Math., 2015, vol. 284, pp. 202–215. DOI: 10.1016/j.cam.2014.09.015.
6. López G., Marcellán F., Van Assche W. Relative asymptotics for polynomials orthogonal with respect to a discrete Sobolev inner-product. *Constr. Approx.*, 1995, vol. 11, iss. 1, pp. 107–137. DOI: 10.1007/BF01294341
7. Gonchar A. A. On convergence of Padé approximants for some classes of meromorphic functions. *Math. USSR-Sb.*, 1975, vol. 26, iss. 4, pp. 555–575. DOI: 10.1070/SM1975v026n04ABEH002494.
8. Sharapudinov I. I. Approximation properties of the operators $Y_{n+2r}(f)$ and of their discrete analogs. *Math. Notes*, 2002, vol. 72, iss. 5, pp. 705–732. DOI: 10.1023/A:1021421425474.
9. Sharapudinov I. I. *Smeshannye rjady po ortogonal'nym polinomam. Teorija i prilozhenija* [Mixed series of orthogonal polynomials. Theory and Applications]. Makhachkala, Dagestan Scientific Center RAS, 2004. 276 p. (in Russian).
10. Sharapudinov I. I. Mixed series of Chebyshev polynomials orthogonal on a uniform grid. *Math. Notes*, 2005, vol. 78, iss. 3, pp. 403–423. DOI: 10.1007/s11006-005-0139-3.
11. Sharapudinov I. I. Approximation properties of mixed series in terms of Legendre polynomials on the classes W^r. *Sb. Math.*, 2006, vol. 197, no. 3, pp. 433–452. DOI: 10.1070/SM2006v197n03ABEH003765.
12. Sharapudinov I. I. Approximation properties of the Valle – Poussin means of partial sums of a mixed series of Legendre polynomials. *Math. Notes*, 2008, vol. 84, iss. 3–4, pp. 417–434. DOI: 10.1134/S0001434608090125.
13. Gadzhieva Z. D. *Smeshannye riady po polinomam Meiksnera* : Diss. ... kand. fiz.-mat. nauk [Mixed series of Meixner polynomials : Diss. phys. and math. sci.]. Saratov State Univ., Saratov, 2004. 103 p. (in Russian).
14. Sharapudinov I. I. Special (mixed) series of the classical Laguerre polynomials and some of their applications. *Poriadkovyi analiz i smezhnye voprosy matematicheskogo modelirovaniia : tez. dokl. XII Mezhdunar. nauch. konf.* [Sequential analysis and related questions of mathematical modeling: Book of Abstracts of the XII Intern. Sci. Conf.] (village Tsey, 12–18 July 2015). Vladikavkaz, UMI VSC RAS, pp. 48–49 (in Russian).

Please cite this article in press as:
Gadzhimirzaev R. M. The Fourier Series of the Meixner Polynomials Orthogonal with Respect to the Sobolev-type Inner Product. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 4, pp. 388–395 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-388-395.

УДК 517.19

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОДНОГО КЛАССА РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ С РАСТУЩИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Г. В. Гаркавенко[1], Н. Б. Ускова[2]

[1]Гаркавенко Галина Валериевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информатики и методики преподавания математики, Воронежский государственный педагогический университет, g.garkavenko@mail.ru
[2]Ускова Наталья Борисовна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и физико-математического моделирования, Воронежский государственный технический университет, nat-uskova@mail.ru

В работе метод подобных операторов применяется для спектрального анализа разностного замкнутого оператора вида $(\mathscr{A}x)(n) = x(n+1) + x(n-1) - 2x(n) + a(n)x(n), n \in \mathbb{Z}$, рассматриваемого в гильбертовом пространстве $l_2(\mathbb{Z})$ двусторонних последовательностей комплексных чисел с растущим потенциалом $a : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$. Получены асимптотики собственных значений, собственных векторов, оценки равносходимости спектральных разложений для исследуемого оператора и оператора умножения на последовательность $a : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$. Для исследования рассматриваемого оператора он представляется в виде $A - B$, где $(Ax)(n) = a(n)x(n), n \in \mathbb{Z}, x \in l_2(\mathbb{Z})$ с естественной областью определения. Этот оператор является нормальным с известными спектральными свойствами и выступает в качестве невозмущенного оператора в методе подобных операторов. В качестве возмущения выступает ограниченный оператор $(Bx)(n) = -x(n+1) - x(n-1) + 2x(n), n \in \mathbb{Z}, x \in l_2(\mathbb{Z})$.

Ключевые слова: метод подобных операторов, спектр, разностный оператор, спектральные проекторы.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-395-402

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим гильбертово пространство двусторонних комплексных последовательностей $l_2(\mathbb{Z})$ со скалярным произведением $(x,y)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\overline{y(n)}$, где $x,y\in l_2(\mathbb{Z})$, $x:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$, $y:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$, и нормой $\|x\|=\left(\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2\right)^{1/2}$, порождённой этим скалярным произведением. В пространстве $l_2(\mathbb{Z})$ зададим линейный замкнутый оператор $A:D(A)\subset l_2(\mathbb{Z})\to l_2(\mathbb{Z})$ формулой

$$(Ax)(n)=a(n)x(n),\qquad n\in\mathbb{Z},\qquad x\in D(A) \tag{1}$$

с областью определения $D(A)\subset l_2(\mathbb{Z})$ вида

$$D(A)=\left\{x\in l_2(\mathbb{Z}):\sum_{n\in\mathbb{Z}}|a(n)|^2|x(n)|^2<\infty\right\},$$

где $a:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ — последовательность, обладающая свойствами:

1) $a(i)\neq a(j)$ при $i\neq j$, $i,j\in\mathbb{Z}$;

2) $\lim\limits_{|n|\to\infty}|a(n)|=\infty$;

3) $0<d_i=\inf_{i\neq j}|a(i)-a(j)|\to\infty$, $|i|\to\infty$.

Символом $\rho(A)$ обозначим резольвентное множество оператора A, а символом $\sigma(A)$ — его спектр. Из условий на последовательность $a:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ следует, что $\sigma(A)=\{a(n),\ n\in\mathbb{Z}\}$, т.е. спектр оператора A состоит из простых изолированных собственных значений. Если число λ_0 не совпадает ни с одним $a(n)$, то $\lambda_0\in\rho(A)$, и оператор $(A-\lambda_0 I)^{-1}:l_2(\mathbb{Z})\to l_2(\mathbb{Z})$ действует по формуле $((A-\lambda_0 I)^{-1}x)(n)=((a(n)-\lambda_0)^{-1}x)(n)$, $n\in\mathbb{Z}$. Такой оператор является нормальным компактным оператором. Поэтому оператор A также является нормальным оператором.

Рассмотрим самосопряженный ограниченный оператор $B:l_2(\mathbb{Z})\to l_2(\mathbb{Z})$ вида

$$(Bx)(n)=-2x(n)+x(n+1)+x(n-1),\qquad n\in\mathbb{Z},\qquad x\in l_2(\mathbb{Z}). \tag{2}$$

Рассматриваемый класс разностных операторов и их матриц соответствует уравнениям Штурма – Лиувилля при их дискретизации [1].

Основные результаты статьи содержатся в следующих теоремах.

Теорема 1. *Существует такое целое число $k\geqslant 0$, что спектр $\sigma(A-B)$ оператора $A-B$ представим в виде*

$$\sigma(A-B)=\sigma_{(k)}\cup(\cup_{|i|>k}\sigma_i), \tag{3}$$

где $\sigma_{(k)}$ содержит не более чем $2k+1$ собственных значений, $\sigma_i=\{\mu_i\}$, $|i|>k$ — одноточечные множества, и имеют место следующие асимптотические формулы:

$$\mu_i=a(i)+2+O(d_i^{-1}), \tag{4}$$

$$\mu_i=a(i)+2-\frac{a(i+1)-2a(i)+a(i-1)}{(a(i+1)-a(i))(a(i-1)-a(i))}+O(d_i^{-2}),\qquad |i|>k. \tag{5}$$

Соответствующие собственные векторы $\tilde{e}_i$, $|i|>k$, образуют базис Рисса в $l_2(\mathbb{Z})$ и допускают асимптотическую оценку

$$\|\tilde{e}_i-\tilde{y}_i\|\leqslant Cd_i^{-2},$$

где

$$\tilde{y}_i(j)=\begin{cases}1, & i=j,\\ (a(i\pm1)-a(i))^{-1}, & j=i\pm1,\\ 0, & \text{в остальных случаях},\end{cases}$$

$C>0$ — некоторая константа.

Обозначим символом P_n, $n\in\mathbb{Z}$, проектор Рисса, построенный по спектральному множеству $\{a(n)\}$, $n\in\mathbb{Z}$, оператора A, т.е. $P_n=P(\{a(n)\},A)$, а символом $\tilde{P}_n$, $n\in\mathbb{Z}$, проектор $\tilde{P}_n=P(\{\mu_n\},A-B)$. Здесь числа $\mu_n,|n|\geqslant k$, определяются формулами (4) или (5).

Теорема 2. *Для спектральных проекторов $\tilde{P}_i$, $|i| > k$ имеют место оценки*

$$\|\tilde{P}_i - P_i\| = O(d_i^{-1}), \qquad |i| > k, \tag{6}$$

$$\|\sum_{i\geqslant m}^{N} \tilde{P}_i - \sum_{i\geqslant m}^{N} P_i\| = O(d_i^{-1}), \tag{7}$$

где $m > k$, $N > m$, $N \in \mathbb{N}$. Имеют место следующие оценки равносходимости спектральных разложений:

$$\|P(\sigma_{(k)}, A - B) + \sum_{|i|\geqslant k}^{l} \tilde{P}_i - \sum_{i=-l}^{l} P_i\| = O(d_l^{-1}), \tag{8}$$

где $l > k$ и множество $\sigma_{(k)}$ определено в теореме 1.

Исследовать оператор $A - B$ будем методом подобных операторов, который и изложим в адаптированном для рассматриваемого случая виде. Отметим, что для анализа спектральных свойств операторов, близких к оператору $A - B$, метод подобных операторов ранее не применялся.

1. О МЕТОДЕ ПОДОБНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Метод подобных операторов берёт начало из работ А. Пуанкаре, А. А. Ляпунова, Н. М. Крылова, Н. Н. Боголюбова, К. Фридрихса, Р. Тернера и окончательно оформляется в работах А. Г. Баскакова [2–5]. Мы будем придерживаться идеологии и методологии работы [5]. Обычно метод подобных операторов применяется для получения спектральных характеристик дифференциальных операторов (см. например [6–11]).

Линейные операторы, действующие в пространстве операторов, будем согласно терминологии М. Г. Крейна называть трансформаторами. Наиболее важным понятием метода подобных операторов является понятие допустимой тройки.

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство и $End\,H$ — банахова алгебра ограниченных линейных операторов, действующих в H.

Определение 1 (см. [5]). Пусть $J : End\,H \to End\,H$, $\Gamma : End\,H \to End\,H$ — трансформаторы. Тройку $(End\,H, J, \Gamma)$ назовём *допустимой для невозмущенного оператора A*, а $End\,H$ — *допустимым пространством возмущений*, если

1) J и Γ — непрерывные трансформаторы, причём J — проектор;

2) $(\Gamma X)(D(A)) \subset D(A)$, при этом

$$A\Gamma X - \Gamma X A = X - JX, \qquad X \in End\,H \tag{9}$$

и $Y = \Gamma X \in End\,H$ — единственное решение уравнения $AY - YA = X - JX$, удовлетворяющее условию $JY = 0$;

3) существует постоянная $\gamma > 0$ такая, что $\|\Gamma\| \leqslant \gamma$, $\max\{\|X\Gamma Y\|, \|\Gamma XY\|\} \leqslant \gamma\|X\|\|Y\|$;

4) для любого $X \in End\,H$ и $\epsilon > 0$ существует $\lambda_\epsilon \in \rho(A)$ такое, что $\|X(A - \lambda_\epsilon I)^{-1}\| < \epsilon$.

Теорема 3 (см. [5]). *Пусть $(End\,H, J, \Gamma)$ — допустимая тройка для оператора $A : D(A) \subset H \to$ $\to H$ и B — некоторый оператор из $End\,H$. Тогда если $\gamma\|B\| < 1/4$, то оператор $A - B$ подобен оператору $A - JX_*$, где оператор $X_* \in End\,H$ является решением нелинейного операторного уравнения*

$$X = B\Gamma X - (\Gamma X)(JB) - (\Gamma X)J(B\Gamma X) + B. \tag{10}$$

Решение X_* может быть найдено методом простых итераций $X_0 = 0$, $X_1 = B, \ldots$. (Оператор Φ: $End\,H \to End\,H$, определённый правой частью равенства (10)*, является сжимающим в шаре $\{X \in End\,H : \ \|X - B\| < 3\|B\|\}$). Преобразование подобия оператора $A - B$ в оператор $A - JX_*$ осуществляет оператор $I + \Gamma X_* \in End\,H$.*

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПОДОБИЯ ИСХОДНОГО ОПЕРАТОРА

В этом параграфе символом H будет обозначаться гильбертово пространство $l_2(\mathbb{Z})$. Отметим, что в дальнейшем удобно будет пользоваться матричным представлением операторов A и B, определённых формулами (1) и (2) соответственно.

Собственными векторами оператора A являются базисные векторы e_n, $n \in \mathbb{Z}$, а соответствующие спектральные проекторы задаются формулой $P_n x = (x, e_n)e_n$.

Представим оператор $A - B$ в виде $A - B = \tilde{A} - \tilde{B}$, где $(\tilde{A}x)(n) = a(n)x(n) + 2x(n)$, $(\tilde{B}x)(n) = x(n-1) + x(n+1)$. Очевидно, что $D(A) = D(\tilde{A})$. Тогда $\sigma(\tilde{A}) = \{a(n) + 2, n \in \mathbb{Z}\}$, собственные векторы и спектральные проекторы у оператора $\tilde{A}$ те же, что и у оператора A. $\tilde{B} \in End\, H$, $\|\tilde{B}\| = 2$, и главная диагональ у матрицы оператора $\tilde{B}$ нулевая.

Перейдём к определению трансформаторов $J : End\, H \to End\, H$ и $\Gamma : End\, H \to End\, H$. Положим

$$JX = \sum_{n \in \mathbb{Z}} P_n X P_n, \qquad X \in End\, H.$$

Очевидно, что трансформатор J диагонализует матрицу оператора X и $J\tilde{B} = 0$ в силу определения оператора $\tilde{B}$.

Перепишем равенство (9) для матричных элементов матрицы $Y = (y_{lm})$, где $Y = \Gamma X$:

$$a(l)y_{lm} - y_{lm}a(m) = x_{lm}, \qquad l \neq m,$$

откуда

$$y_{lm} = \frac{x_{lm}}{a(l) - a(m)} \tag{11}$$

и $y_{ll} = 0$, $l \in \mathbb{Z}$. Так как $a(l) \neq a(m)$ при $l \neq m$, то формула (11) корректна. Таким образом, матричные элементы оператора $Y = \Gamma X$ определены. При этом $Y \in End\, H$ и

$$\|Y\| = \sum_p \|Y_p\| \leqslant c(\min_{i \neq j} |a(i) - a(j)|)^{-1} \sum_p \|X_p\| = c(\min_{i \neq j} |a(i) - a(j)|)^{-1} \|X\|.$$

Здесь для вычисления нормы оператора ΓX используется оценка нормы оператора, обратного к оператору коммутирования. Эта оценка является следствием более общих оценок, приводимых в [2, теорема 1.3]. В случае если A — самосопряженный оператор, $c = \pi/2$ [2, теорема 1.3, а]. В случае если A — нормальный оператор, точное значение константы c неизвестно, известны лишь её оценки: $c < 5$ [2, теорема 1.3, б]. Так как мы далее получаем асимптотические оценки, то в дальнейшем изложении эти оценки не используются.

Пусть $Q_k = \sum\limits_{|i| \leqslant k} P_i$. Наряду с трансформаторами J и Γ рассмотрим семейство трансформаторов J_k и Γ_k, $k \geqslant 0$, задаваемых формулами

$$J_k X = \sum_{|i| > k} P_i X P_i + Q_k X Q_k, \tag{12}$$

$$\Gamma_k X = \Gamma X - \Gamma(Q_k X Q_k) = \Gamma X - Q_k(\Gamma X)Q_k. \tag{13}$$

Ясно, что $J_0 X = JX$, $\Gamma_0 X = \Gamma X$.

Замечание 1. Из формул (11)–(13) следует, что операторы J, Γ и J_k, Γ_k не изменятся, если вместо оператора $\tilde{A}$ рассматривать оператор $\tilde{A} - \lambda_0 I$, где $\lambda_0 \in \rho(\tilde{A})$. Отметим, что $D(\tilde{A}) = D(\tilde{A} - \lambda_0 I)$.

Лемма 1. *Тройка $(End\, l_2(\mathbb{Z}), J_k, \Gamma_k)$ является допустимой для оператора $\tilde{A}$ тройкой при любом $k \geqslant 0$.*

Доказательство. Выполнение условия 1) и равенства (9) определения 1 вытекает непосредственно из построения операторов $J_k : End\, H \to End\, H$ и $\Gamma_k : End\, H \to End\, H$, $k \geqslant 0$.

Проверим выполнение условия $(\Gamma X)(D(\tilde{A})) \subset D(\tilde{A})$, для этого нам потребуется семейство проекторов $Q_n = \sum\limits_{|i| \leqslant n} P_i$, где $n > k, n \to \infty$. Возьмем $x \in l_2(\mathbb{Z})$. В случае когда $\tilde{A}$ является обратимым оператором, имеем $\tilde{A}^{-1}x \in D(\tilde{A})$. Пусть $x_0 = \Gamma_k X \tilde{A}^{-1}x$, покажем, что $x_0 \in D(\tilde{A})$. Рассмотрим семейство операторов $\tilde{A}(Q_n \Gamma_k X)\tilde{A}^{-1}, k \geqslant 0$, и представим их на векторе $x \in l_2(\mathbb{Z})$ в виде $y_n = \tilde{A}(Q_n\Gamma_k X)\tilde{A}^{-1}x = Q_n\Gamma_k Xx + Q_n(X - J_kX)\tilde{A}^{-1}x$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} Q_n\Gamma_k Xx = \Gamma_k Xx$, $\lim\limits_{n\to\infty} Q_n(X - J_kX)\tilde{A}^{-1}x = (X - J_kX)\tilde{A}^{-1}x$, то $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \tilde{A}(\Gamma_k X)\tilde{A}^{-1}x = y_0, y_0 \in l_2(\mathbb{Z})$. Тогда в силу замкнутости оператора $\tilde{A}$ имеем $x_0 \in D(\tilde{A})$ и $\tilde{A}x_0 = y_0$.

Если же оператор $\tilde{A}$ необратим, то при доказательстве вместо $\tilde{A}$ рассмотрим оператор $\tilde{A} - \lambda_0 I$, $\lambda_0 \in \rho(\tilde{A})$, и учтем замечание 1.

Перейдем к условию 3) определения 1.

Элементы матрицы оператора $\Gamma_k X$ также определяются формулой (11) при $\max\{l, m\} > k$ и $y_{lm} = 0$, в противном случае, или при $l = m$, что следует из формулы (13) (т. е. у матрицы оператора $\Gamma_k X$ нулевая главная диагональ и центральный блок размера $2k+1$).

Для получения оценок на норму оператора Γ_k снова обратимся к работе [2] и рассмотрим оператор $ad_A Y = AY - YA$, $Y \in End\, H$. Представим пространство $End\, H$ как прямую сумму подпространств $End\, H = \mathrm{Im}\, J_k \oplus \mathrm{Ker}\, J_k$ и $ad_A|_{\mathrm{Im}\, J_k} = 0$, обозначим $ad_A|_{\mathrm{Ker}\, J_k} = A_k$. Тогда опять же из [2] получаем, что $\Gamma_k X = A_k^{-1}$, и так как $\sigma(A_k) = \{\lambda_i - \lambda_j\}$, где $i > k$ или (и) $j > k$, то $\|\Gamma_k\| = \|A_k^{-1}\| \leqslant \dfrac{c}{d_k}$.

Так как $X\Gamma_k Y \in End\, H$, $\|(\Gamma_k X)Y\| \leqslant \|\Gamma_k\|\|X\|\|Y\| = \gamma_k\|X\|\|Y\|$, $\|X(\Gamma_k Y)\| \leqslant \|\Gamma_k\|\|X\|\|Y\| = \gamma_k\|X\|\|Y\|$, то условие 3) определения 1 выполнено.

Условие 4) выполняется ввиду того что величину $\|(\tilde{A} - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\|$ можно сделать малой за счёт подходящего выбора числа $\lambda_\varepsilon \in \rho(\tilde{A})$. А именно λ_ε берём такое, что $\rho(\lambda_\varepsilon, \sigma(\tilde{A})) \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon\|X\|}$. Здесь через $\rho(\lambda_\varepsilon, \sigma(\tilde{A}))$ обозначено расстояние от точки λ_ε до спектра оператора $\tilde{A}$. □

Теорема 4. *Существует такое $k \geqslant 0$, что оператор $\tilde{A} - \tilde{B}$ подобен оператору блочно-диагонального вида $\tilde{A} - J_kX_*$, т. е.*

$$(\tilde{A} - \tilde{B})(I + \Gamma_k X_*) = (I + \Gamma_k X_*)(\tilde{A} - J_kX_*),$$

где оператор X_* есть решение уравнения (9) *с Γ_k и J_k и возмущением $\tilde{B}$.*

Так как по условию $d_n \to \infty$ при $n \to \infty$, то теорема 4 вытекает из леммы 1 и теоремы 3.

Замечание 2. Оператор $\tilde{B}$ таков, что $J\tilde{B} = 0$, $J_k\tilde{B} \neq 0$. Матрица оператора $\tilde{B}\Gamma\tilde{B}$ имеет пятидиагональную структуру, у неё являются ненулевыми -2, 0, 2 диагонали, остальные диагонали равны нулю. Кроме того, непосредственно из определения операторов J_k и Γ_k следует, что $J_k((\Gamma_k X_*)J_k\tilde{B}) = 0$ и $J_k((\Gamma_k X_*)J_k(\tilde{B}\Gamma_k X_*)) = 0$.

Если $X = (x_{ij})$, то элементами матрицы оператора $\tilde{B}\Gamma X = Z$ являются числа (при $j \neq i \pm 1$)

$$z_{ij} = \frac{x_{(i-1)j}}{a(i-1) - a(j)} + \frac{x_{(i+1)j}}{a(i+1) - a(j)},$$

а оператор $\tilde{B}\Gamma_k X_*$ отличается от $\tilde{B}\Gamma X_*$ на оператор конечного ранга. Поэтому

$$|z_{ij}| = cd_j^{-1}, \qquad |z_{ii}| = cd_i^{-1}, \qquad |i|, |j| > k, \qquad j \neq i \pm 1.$$

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Доказательство теоремы 1. Из подобия операторов $A - B$ и $\tilde{A} - J_kX_*$ следует, что спектр оператора $A - B$ (и $\tilde{A} - J_kX_*$) допускает представление (3), где $\sigma_i = \sigma(A_i)$ и $A_i = (a(i) + 2)I - P_iX_*|_{H_i}$, $|i| > k$, $H_i = \mathrm{Im}\, P_i$. Таким образом, для асимптотической оценки собственных значений оператора $\tilde{A} - \tilde{B}$ нам нужен оператор $P_iX_*|_{H_i}$, но нам известен не сам оператор X_*, а последовательные приближения к нему, причём первым приближением является оператор $\tilde{B}$. Второе приближение имеет вид $\tilde{B}\Gamma_k\tilde{B} - \Gamma_k\tilde{B}J_k\tilde{B} - \Gamma_k\tilde{B}J_k(\tilde{B}\Gamma_k\tilde{B})$ (и так далее).

Представим оператор $P_iX_*|_{H_i}$ в виде $(P_i\tilde{B} + P_i(X_* - \tilde{B}))|_{H_i}$, при этом $P_i\tilde{B}|_{H_i} = 0$, $|i| > k$. Из уравнения (10) следует, что

$$X_* - \tilde{B} = \tilde{B}\Gamma_k X_* - (\Gamma_k X_*)J_k(\tilde{B}\Gamma_k X_*),$$

при этом $P_i(X_* - \tilde{B})|_{H_i} = P_i(\tilde{B}\Gamma_k X_*)|_{H_i}$. Здесь учтено замечание 2, следовательно,

$$\|P_i(\tilde{B}\Gamma_k X_*)|_{H_i}\| = \left\| \sum_l \tilde{B}_{il}(\Gamma_k X_*)_{li} \right\| \leqslant \|\tilde{B}\|\,\|X_*\| d_i^{-1}.$$

Таким образом, оценка (4) имеет место. Оценка (5) устанавливается аналогично, если в качестве X_* берём второе приближение к нему и учитываем, что

$$P_i(\tilde{B}\Gamma_k\tilde{B})|_{H_i} = \left(\frac{1}{a(i-1)-a(i)} + \frac{1}{a(i+1)-a(i)}\right)I, \qquad |i| > k.$$

Перейдём к оценкам собственных векторов. Так как $\Gamma_k X_* \in EndH$ при всех $k \geqslant 0$, то собственные векторы оператора $A - B$ образуют базис Рисса в пространстве H. Опять же из подобия операторов следуют соотношения

$$\tilde{e}_i = (I + \Gamma_k X_*)e_i = e_i + \Gamma_k\tilde{B}e_i + \Gamma_k(X_* - \tilde{B})e_i = \tilde{y}_i + \Gamma_k(X_* - \tilde{B})e_i, \qquad |i| > k,$$
$$\|\tilde{e}_i - \tilde{y}_i\| \leqslant \|\Gamma_k(X_* - \tilde{B})e_i\| = \|(\Gamma_k(B\Gamma_k X_* - (\Gamma_k X_*)J_k B - \Gamma_k X_* J_k(B\Gamma_k X_*)))e_i\| \leqslant O(d_i^{-2}),$$

где $\tilde{e}_i$ — собственный вектор оператора $A-B$, отвечающий собственному значению μ_i, определенному формулой (4), а e_i — собственный вектор оператора $\tilde{A}$, отвечающий собственному значению $a(i)+2$, $|i| > k$. Отметим, что e_i также является вектором стандартного базиса пространства $l_2(\mathbb{Z})$. Так как $\Gamma_k\tilde{B}e_i$ есть i-столбец матрицы $\Gamma_k\tilde{B}$, то

$$\Gamma_k\tilde{B}e_i = \left\{0, ..., 0, \frac{1}{a(i-1)-a(i)}, 0, \frac{1}{a(i+1)-a(i)}, 0, ...\right\},$$

и вектор $\tilde{y}_i = e_i + \Gamma_k\tilde{B}e_i$ определяется формулой ($|i| > k$)

$$\tilde{y}_i(k) = \begin{cases} 1, & i = k, \\ (a(i \pm 1) - a(i))^{-1}, & k = i \pm 1, \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

при этом $\|\tilde{e}_i - \tilde{y}_i\| = O(d_i^{-2})$. □

Лемма 2. *Пусть имеет место теорема 1. Для спектральных проекторов $\tilde{P}_i = P(\{\mu_i\}, A - B))$, $|i| > k$, и $\tilde{Q}_k = \sum\limits_{|i|\leqslant k} \tilde{P}_i$ имеют место формулы*

$$\tilde{P}_i = P_i U^{-1} + \Gamma X_* P_i U^{-1}, \qquad |i| > k, \qquad U = I + \Gamma X_*, \tag{14}$$
$$\tilde{Q}_k = Q_k U^{-1} + \Gamma X_* Q_k U^{-1}, \tag{15}$$
$$\tilde{P}_i - P_i = (\Gamma_k X_* P_i - P_i \Gamma_k X_*)U^{-1}, \qquad |i| > k, \tag{16}$$
$$\tilde{Q}_k - Q_k = (\Gamma_k X_* Q_k - Q_k \Gamma_k X_*)U^{-1}, \tag{17}$$

Доказательство. Из подобия операторов $\tilde{A} - \tilde{B}$ и $\tilde{A} - J_k X_*$ следует, что спектральные проекторы P_i, $|i| > k$, оператора $\tilde{A}$ (или оператора A) и спектральные проекторы $\tilde{P}_i = P(\tilde{\sigma}_i, \tilde{A} - \tilde{B})$ связаны равенством

$$\tilde{P}_i = (I + \Gamma_k X_*)P_i(I + \Gamma_k X_*)^{-1},$$

откуда и следуют формулы (14), (16). Аналогично получаются формулы (15), (17) для проектора Q_k. □

Доказательство теоремы 2. Из леммы 2 следует, что

$$\|\tilde{P}_i - P_i\| \leqslant c(\|\Gamma_k X_* P_i\| + \|P_i \Gamma_k X_*\|)\|U^{-1}\|$$

и

$$\|P_i \Gamma_k X_*\| = O(d_i^{-1}), \qquad \|\Gamma_k X_* P_i\| = O(d_i^{-1}),$$

поэтому верно (6).

Обозначим символом Ω произвольное множество из $\mathbb{Z}\backslash\{-k, ..., -1, 0, 1, ..., k\}$. Для множества $\triangle = \triangle(\Omega) = \{\lambda_n,\ n \in \Omega\}$ проектор Рисса $P(\triangle, A)$ определим равенством $P_\triangle x = P(\triangle, A)x = \sum\limits_{n\in\Omega} P_n x$, $x \in H$. Аналогично $\tilde{\triangle} = \tilde{\triangle}(\Omega) = \{\mu_n, n \in \Omega\}$, $\tilde{P}_\triangle x = P(\tilde{\triangle}, A)x = \sum\limits_{n\in\Omega} \tilde{P}_n x$, $x \in H$.

Из подобия операторов $\tilde{A} - \tilde{B}$ и $\tilde{A} - J_k X_*$ следуют равенства

$$\tilde{P}_\triangle = (I + \Gamma_k X_*) P_\triangle (I + \Gamma_k X_*)^{-1},$$
$$\tilde{P}_\triangle - P_\triangle = (\Gamma_k X_* P_\triangle - P_\triangle \Gamma_k X_*)(I + \Gamma_k X_*)^{-1}.$$

Следовательно,
$$\|\tilde{P}_\triangle - P_\triangle\| \leqslant \|(I + \Gamma_k X_*)^{-1}\| (\|\Gamma_k X_* P_\triangle\| + \|P_\triangle \Gamma_k X_*\|).$$

Оператор $(I+\Gamma_k X_*)^{-1}$ ограничен, а нормы $\|\Gamma_k X_* P_\triangle\|$, $\|P_\triangle \Gamma_k X_*\|$ оцениваются величиной $C(d(\Omega))^{-1}$, где $d(\Omega) = \min\limits_{i \in \Omega} d_i$, $\|\tilde{P}_\triangle - P_\triangle\| = O(d^{-1}(\Omega))$. В формуле (7) берем в качестве Ω множества $\Omega = \{m, m+1, ..., N\}$, $m > k$, $N > k$. А в формуле (8) $\Omega = \{n : |n| > l\}$, где $l > k$. $\square$

Определение 2 (см. [12]). Пусть $C : D(C) \subset H \to H$ — линейный оператор, спектр которого представим в виде объединения
$$\sigma(C) = \cup_{k \in \mathbb{Z}} \sigma_k \tag{18}$$
взаимно непересекающихся компактных подмножеств из σ_k, $k \in \mathbb{Z}$, и P_k — проектор Рисса, построенный по множеству σ_k. Оператор C называется *спектральным относительно разложения* (18) или *обобщенно спектральным*, если ряд $\sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} P_k x$ сходится для любого вектора $x \in H$.

Отметим, что если $\sigma_k = \{\lambda_k\}$, $k \in \mathbb{Z}$, — одноточечные множества, а проекторы P_k, $k \geqslant 0$, обладают свойством $CP_k = \lambda_k P_k$, $k \in \mathbb{Z}$, исключая конечное число, то оператор C является спектральным по Данфорду, причём C — спектральный оператор скалярного типа, если $CP_k = \lambda_k P_k$ при всех $k \in \mathbb{Z}$.

Следствие 1. *Оператор $A - B$ является спектральным относительно разложения* (3).

Пример. Пусть числа $a(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, таковы, что $a(n) = c_1 \cdot sign(n)|n|^\alpha + c_2$, $\alpha > 1$, и оператор B определен равенством (2). Тогда имеют место теоремы 1 и 2 об асимптотической оценке собственных векторов, собственных значений и спектральных проекторов оператора $A - B$. Заметим, что в этом случае $d_i = c_3 |i|^{\alpha - 1}$, $\alpha > 1$, $d_i \to \infty$ при $|i| \to \infty$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00197).

Библиографический список

1. *Мусилимов Б., Отелбаев М.* Оценка наименьшего собственного значения одного класса матриц, соответствующих разностному уравнению Штурма – Лиувилля // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1981. Т. 21, № 6. С. 1430–1434.
2. *Баскаков А. Г.* Методы абстрактного гармонического анализа в теории возмущений линейных операторов // Сиб. матем. журн. 1983. Т. 24, № 1. С. 21–39.
3. *Баскаков А. Г.* Теорема о расщиплении оператора и некоторые смежные вопросы аналитической теории возмущений // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1986. Т. 50, № 3. С. 435–457.
4. *Баскаков А. Г.* Спектральный анализ возмущенных неквазианалитических и спектральных операторов // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 54, № 4. С. 3–32.
5. *Баскаков А. Г., Дербушев А. В., Щербаков А. О.* Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом // Изв. РАН. Сер. матем. 2011. Т. 75, № 3. С. 3–28. DOI: 10.4213/im4202.
6. *Ускова Н. Б.* О спектральных свойствах оператора Штурма – Лиувилля с матричным потенциалом // Уфимск. матем. журн. 2015. Т. 7, № 3. С. 88–99.
7. *Поляков Д. М.* Спектральный анализ несамосопряженного оператора четвертого порядка с негладкими коэффициентами // Сиб. матем. журн. 2015. Т. 56, № 1. С. 165–184.
8. *Баскаков А. Г.* Оценки функции Грина и параметров экспоненциальной дихотомии гиперболической полугруппы операторов и линейных отношений // Матем. сб. 2015. Т. 206, № 8. С. 23–62. DOI: 10.4213/sm8193.
9. *Гаркавенко Г. В.* О диагонализации некоторых классов линейных операторов // Изв. вузов. Матем. 1994. № 11. С. 14–19.
10. *Ускова Н. Б.* К методу подобных операторов в банаховых алгебрах // Изв. вузов. Матем. 2005. № 3 (514). С. 79–85.
11. *Ускова Н. Б.* О спектральных свойствах одного диффнренциального оператора второго порядка с матричным потенциалом // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52, № 5. С. 579–588.
12. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы : в 3 т. Т. 3 : Спектральные операторы. М. : Мир, 1974. 664 с.

Образец для цитирования:
Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б. Спектральный анализ одного класса разностных операторов с растущим потенциалом // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 4. С. 395–402. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-395-402.

Spectral Analysis of a Class of Difference Operators with Growing Potential

G. V. Garkavenko[1], N. B. Uskova[2]

[1]Galina V. Garkavenko, Voronezh State Pedagogical University, 86, Lenina str., 394043, Voronezh, Russia, g.garkavenko@mail.ru
[2]Natal'ya B. Uskova, Voronezh State Technical University, 14, Moskovskiy Prospect str., 394026, Voronezh, Russia, nat-uskova@mail.ru

The similar operator method is used for the spectral analysis of the closed difference operator of the form $(\mathscr{A}x)(n) = x(n+1) + x(n-1) - 2x(n) + a(n)x(n), n \in \mathbb{Z}$ under consideration in the Hilbert space $l_2(\mathbb{Z})$ of bilateral sequences of complex numbers, with a growing potential $a : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$. The asymptotic estimates of eigenvalue, eigenvectors, spectral estimation of equiconvergence applications for the test operator and the operator of multiplication by a sequence $a : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$. For the study of the operator, it is represented in the form of $A - B$, where $(Ax)(n) = a(n)x(n), n \in \mathbb{Z}, x \in l_2(\mathbb{Z})$ with the natural domain. This operator is normal with known spectral properties and acts as the unperturbed operator in the method of similar operators. The bounded operator $(Bx)(n) = -x(n+1) - x(n-1) + 2x(n), n \in \mathbb{Z}, x \in l_2(\mathbb{Z})$, acts as the perturbation.

Key words: similar operator method, spectrum, difference operator, spectral projections.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 16-01-00197).

References

1. Musilimov B., Otelbaev M. Estimation of the least eigenvalues for the matrix class corresponding to the Sturm-Liouville difference equation. *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, 1981, vol. 21, iss. 6, pp. 68–73. DOI: 10.1016/0041-5553(81)90151-8.
2. Baskakov A. G. Method of abstract harmonic analysis in the theory of perturbation of linear operators. *Siberian Math. J.*, 1983, vol. 24, no. 1, pp. 17–32 (in Russian).
3. Baskakov A. G. A theorem on splitting an operator, and some related questions in the analytic theory of perturbations. *Math. USSR-Izv.*, 1987, vol. 28, iss. 3, pp. 421–444. DOI: 10.1070/IM1987v028n03ABEH000891.
4. Baskakov A. G. Spectral analysis of perturbed nonquasianalytic and spectral operators. *Russian Acad. Sci. Izv. Math.*, 1995, vol. 45, iss. 1, pp. 1–31. DOI: 10.1070/IM1995v045n01ABEH001621.
5. Baskakov A. G., Derbushev A. V., Shcherbakov A. O. The method of similar operators in the spectral analysis of non-self-adjoint Dirac operators with non-smooth potentials. *Izv. Math.*, 2011, vol. 75, iss. 3, pp. 445–469. DOI: 10.1070/IM2011v075n03ABEH002540.
6. Uskova N. B. On spectral properties of Shturm – Liouville operator with matrix potential. *Ufa Math. J.*, 2015, vol. 7, iss. 3, pp. 84–94. DOI: 10.13108/2015-7-3-84.
7. Polyakov D. M. Spectral analiysis of a forth-order nonsefaioint operator with nonsmoth coefficients. *Siberian Math. J.*, 2015, vol. 56, iss. 1, pp. 138–154. DOI: 10.1134/S0037446615010140.
8. Baskakov A. G. Estimates for the Green's function and parameters of exponential dichotomy of a hyperbolic operator semigroup and linear relation. *Sb. Math.*, 2015, vol. 206, no. 8, pp. 1049–1086. DOI: 10.1070/SM2015v206n08ABEH004489.
9. Garkavenko G. V. On diagonalization of certian classes of linear operator. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 1994, vol. 38, iss. 11, pp. 11–16.
10. Uskova N. B. On the method of similar operators in Banach algebras. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2005, vol. 49, iss. 3, pp. 75–81.
11. Uskova N. B. On the spectral properties of a second-order differential operator with a matrix potential. *Differential Equations*, 2016, vol. 52, no. 5, pp. 557–567.
12. Danford N., Schwartz J. T. *Linear Operators. Pt. III : Spectral Operators*. New York, Interscience Publ., 1971. 689 p. (Russ. ed.: Danford N., Schwartz J. T. Lineinye operatory : v 3 t. T. 3 : Spektral'nye operatory. Moscow, Mir, 1974. 664 p.)

Please cite this article in press as:
Garkavenko G. V., Uskova N. B. Spectral Analysis of a Class of Difference Operators with Growing Potential. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 4, pp. 395–402 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-395-402.