support on locally compact Abelian groups. *Izv. Math.*, 2005, vol. 69, iss. 3, pp. 623–650. DOI: 10.1070/IM2005v069n03ABEH000540.
5. Farkov Yu. A. Orthogonal wavelets on direct products of cyclic groups. *Math. Notes*, 2007, vol. 82, iss. 5–6, pp. 843–859. DOI: 10.1134/S0001434607110296.
6. Lukomskii S. F. Multiresolution analysis on zero-dimensional Abelian groups and wavelets bases. *Sb. Math.*, 2010, vol. 201, no. 5, pp. 669–691. DOI: 10.1070/SM2010v201n05ABEH004088.
7. Lukomskii S. F. Step Refinable Functions and Orthogonal MRA on Vilenkin Groups. *J. Fourier Anal. Appl.*, 2014, vol. 20, iss. 1, pp. 42–65. DOI: 10.1007/s00041-013-9301-6.
8. Lukomskii S. F. Riesz Multiresolution Analysis on Vilenkin Groups. *Doklady Math.*, 2014, vol. 90, no. 1, pp. 412–415. DOI: 10.1134/S1064562414040061
9. Lukomskii S. F. Riesz multiresolution analysis on zero-dimensional groups. *Izv. Math.*, 2015, vol. 79, iss. 1, pp. 145–176. DOI: 10.1070/IM2015v079n01ABEH002737.
10. Lukomskii S. F., Berdnikov G. S. N-Valid trees in wavelet theory on Vilenkin groups. *Int. J. Wavelets Multiresolut Inf. Process*, 2015, vol. 13, iss. 5, 1550037. 23 p. DOI: 10.1142/S021969131550037X.
11. Berdnikov G. S., Lukomskii S. F., Kruss Yu. S. On orthogonal systems of shifts of scaling function on local fields of positive characteristic. *Math. Notes*, 2015, vol. 98, iss. 2, pp. 339–342. DOI: 10.1134/S000143461507038X.

Please cite this article in press as:
Berdnikov G. S. Graphs with Contours in Multiresolution Analysis on Vilenkin Groups. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 4, pp. 377–388 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-377-388.

УДК 517.52

РЯДЫ ФУРЬЕ ПО ПОЛИНОМАМ МЕЙКСНЕРА, ОРТОГОНАЛЬНЫМ ПО СОБОЛЕВУ

Р. М. Гаджимирзаев

Гаджимирзаев Рамис Махмудович, младший научный сотрудник отдела математики и информатики, Дагестанский научный центр РАН, Махачкала, ramis3004@gmail.com

В настоящей статье рассматривается система дискретных функций $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$, которая является ортонормированной относительно скалярного произведения типа Соболева следующего вида:

$$\langle f, g\rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} \Delta^{\nu} f(-r)\Delta^{\nu} g(-r) + \sum_{t\in\Omega_r} \Delta^r f(t)\Delta^r g(t)\mu(t),$$

где $\mu(t) = q^t(1-q)$, $\Omega_r = \{-r, -r+1, \ldots, 0, 1, \ldots\}$, $0 < q < 1$. Показано, что сдвинутые классические полиномы Мейкснера $\left\{M_k^{-r}(x+r)\right\}_{k=r}^{\infty}$ вместе с функциями вида $\left\{\frac{(x+r)^{[k]}}{k!}\right\}_{k=0}^{r-1}$ образуют полную ортогональную систему в пространстве $l_{2,\mu}(\Omega_r)$, в котором введено указанное скалярное произведение $\langle f, g\rangle$. Установлено, что ряд Фурье по полиномам Мейкснера $\left\{a_k M_k^{-r}(x+r)\right\}_{k=r}^{\infty}$ (a_k — нормирующие множители), ортонормированным в смысле Соболева, является частным случаем смешанных рядов по полиномам Мейкснера. Кроме того, введен новый специальный ряд по ортогональным полиномам Мейкснера $M_k^{\alpha}(x)$ с $\alpha > -1$, который в случае $\alpha = r$ совпадает с соответсвующим смешанным рядом по полиномам Мейкснера $M_k^0(x)$ и рядом Фурье по системе полиномов Мейкснера $\left\{a_k M_k^{-r}(x+r)\right\}_{k=r}^{\infty}$, ортонормированным в смысле Соболева.

Ключевые слова: полиномы Мейкснера, смешанный ряд, специальный ряд, скалярное произведение типа Соболева, полиномы, ортогональные по Соболеву.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-388-395

ВВЕДЕНИЕ

Теория полиномов, ортогональных относительно скалярных произведений типа Соболева (полиномы, ортогональные по Соболеву), получила развитие в работах многих авторов (см. [1–5] и цитированную там литературу). Были достаточно подробно исследованы различные особенности полиномов, ортогональных по Соболеву, которыми не обладают обычные полиномы, ортогональные на интервале (или на сетке) относительно положительных весов. В частности, может случится так, что полиномы, ортогональные по Соболеву на заданном интервале (a, b), могут иметь нули, совпадающие с одним или обоими концами этого интервала. Это свойство полиномов, ортогональных по Соболеву имеет важное значение для некоторых приложений, для которых требуется, чтобы значения частичных сумм ряда Фурье функции $f(x)$ по рассматриваемой системе ортогональных полиномов совпали на одном из концов (или на обоих концах) отрезка $[a, b]$ со значениями функции $f(x)$ в указанных точках. Заметим, что обычные ортогональные с положительным на (a, b) весом полиномы этим важным свойством не обладают. При этом вопросы, связанные с поточечной и равномерной сходимостью рядов Фурье по полиномам, ортогональным по Соболеву, остаются мало изученными. Это, в первую очередь, связано с тем, что асимптотические свойства полиномов, ортогональных по Соболеву, исследованы только в отдельных частных случаях. В связи с этой проблемой отметим работу [6], в которой, используя идеи и технику А. А. Гончара [7], исследована задача о сравнительной асимптотике полиномов, ортогональных относительно скалярного произведения типа Соболева с дискретными массами.

С другой стороны, отметим, что в работах И. И. Шарапудинова [8–12] были введены так называемые смешанные ряды по классическим ортогональным полиномам, частичные суммы которых также обладают свойством совпадения их значений на границе области ортогональности со значениями исходной функции. В работах [8–12] были подробно исследованы аппроксимативные свойства смешанных рядов для функций из различных пространств. В частности, было показано, что частичные суммы смешанных рядов по классическим ортогональным полиномам, в отличие от сумм Фурье по этим же полиномам, успешно могут быть использованы в задачах, в которых требуется одновременно приближать исходную функцию и ее несколько разностных производных.

В настоящей статье показано, что если $r \geqslant 0$, то сдвинутые классические полиномы Мейкснера $\left\{a_k M_k^{-r}(x+r)\right\}_{k=r}^{\infty}$ образуют ортонормированную систему в пространстве $l_{2,\mu}(\Omega_r)$, состоящем из дискретных функций $f, g, \ldots$, заданных на сетке $\Omega_r = \{-r, -r+1, \ldots, 0, 1, \ldots\}$, в котором введено скалярное произведение типа Соболева следующего вида:

$$\langle f, g\rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} \Delta^{\nu} f(-r) \Delta^{\nu} g(-r) + \sum_{t \in \Omega_r} \Delta^r f(t) \Delta^r g(t) \mu(t), \tag{1}$$

где $\mu(t) = q^t(1-q)$ — весовая функция, $0 < q < 1$. Кроме того, показано, что если к системе $\left\{a_k M_k^{-r}(x+r)\right\}_{k=r}^{\infty}$ присоединить конечный набор степеней $\left\{\frac{(x+r)^{[k]}}{k!}\right\}_{k=0}^{r-1}$, то мы получим полную в $l_{2,\mu}(\Omega_r)$, ортонормированную относительно скалярного произведения (1) систему полиномов $\Psi = \left\{\frac{(x+r)^{[k]}}{k!}\right\}_{k=0}^{r-1} \bigcup \left\{a_k M_k^{-r}(x+r)\right\}_{k=r}^{\infty}$. Показано, что ряд Фурье по системе Ψ представляет собой смешанный ряд по полиномам Мейкснера $M_k^{\alpha}(x)$ с $\alpha = 0$, в котором присутствуют только классические полиномы Мейкснера. Это, в свою очередь, позволяет использовать при исследовании аппроксимативных свойств ряда Фурье по системе Ψ методы, разработанные в работах [8, 13] при решении аналогичной задачи для смешанных рядов по полиномам Мейкснера. Кроме того, в параграфе 3 введен новый специальный ряд по ортогональным полиномам Мейкснера $M_k^{\alpha}(x)$ с $\alpha > -1$, который в случае $\alpha = r$ совпадает с рядом Фурье по системе Ψ и смешанным рядом по полиномам Мейкснера $M_k^0(x)$.

Прежде чем перейти к формулировке основных результатов, приведем некоторые сведения о полиномах Мейкснера $M_k^{\alpha}(x)$.

1. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О ПОЛИНОМАХ МЕЙКСНЕРА

Для $q \neq 0$ и произвольного α полином Мейкснера порядка n можно определить с помощью равенства

$$M_n^{\alpha}(x) = M_n^{\alpha}(x, q) = \frac{q^{-n}}{n!\rho(x)} \Delta^n \left\{\rho(x) x^{[n]}\right\}, \tag{2}$$

где

$$\rho = \rho(x) = \rho(x; \alpha, q) = q^x \frac{\Gamma(x+\alpha+1)}{\Gamma(x+1)} (1-q)^{\alpha+1}, \qquad x^{[n]} = x(x-1)\ldots(x-n+1).$$

Хорошо известны следующие свойства полиномов Мейкснера [8]:

1° *Ортогональность*:

$$\sum_{x\in\Omega_0} M_k^\alpha(x)M_n^\alpha(x)\rho(x) = \delta_{nk}h_n^\alpha(q) = \delta_{nk}\binom{n+\alpha}{n}q^{-n}\Gamma(\alpha+1), 0<q<1, \alpha>-1, \tag{3}$$

где δ_{nk} — символ Кронекера. Из (3) следует,что ортонормированные полиномы Мейкснера имеют вид

$$m_n^\alpha(x) = \{h_n^\alpha(q)\}^{-\frac{1}{2}}M_n^\alpha(x).$$

В частности, при $\alpha = 0$

$$\sum_{x\in\Omega_0} M_k^0(x)M_n^0(x)\rho(x;0,q) = \delta_{nk}h_n^0(q); \tag{4}$$

2° *Явный вид*:

$$M_n^\alpha(x,q) = \binom{n+\alpha}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k(-x)_k}{(\alpha+1)_k k!}\left(1-\frac{1}{q}\right)^k;$$

3° *Конечные разности*:

$$\Delta M_n^\alpha(x) = M_n^\alpha(x+1) - M_n^\alpha(x) = \frac{q-1}{q}M_{n-1}^{\alpha+1}(x),$$

$$\Delta^r M_n^\alpha(x) = \left(\frac{q-1}{q}\right)^r M_{n-r}^{\alpha+r}(x); \tag{5}$$

4° *Формула Кристоффеля – Дарбу*:

$$\mathscr{K}_{q,n}^\alpha(x,y) = \sum_{k=0}^{n}\frac{q^k k!}{\Gamma(k+\alpha+1)}M_k^\alpha(x)M_k^\alpha(y) = \frac{(n+1)!q^{n+1}}{\Gamma(n+\alpha+1)(q-1)}\frac{M_{n+1}^\alpha(x)M_n^\alpha(y) - M_n^\alpha(x)M_{n+1}^\alpha(y)}{x-y};$$

5° *Рекуррентные соотношения*:

$$M_{n+1}^\alpha(x) - M_n^\alpha(x) = M_{n+1}^{\alpha-1}(x),$$

$$(n+1)qM_{n+1}^\alpha(x) = [n(q+1)+q(\alpha+1)+(q-1)x]M_n^\alpha(x) - (n+\alpha)M_{n-1}^\alpha(x), \tag{6}$$

$$M_n^{-r}(x) = \frac{(n-r)!}{n!}\left(\frac{1}{q}-1\right)^r(-x)_r M_{n-r}^r(x-r), \qquad r \text{ — целое}, \qquad 1\leqslant r\leqslant n. \tag{7}$$

2. СМЕШАННЫЕ РЯДЫ ПО ПОЛИНОМАМ МЕЙКСНЕРА

Смешанные ряды по полиномам Мейкснера впервые были введены в работах [8,13] как альтернативный рядам Фурье по тем же полиномам аппарат для одновременного приближения функций и их разностных производных. Напомним определение этих рядов, следуя работе [8]. Пусть $0<q<1$, $\alpha>-1$, $0\leqslant r$ — целое, $l_{2,\rho}(\Omega_r)$ — пространство дискретных функций $g(x)$, заданных на Ω_r и таких, что $\sum_{\Omega_0} g^2(x)\rho(x) < \infty$. Рассмотрим дискретную функцию $d(x)\in l_{2,\rho}(\Omega_r)$. Из того, что $d(x)\in l_{2,\rho}(\Omega_r)$, очевидно, следует, что функция $\Delta^r\bar d(x) = \Delta^r d(x-r)$ принадлежит пространству $l_{2,\rho}(\Omega_0)$, поэтому мы можем определить коэффициенты Фурье – Мейкснера этой функции

$$d_{r,k}^\alpha = \sum_{t\in\Omega_0}\Delta^r\bar d(t)m_k^\alpha(t,q)\rho(t). \tag{8}$$

В [8] доказана следующая

Теорема 1. *Пусть $x\in\Omega_r$, $0<q<1$, $\alpha>-1$, $\rho=\rho(x)=\rho(x;\alpha,q)$, $d=d(x)\in l_{2,\rho}$, $\bar d(x)=d(x-r)$. Тогда*

$$\bar d(x) = \sum_{\nu=0}^{r-1}\gamma_{r,\nu}\frac{x^{[\nu]}}{\nu!} + \left(\frac{q}{q-1}\right)^r\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d_{r,k}^\alpha}{\{h_k^\alpha(q)\}^{1/2}}M_{k+r}^{\alpha-r}(x,q), \tag{9}$$

где

$$\gamma_{r,\nu} = \left[\Delta^\nu\bar d(0) - \frac{(q/(q-1))^{r-\nu}}{\Gamma(\nu-r+\alpha+1)}\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d_{r,k}^\alpha}{\{h_k^\alpha(q)\}^{1/2}}\frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(k+r-\nu+1)}\right].$$

Нам понадобится случай $\alpha = 0$. При этом, если $0 \leqslant \nu \leqslant r-1$, то $\frac{1}{\Gamma(\nu-r+\alpha+1)} = 0$, поэтому $\gamma_{r,\nu} = \Delta^\nu \bar{d}(0)$.

Имеет место следующее следствие из теоремы 1.

Следствие 1. *Пусть* $x \in \Omega_r$, $0 < q < 1$, $\rho = \rho(x) = \rho(x; 0, q)$, $d(x) \in l_{2,\rho}(\Omega_r)$. *Тогда*

$$d(x) = \sum_{\nu=0}^{r-1} \Delta^\nu d(-r) \frac{(x+r)^{[\nu]}}{\nu!} + (x+r)^{[r]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_{r,k}^0}{(k+1)_r} \frac{M_k^r(x,q)}{\{h_k^0(q)\}^{1/2}}. \tag{10}$$

Правые части равенств (9) и (10) называются *смешанными рядами* по полиномам Мейкснера.

3. СПЕЦИАЛЬНЫЕ РЯДЫ ПО ПОЛИНОМАМ МЕЙКСНЕРА

В работе [14] были введены специальные ряды по классическим полиномам Лагерра и исследованы аппроксимативные свойства их частичных сумм. В настоящей работе мы введем специальные ряды по полиномам Мейкснера, которые являются дискретным аналогом специальных рядов по полиномам Лагерра. Следует отметить, что смешанный ряд (10) по полиномам Мейкснера $M_k^0(x)$ является частным случаем специальных рядов по полиномам Мейкснера.

Пусть $d(x) \in l_{2,\rho}(\Omega_r)$,

$$P_{r-1}(x) = P_{r-1}(d,x) = \sum_{\nu=0}^{r-1} \Delta^\nu d(-r) \frac{(x+r)^{[\nu]}}{\nu!}, \tag{11}$$

$$d_r(x) = \frac{d(x) - P_{r-1}(x)}{(x+r)^{[r]}}. \tag{12}$$

Предположим, что для функции $d_r(x)$, определенной равенством (12), существуют коэффициенты Фурье – Мейкснера:

$$\hat{d}_{r,k}^\alpha = \sum_{t \in \Omega_0} d_r(t) \rho(t) m_k^\alpha(t) = \sum_{t \in \Omega_0} \frac{d(t) - P_{r-1}(t)}{(t+r)^{[r]}} \rho(t) m_k^\alpha(t).$$

Тогда мы можем рассмотреть ряд Фурье – Мейкснера функции $d_r(x)$:

$$d_r(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \hat{d}_{r,k}^\alpha m_k^\alpha(x). \tag{13}$$

Если ряд (13) сходится к функции $d_r(x)$, то с учетом (12)

$$d(x) = P_{r-1}(x) + (x+r)^{[r]} \sum_{k=0}^{\infty} \hat{d}_{r,k}^\alpha m_k^\alpha(x). \tag{14}$$

Это и есть *специальный ряд по полиномам Мейкснера* функции $d(x)$. Если $\alpha = r$, то ряд (14) совпадает с рядом (10). Действительно, в силу (2), (8) и (7) имеем

$$d_{r,k}^0 = \sum_{t \in \Omega_0} \Delta^r d(t-r) m_k^0(t,q) \rho(t;0,q) =$$

$$= \frac{q^{-k}}{k!(h_k^0(q))^{1/2}} \sum_{t \in \Omega_0} \Delta^r (d(t-r) - P_{r-1}(t-r)) \Delta^k \left\{\rho(t;0,q) t^{[k]}\right\} =$$

$$= \frac{(-1)^r q^{-k}}{k!(h_k^0(q))^{1/2}} \sum_{t \in \Omega_0} (d(t) - P_{r-1}(t)) \Delta^{k+r} \left\{\rho(t;0,q) t^{[k]}\right\} =$$

$$= \frac{(-1)^r (k+r)!}{k!(h_k^0(q))^{1/2}(1-q)^{-r}} \sum_{t \in \Omega_0} (d(t) - P_{r-1}(t)) \rho(t+r;-r,q) M_{k+r}^{-r}(t+r) =$$

$$= \frac{1}{(h_k^0(q))^{1/2}(1-q)^{-r}} \cdot \left(\frac{1-q}{q}\right)^r \sum_{t \in \Omega_0} (d(t) - P_{r-1}(t)) \rho(t+r;-r,q) M_k^r(t) (t+r)^{[r]} =$$

$$= \frac{1}{(h_k^0(q))^{1/2}} \sum_{t\in\Omega_0} \frac{d(t)-P_{r-1}(t)}{(t+r)^{[r]}} \rho(t;r,q) M_k^r(t) = \frac{1}{(h_k^0(q))^{1/2}} (h_k^r(q))^{1/2} \hat{d}_{r,k}^r.$$

В силу последнего равенства смешанный ряд (10) примет вид

$$d(x) = \sum_{\nu=0}^{r-1} \Delta^\nu d(-r) \frac{(x+r)^{[\nu]}}{\nu!} + (x+r)^{[r]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(h_k^r(q))^{1/2} \hat{d}_{r,k}^r}{(h_k^0(q))^{1/2}(k+1)_r} \frac{M_k^r(x,q)}{(h_k^0(q))^{1/2}} =$$

$$= P_{r-1}(x) + (x+r)^{[r]} \sum_{k=0}^{\infty} \hat{d}_{r,k}^r m_k^r(x),$$

который совпадает со специальным рядом (14).

4. РЯДЫ ФУРЬЕ ПО ПОЛИНОМАМ МЕЙКСНЕРА $M_k^{-r}(x+r)$, ОРТОГОНАЛЬНЫМ ПО СОБОЛЕВУ

Пусть $\mu(x) = q^x(1-q), 0<q<1$. Рассмотрим систему полиномов $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$, в которой

$$\varphi_{r,k}(x) = \frac{(x+r)^{[k]}}{k!}, \qquad 0 \leqslant k \leqslant r-1, \tag{15}$$

$$\varphi_{r,k}(x) = a_k M_k^{-r}(x+r), \qquad r \leqslant k, \tag{16}$$

где $a_k = \dfrac{q^{\frac{k+r}{2}}}{(1-q)^r}$.

Теорема 2. *Полиномы* $\varphi_{r,k}(x)$ $(k=0,1,\ldots)$*, определенные равенствами* (15) *и* (16)*, образуют полную в* $l_{2,\mu}(\Omega_r)$ *ортонормированную систему относительно скалярного произведения* (1).

Доказательство. Для полиномов $\varphi_{r,k}(x) = a_k M_k^{-r}(x+r)$ и $\varphi_{r,l}(x) = a_l M_l^{-r}(x+r)$, $k,l \geqslant r$, с учетом равенств (7), (5) и (4) имеем

$$\langle \varphi_{r,k}, \varphi_{r,l} \rangle = a_k a_l \sum_{\nu=0}^{r-1} \Delta^\nu M_k^{-r}(x+r) \Delta^\nu M_l^{-r}(x+r) \Big|_{x=-r} +$$

$$+ a_k a_l \sum_{x\in\Omega_r} \Delta^r M_k^{-r}(x+r) \Delta^r M_l^{-r}(x+r) \mu(x) =$$

$$= a_k a_l \left(\frac{q-1}{q}\right)^{2r} \sum_{x\in\Omega_r} M_{k-r}^0(x+r) M_{l-r}^0(x+r) q^x(1-q) =$$

$$= \delta_{kl}\ a_k^2\ h_{k-r}^0 \left(\frac{q-1}{q}\right)^{2r} = \delta_{kl}\ q^{-k+r} \left(\frac{q^{\frac{k+r}{2}}}{(1-q)^r}\right)^2 \left(\frac{q-1}{q}\right)^{2r} = \delta_{kl}.$$

Далее, легко заметить, что $\langle \varphi_{r,k}, \varphi_{r,l} \rangle = \delta_{kl}$ в случаях, когда $k,\ l \leqslant r-1$ и $k \leqslant r-1,\ l \geqslant r$. Это означает, что система полиномов $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$ ортонормирована в $l_{2,\mu}(\Omega_r)$ относительно скалярного произведения (1). Убедимся в ее полноте в $l_{2,\mu}(\Omega_r)$. Для этого покажем, что если для некоторой функции $d(x) \in l_{2,\mu}(\Omega_r)$ и для всех $k=0,1,\ldots$ справедливы равенства $\langle d, \varphi_{r,k} \rangle = 0$, то $d(x) \equiv 0$. Действительно, если $k \leqslant r-1$, то $\langle d, \varphi_{r,k} \rangle = \Delta^k d(-r)$. Учитывая, что $\langle d, \varphi_{r,k} \rangle = 0$ дискретный аналог формулы Тейлора для функции $d(x)$

$$d(x) = d(-r) + \frac{\Delta d(-r)}{1!}(x+r) + \ldots + \frac{\Delta^{r-1} d(-r)}{(r-1)!}(x+r)^{[r-1]} + \frac{1}{(r-1)!} \sum_{t=0}^{x-1} (x-1-t)^{[r-1]} \Delta^r d(t)$$

примет вид

$$d(x) = \frac{1}{(r-1)!} \sum_{t=0}^{x-1} (x-1-t)^{[r-1]} \Delta^r d(t). \tag{17}$$

При $k \geqslant r$ имеем

$$0 = \langle d, \varphi_{r,k} \rangle = a_k \sum_{x\in\Omega_r} \Delta^r d(x) \Delta^r M_k^{-r}(x+r)(1-q) q^x =$$

$$= a_k(1-q)\left(\frac{q-1}{q}\right)^r \sum_{x\in\Omega_r} \Delta^r d(x) M^0_{k-r}(x+r)q^x.$$

Из последнего равенства и из того, что полиномы $m^0_k(x+r) = (h^0_k(q))^{-\frac{1}{2}} M^0_k(x+r)$ $(k = 0,1,\ldots)$ образуют базис в $l_{2,\rho}(\Omega_r)$ следует, что $\Delta^r d(x) = 0$. Поэтому в силу (17) $d(x) \equiv 0$. $\square$

Пусть $d(x) \in l_{2,\mu}(\Omega_r)$. Тогда мы можем определить коэффициенты Фурье этой функции

$$\hat{d}_k = \langle d, \varphi_{r,k}\rangle = \Delta^k d(-r), \qquad 0 \leqslant k \leqslant r-1, \tag{18}$$

$$\hat{d}_k = \langle d, \varphi_{r,k}\rangle = a_k \sum_{t\in\Omega_r} \Delta^r d(t) \Delta^r M^{-r}_k(t+r)(1-q)q^t, \qquad k \geqslant r \tag{19}$$

и рассмотреть ее ряд Фурье

$$d(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \hat{d}_k \varphi_{r,k}(x) = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\Delta^k d(-r)}{k!}(x+r)^{[k]} + \sum_{k=r}^{\infty} \hat{d}_k a_k M^{-r}_k(x+r). \tag{20}$$

С другой стороны, из (19) и (8) с учетом (5) имеем

$$\hat{d}_k = a_k \left(\frac{q-1}{q}\right)^r \sum_{t\in\Omega_r} \Delta^r d(t) M^0_{k-r}(t+r)(1-q)q^t =$$

$$= a_k \left(\frac{q-1}{q}\right)^r (h^0_{k-r}(q))^{1/2} \sum_{t\in\Omega_r} \Delta^r d(t) m^0_{k-r}(t+r)(1-q)q^t = (-1)^r d^0_{r,k-r}. \tag{21}$$

Из (20) и (21), учитывая (7), получаем

$$d(x) \sim \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\Delta^k d(-r)}{k!}(x+r)^{[k]} + (-1)^r \sum_{k=r}^{\infty} d^0_{r,k-r} a_k M^{-r}_k(x+r) =$$

$$= \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\Delta^k d(-r)}{k!}(x+r)^{[k]} + \frac{(-1)^r q^r}{(1-q)^r} \sum_{k=0}^{\infty} q^{\frac{k}{2}} d^0_{r,k} M^{-r}_{k+r}(x+r) =$$

$$= \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\Delta^k d(-r)}{k!}(x+r)^{[k]} + (x+r)^{[r]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^0_{r,k} M^r_k(x)}{(k+1)_r (h^0_k(q))^{1/2}}. \tag{22}$$

Сравнивая ряды (10) и (22), заключаем, что смешанный ряд по полиномам Мейкснера $M^0_k(x)$ совпадает с рядом Фурье по системе полиномов $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$, ортонормированной относительно скалярного произведения (1). Это позволяет использовать при исследовании аппроксимативных свойств ряда (20) методы, разработанные в работах [8, 13] при решении аналогичной задачи для смешанных рядов по полиномам Мейкснера.

Автор искренне благодарит И. И. Шарапудинова за плодотворные беседы, результатом которых явилась настоящая работа.

Библиографический список

1. *Area I., Godoy E., Marcellán F.* Inner products involving differences : the Meixner – Sobolev polynomials // J. Differ. Equ. Appl. 2000. Vol. 6, iss. 1. P. 1–31.
2. *Marcellan F., Xu Y.* On Sobolev orthogonal polynomials // Expositiones Mathematicae. 2015. Vol. 33, iss. 3. P. 308–352. DOI: 10.1016/j.exmath.2014.10.002.
3. *Perez T. E., Piñar M. A., Xu Y.* Weighted Sobolev orthogonal polynomials on the unit ball // J. Approx. Theory. 2013. Vol. 171. P. 84–104. DOI : 10.1016/j.jat.2013.03.004.
4. *Delgado A. M., Fernandez L., Lubinsky D. S., Perez T. E., Piñar M. A.* Sobolev orthogonal polynomials on the unit ball via outward normal derivatives // J. Math. Anal. Appl. 2016. Vol. 440, iss. 2. P. 716–740. DOI: 10.1016/j.jmaa.2016.03.041.
5. *Fernández L., Marcellán F., Pérez T. E., Pinar M. A., Xu Y.* Sobolev orthogonal polynomials on product domains // J. Comput. Appl. Math. 2015. Vol. 284. P. 202–215. DOI: 10.1016/j.cam.2014.09.015.
6. *López G., Marcellán F., Van Assche W.* Relative asymptotics for polynomials orthogonal with re-

spect to a discrete Sobolev inner-product // Constr. Approx. 1995. Vol. 11, iss. 1. P. 107–137. DOI: 10.1007/BF01294341

7. *Гончар А. А.* О сходимости аппроксимаций Паде для некоторых классов мероморфных функций // Матем. сб. 1975. Т. 97(139), № 4(8). С. 607–629.
8. *Шарапудинов И. И.* Аппроксимативные свойства операторов $Y_{n+2r}(f)$ и их дискретных аналогов // Матем. заметки. 2002. Т. 72, вып. 5. С. 765–795. DOI: 10.4213/mzm466.
9. *Шарапудинов И. И.* Смешанные ряды по ортогональным полиномам. Теория и приложения. Махачкала : Дагестан. науч. центр РАН, 2004. 276 с.
10. *Шарапудинов И. И.* Смешанные ряды по полиномам Чебышева, ортогональным на равномерной сетке // Матем. заметки. 2005. Т. 78, вып. 3. С. 442–465. DOI: 10.4213/mzm2599.
11. *Шарапудинов И. И.* Аппроксимативные свойства смешанных рядов по полиномам Лежандра на классах W^r // Матем. сб. 2006. Т. 197, № 3. С. 135–154. DOI: 10.4213/sm1539
12. *Шарапудинов И. И.* Аппроксимативные свойства средних типа Валле – Пуссена частичных сумм смешанных рядов по полиномам Лежандра // Матем. заметки. 2008. Т. 84, вып. 3. С. 452–471. DOI: 10.4213/mzm5541.
13. *Гаджиева З. Д.* Смешанные ряды по полиномам Мейкснера : дис. ... канд. физ.-мат. наук / Сарат. гос. ун-т. Саратов, 2004. 103 с.
14. *Шарапудинов И. И.* Специальные (смешанные) ряды по классическим полинома Лагерра и некоторые их приложения // Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования : тез. докл. XII Междунар. науч. конф. (с. Цей, 12–18 июля 2015 г.) / ЮМИ ВНЦ РАН. Владикавказ, 2015. С. 48–49.

Образец для цитирования:
Гаджимирзаев Р. М. Ряды Фурье по полиномам Мейкснера, ортогональным по Соболеву // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 4. С. 388–395. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-388-395.

The Fourier Series of the Meixner Polynomials Orthogonal with Respect to the Sobolev-type Inner Product

R. M. Gadzhimirzaev

Ramis M. Gadzhimirzaev, Dagestan Scientific Center RAS, 45, M. Gadzhieva str., 367032, Makhachkala, Russia, ramis3004@gmail.com

In this paper we consider the system of discrete functions $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$, which is orthonormal with respect to the Sobolev-type inner product

$$\langle f,g\rangle=\sum_{\nu=0}^{r-1}\Delta^{\nu}f(-r)\Delta^{\nu}g(-r)+\sum_{t\in\Omega_r}\Delta^{r}f(t)\Delta^{r}g(t)\mu(t),$$

where $\mu(t)=q^t(1-q), 0<q<1$. It is shown that the shifted classical Meixner polynomials $\left\{M_k^{-r}(x+r)\right\}_{k=r}^{\infty}$ together with functions $\left\{\frac{(x+r)^{[k]}}{k!}\right\}_{k=0}^{r-1}$ form a complete orthogonal system in the space $l_{2,\mu}(\Omega_r)$ with respect to the Sobolev-type inner product. It is shown that the Fourier series on Meixner polynomials $\left\{a_kM_k^{-r}(x+r)\right\}_{k=r}^{\infty}$ (a_k— normalizing factors), orthonormal in terms of Sobolev, is a special case of mixed series on Meixner polynomials. Some new special series on Meixner orthogonal polynomials $M_k^{\alpha}(x)$ with $\alpha>-1$ are considered. In the case when $\alpha=r$ these special series coincide with mixed series on Meixner polynomials $M_k^{0}(x)$ and Fourier series on the system $\left\{a_kM_k^{-r}(x+r)\right\}_{k=r}^{\infty}$ orthonormal with respect to the Sobolev-type inner product.

Key words: Meixner polynomials, mixed series, special series, Sobolev-type inner product, Sobolev orthogonal polynomials.

References

1. Area I., Godoy E., Marcellán F. Inner products involving differences : the Meixner – Sobolev polynomials. *J. Differ. Equ. Appl.*, 2000, vol. 6, iss. 1, pp. 1–31.
2. Marcellan F., Xu Y. On Sobolev orthogonal polynomials. *Expositiones Mathematicae*, 2015, vol. 33, iss. 3, pp. 308–352. DOI: 10.1016/j.exmath.2014.10.002.
3. Perez T. E. , Piñar M. A. , Xu Y. Weighted Sobolev orthogonal polynomials on the unit ball. *J. Approx. Theory*, 2013, vol. 171, pp. 84–104. DOI : 10.1016/j.jat.2013.03.004.
4. Delgado A. M., Fernandez L., Lubinsky D. S., Perez T. E., Piñar M. A. Sobolev orthogonal polynomials on the unit ball via outward normal derivatives. *J. Math. Anal. Appl.*, 2016, vol. 440, iss. 2, pp. 716–740. DOI: 10.1016/j.jmaa.2016.03.041.
5. Fernández L., Marcellán F., Pérez T. E., Pinar M. A., Xu Y. Sobolev orthogonal polynomials on product domains. *J. Comput. Appl.*

Math., 2015, vol. 284, pp. 202–215. DOI: 10.1016/j.cam.2014.09.015.
6. López G., Marcellán F., Van Assche W. Relative asymptotics for polynomials orthogonal with respect to a discrete Sobolev inner-product. *Constr. Approx.*, 1995, vol. 11, iss. 1, pp. 107–137. DOI: 10.1007/BF01294341
7. Gonchar A. A. On convergence of Padé approximants for some classes of meromorphic functions. *Math. USSR-Sb.*, 1975, vol. 26, iss. 4, pp. 555–575. DOI: 10.1070/SM1975v026n04ABEH002494.
8. Sharapudinov I. I. Approximation properties of the operators $Y_{n+2r}(f)$ and of their discrete analogs. *Math. Notes*, 2002, vol. 72, iss. 5, pp. 705–732. DOI: 10.1023/A:1021421425474.
9. Sharapudinov I. I. *Smeshannye rjady po ortogonal'nym polinomam. Teorija i prilozhenija* [Mixed series of orthogonal polynomials. Theory and Applications]. Makhachkala, Dagestan Scientific Center RAS, 2004. 276 p. (in Russian).
10. Sharapudinov I. I. Mixed series of Chebyshev polynomials orthogonal on a uniform grid. *Math. Notes*, 2005, vol. 78, iss. 3, pp. 403–423. DOI: 10.1007/s11006-005-0139-3.
11. Sharapudinov I. I. Approximation properties of mixed series in terms of Legendre polynomials on the classes W^r. *Sb. Math.*, 2006, vol. 197, no. 3, pp. 433–452. DOI: 10.1070/SM2006v197n03ABEH003765.
12. Sharapudinov I. I. Approximation properties of the Valle – Poussin means of partial sums of a mixed series of Legendre polynomials. *Math. Notes*, 2008, vol. 84, iss. 3–4, pp. 417–434. DOI: 10.1134/S0001434608090125.
13. Gadzhieva Z. D. *Smeshannye riady po polinomam Meiksnera* : Diss. ... kand. fiz.-mat. nauk [Mixed series of Meixner polynomials : Diss. phys. and math. sci.]. Saratov State Univ., Saratov, 2004. 103 p. (in Russian).
14. Sharapudinov I. I. Special (mixed) series of the classical Laguerre polynomials and some of their applications. *Poriadkovyi analiz i smezhnye voprosy matematicheskogo modelirovaniia : tez. dokl. XII Mezhdunar. nauch. konf.* [Sequential analysis and related questions of mathematical modeling: Book of Abstracts of the XII Intern. Sci. Conf.] (village Tsey, 12–18 July 2015). Vladikavkaz, UMI VSC RAS, pp. 48–49 (in Russian).

Please cite this article in press as:
Gadzhimirzaev R. M. The Fourier Series of the Meixner Polynomials Orthogonal with Respect to the Sobolev-type Inner Product. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 4, pp. 388–395 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-388-395.

УДК 517.19

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОДНОГО КЛАССА РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ С РАСТУЩИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Г. В. Гаркавенко[1], Н. Б. Ускова[2]

[1]Гаркавенко Галина Валериевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информатики и методики преподавания математики, Воронежский государственный педагогический университет, g.garkavenko@mail.ru
[2]Ускова Наталья Борисовна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и физико-математического моделирования, Воронежский государственный технический университет, nat-uskova@mail.ru

В работе метод подобных операторов применяется для спектрального анализа разностного замкнутого оператора вида $(\mathscr{A}x)(n) = x(n+1) + x(n-1) - 2x(n) + a(n)x(n), n \in \mathbb{Z}$, рассматриваемого в гильбертовом пространстве $l_2(\mathbb{Z})$ двусторонних последовательностей комплексных чисел с растущим потенциалом $a : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$. Получены асимптотики собственных значений, собственных векторов, оценки равносходимости спектральных разложений для исследуемого оператора и оператора умножения на последовательность $a : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$. Для исследования рассматриваемого оператора он представляется в виде $A - B$, где $(Ax)(n) = a(n)x(n), n \in \mathbb{Z}, x \in l_2(\mathbb{Z})$ с естественной областью определения. Этот оператор является нормальным с известными спектральными свойствами и выступает в качестве невозмущенного оператора в методе подобных операторов. В качестве возмущения выступает ограниченный оператор $(Bx)(n) = -x(n+1) - x(n-1) + 2x(n), n \in \mathbb{Z}, x \in l_2(\mathbb{Z})$.

Ключевые слова: метод подобных операторов, спектр, разностный оператор, спектральные проекторы.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-395-402