полиномы Мейкснера, смешанный ряд, специальный ряд, скалярное произведение типа Соболева, полиномы, ортогональные по Соболеву.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-388-395

### ВВЕДЕНИЕ

Теория полиномов, ортогональных относительно скалярных произведений типа Соболева (полиномы, ортогональные по Соболеву), получила развитие в работах многих авторов (см. [1–5] и цитированную там литературу). Были достаточно подробно исследованы различные особенности полиномов,