УДК 517.95; 517.984

РЕЗОЛЬВЕНТНЫЙ ПОДХОД К МЕТОДУ ФУРЬЕ В СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

В. В. Корнев[1], А. П. Хромов[2]

[1]Корнев Владимир Викторович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений и прикладной математики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, KornevVV@info.sgu.ru

[2]Хромов Август Петрович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений и прикладной математики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, KhromovAP@info.sgu.ru

Дается обоснование метода Фурье при получении классического решения в смешанной задаче для неоднородного волнового уравнения с комплексным потенциалом и закрепленными краевыми условиями при минимальных требованиях на начальные данные. Используемый резольвентный подход не требует никакой информации о собственных и присоединенных функциях соответствующей спектральной задачи.

Ключевые слова: смешанная задача, волновое уравнение, метод Фурье, резольвента.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-403-413

ВВЕДЕНИЕ

В работах [1–4] был изложен резольвентный подход к методу Фурье получения классического решения в смешанных задачах для однородного волнового уравнения с различными краевыми условиями. Этот подход позволяет дать строгое обоснование метода Фурье, не прибегая к завышенным требованиям гладкости на начальные данные и не используя никакой информации о собственных и присоединенных функциях соответствующей спектральной задачи. В данной статье этот резольвентный подход используется для обоснования метода Фурье в смешанной задаче для неоднородного волнового уравнения с комплексным потенциалом и закрепленными краевыми условиями при минимальных требованиях на исходные данные.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим смешанную задачу:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t) + f(x,t), \qquad (x,t) \in Q = [0,1] \times (-\infty, \infty), \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad u'_t(x,0) = \psi(x), \tag{3}$$

где все функции предполагаются комплекснозначными, причем

$$q(x) \in C[0,1], \qquad \varphi(x) \in C^2[0,1], \qquad \psi(x) \in C^1[0,1], \qquad f(x,t) \ \text{ непрерывна в } Q. \tag{4}$$

Для существования классического решения (т.е. $u(x,t)$ вместе с частными производными по x и t до второго порядка включительно непрерывна в Q и удовлетворяет (1)–(3)) необходимо должны выполняться условия

$$\varphi(0) = \varphi(1) = \psi(0) = \psi(1) = 0, \tag{5}$$

$$\varphi''(0) + f(0,0) = \varphi''(1) + f(1,0) = 0. \tag{6}$$

Мы дополнительно потребуем еще, чтобы

$$f'_t(x,t) \in C(Q). \tag{7}$$

Наша цель — доказать, что при сделанных предположениях формальный ряд, построенный по методу Фурье, сходится и его сумма есть классическое решение задачи (1)–(3).

Приведем близкие к данной статье результаты. Справедлива следующая теорема [5, с. 198–200].

Теорема A. *Пусть вещественные функции $q(x) \in C^2[0,1]$, $\varphi(x) \in C^3[0,1]$, $\psi(x) \in C^2[0,1]$, причем $\varphi(0) = \varphi''(0) = \varphi(1) = \varphi''(1) = \psi(0) = \psi(1) = 0$, $f(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируема по x и удовлетворяет условию*

$$f(0,t) = f(1,t) = 0, \qquad t \in [0,\infty). \tag{8}$$

Тогда формальный ряд по методу Фурье и ряды, получающиеся из него почленным дифференцированием по x и t до двух раз включительно, сходятся абсолютно и равномерно в $\tilde{Q}_T = [0,1] \times [0,T]$ при любом $T > 0$, и сумма формального ряда является классическим решением задачи (1)–(3).

В [6] классическое решение $u(x,t)$ задачи (1)–(3) в $\tilde{Q}_T$ ищется в виде

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t), \tag{9}$$

где $u_0(x,t)$ — решение задачи (1)–(3) при $f(x,t) = 0$, $u_1(x,t)$ — решение задачи (1)–(3) при $\varphi(x) = \psi(x) = 0$. Для $u_0(x,t)$ в [6, с. 39] получена

Теорема B. *Классическое решение $u_0(x,t)$ при вещественной $q(x) \in C[0,1]$ существует и единственно тогда и только тогда, когда*

$$\begin{gathered} \varphi(x) \in C^2[0,1], \qquad \psi(x) \in C^1[0,1], \\ \varphi(0) = \varphi''(0) = \varphi(1) = \varphi''(1) = \psi(0) = \psi(1) = 0, \end{gathered} \tag{10}$$

и находится по методу Фурье.

Относительно $u_1(x,t)$ из (9) утверждается [6, с. 17, 67]:

Теорема C. *Для разрешимости задачи* (1)–(3) *при $\varphi(x) = \psi(x) = 0$, $q(x) \in C[0,1]$ и вещественной необходимо и достаточно, чтобы $f(x,t)$ была непрерывной с условием* (8), *и функции $p(x,t) = \int\limits_0^t \tilde{f}(x \pm (t-\tau), \tau)\, d\tau$ были непрерывно дифференцируемы по x и t, где $\tilde{f}(x,t)$ — нечетное, 2-периодическое продолжение $f(x,t)$ по переменной x на всю числовую ось. Ряд, построенный по методу Фурье, сходится равномерно по $x \in [0,1]$ при фиксированном t, и его сумма есть классическое решение задачи* (1)–(3).

Нам представляется, что условие (8) не является необходимым. Приведем пример. Рассмотрим смешанную задачу

$$u''_{tt}(x,t) = u''_{xx}(x,t) - t, \quad u(0,t) = u(1,t) = u(x,0) = u'_t(x,0) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{11}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$v(x,t) = \frac{1}{8}x(x+t)(x+3t) + g\left(\frac{1}{2}(x-t)\right) - g\left(-\frac{1}{2}(x+t)\right),$$

где $g(x) = \frac{1}{2}x^2(1-x)$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$ и продолжена на всю числовую ось по правилу

$$g(x+1) - g(x) = -\frac{1}{2}x(1+3x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Поскольку односторонние производные до второго порядка включительно так продолженной функции $g(x)$ в точке $x = 1$ совпадают, то $g(x) \in C^2(\mathbb{R})$ (см. также лемму 2). Непосредственные вычисления показывают, что для $v(x,t)$ справедливы соотношения

$$v''_{tt}(x,t) = v''_{xx}(x,t) - t, \qquad v(0,t) = v(1,t) = 0, \qquad x,t \in \mathbb{R}.$$

Далее рассмотрим функции $\varphi(x) = v(x,0)$ и $\psi(x) = v'_t(x,0)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. Продолжим их с $[0,1]$ на $[-1,0]$ нечетным образом, а затем на всю числовую ось периодически с периодом 2. Из соотношений для функции $v(x,t)$ следует, что $\varphi(x) \in C^2(\mathbb{R})$, $\psi(x) \in C^1(\mathbb{R})$, и они удовлетворяют условиям

$$\varphi(0) = \varphi''(0) = \varphi(1) = \varphi''(1) = \psi(0) = \psi(1) = 0,$$
$$\varphi(-x) = -\varphi(x), \quad \psi(-x) = -\psi(x), \quad \varphi(1-x) = -\varphi(1+x), \quad \psi(1-x) = -\psi(1+x).$$

С помощью этих условий нетрудно убедиться, что для функции

$$w(x,t) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x+t) + \varphi(x-t) + \int\limits_{x-t}^{x+t} \psi(\tau)\,d\tau\right)$$

выполняются соотношения

$$w''_{tt}(x,t) = w''_{xx}(x,t), \qquad w(0,t) = w(1,t) = 0, \qquad w(x,0) = \varphi(x), \qquad w'_t(x,0) = \psi(x).$$

Следовательно, функция $u(x,t) = v(x,t) - w(x,t)$ является классическим решением задачи (11).

Заметим, что в наших дальнейших рассуждениях мы не ищем решение задачи (1)–(3) в виде (9).

2. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

Метод Фурье в применении к (1)–(3) связан со спектральной задачей для оператора L:

$$Ly = -y''(x) + q(x)y(x), \qquad y(0) = y(1) = 0.$$

Известно, что собственные значения $\lambda_n = \rho_n^2$ оператора L при достаточно больших n имеют асимптотику

$$\rho_n = n\pi + \varepsilon_n, \qquad n = n_0, n_0+1, \ldots, \qquad \varepsilon_n = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Введем окружности $\tilde{\gamma}_n = \{\rho \mid |\rho - n\pi| = \delta\}$, где $\delta > 0$ и достаточно мало, $n \geqslant n_0$, а n_0 таково, что внутри $\tilde{\gamma}_n$ находится только одно ρ_n. Пусть γ_n — образ $\tilde{\gamma}_n$ в λ-плоскости ($\lambda = \rho^2$, $\operatorname{Re}\rho \geqslant 0$). Обозначим через R_λ резольвенту оператора L, т.е. $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$, где E — единичный оператор, λ — спектральный параметр. Формальное решение по методу Фурье задачи (1)–(3) возьмем в виде (см. также [7, 8])

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\Bigg[(R_\lambda\varphi)(x)\cos\rho t + \frac{1}{\rho}(R_\lambda\psi)(x)\sin\rho t +$$
$$+ \int\limits_0^t (R_\lambda f)(x,\tau)\frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}\,d\tau\Bigg]d\lambda, \tag{12}$$

где $R_\lambda f$ — значение R_λ на функции $f(x,\tau)$ как функции x, $r > 0$ фиксировано, и контур $|\lambda| = r$ содержит внутри только те λ_n, номера которых меньше n_0, причем на самом контуре собственных значений нет.

Для дальнейшего потребуется явная формула для R_λ. Обозначим через $z_1(x,\rho)$ и $z_2(x,\rho)$ решения уравнения $y'' - q(x)y + \rho^2 y = 0$ с начальными условиями $z_1(0,\rho) = z'_2(0,\rho) = 1$ и $z'_1(0,\rho) = z_2(0,\rho) = 0$. Функции $z_j(x,\rho)$ целые по ρ и даже по λ, где $\lambda = \rho^2$.

Лемма 1 (см. [2]). *Для R_λ имеет место формула*

$$R_\lambda g = z_2(x,\rho)(g,z_1) - v(x,\rho)(g,z_2) + M_\rho g, \tag{13}$$

где $(g,z) = \int\limits_0^1 g(x)z(x)\,dx$, $v(x,\rho) = z_2(x,\rho)z_1(1,\rho)z_2^{-1}(1,\rho)$, $M_\rho g = \int\limits_0^x M(x,\xi,\rho)g(\xi)\,d\xi$, $M(x,\xi,\rho) = \begin{vmatrix} z_1(x,\rho) & z_2(x,\rho) \\ z_1(\xi,\rho) & z_2(\xi,\rho)\end{vmatrix}$.

Теорема 1. *Если $u(x,t)$ — классическое решение задачи* (1)–(3)*, то для него справедлива формула* (12)*, причем ряд сходится равномерно по $x \in [0,1]$ при каждом фиксированном t.*

Доказательство. Пусть $u(x,t)$ есть классическое решение задачи (1)–(3). Тогда при фиксированном t она принадлежит области определения оператора L, краевые условия которого регулярны. Следовательно, $u(x,t)$ как функция x разлагается в равномерно сходящийся на $[0,1]$ ряд Фурье по собственным и присоединенным функциям оператора L, который представим в виде

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right) R_\lambda u\, d\lambda, \tag{14}$$

где $R_\lambda u$ — значение R_λ на $u(x,t)$ как функции x. Обозначим $R_\lambda u = y(x,t,\lambda)$. Отсюда следует, что

$$Ly = u(x,t) + \lambda y(x,t,\lambda). \tag{15}$$

Поскольку $u(x,t)$ есть решение уравнения (1), то имеет место тождество

$$R_\lambda u''_{tt} = -R_\lambda(Lu) + R_\lambda f,$$

из которого на основании равенств $R_\lambda Lu = LR_\lambda u$ и $R_\lambda u''_{tt} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}R_\lambda u$ получаем, что

$$y''_{tt} = -Ly + R_\lambda f$$

или с учетом (15)

$$y''_{tt}(x,t,\lambda) + \lambda y(x,t,\lambda) = -u(x,t) + (R_\lambda f)(x,t).$$

Кроме того,

$$y(x,0,\lambda) = R_\lambda\varphi, \qquad y'_t(x,0,\lambda) = R_\lambda\psi.$$

Следовательно, при фиксированных x и λ функция $y(x,t,\lambda)$ является решением задачи Коши

$$y'' + \lambda y = -u + R_\lambda f, \qquad y(0) = R_\lambda\varphi, \qquad y'(0) = R_\lambda\psi,$$

решение которой дается формулой

$$y(x,t,\lambda) = (R_\lambda\varphi)(x)\cos\rho t + \frac{1}{\rho}(R_\lambda\psi)(x)\sin\rho t + \frac{1}{\rho}\int\limits_0^t \sin\rho(t-\tau)[-u(x,\tau) + (R_\lambda f)(x,\tau)]d\tau.$$

Подставляя эту формулу в правую часть (14) вместо $R_\lambda u$ и учитывая аналитичность по λ интеграла $\frac{1}{\rho}\int\limits_0^t \sin\rho(t-\tau)u(x,\tau)\,d\tau$, приходим к утверждению теоремы. □

Замечание. Теорема 1 не нова, схожий результат содержится, например, в [7, с. 171]. Мы приводим ее доказательство для облегчения чтения работы.

Остановимся вначале на случае однородного уравнения (1).

Теорема 2. *Пусть в задаче* (1)–(3) $f(x,t) = 0$*. Тогда ряд в* (12) *сходится абсолютно и равномерно в $Q_T = [0,1]\times[-T,T]$, где $T > 0$ — произвольное фиксированное число, и формальное решение* (12) *есть классическое решение этой задачи.*

Доказательство. В работе [2] показано, что ряд

$$-\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)(R_\lambda\varphi)(x)\cos\rho t\, d\lambda$$

сходится указанным образом к классическому решению задачи (1)–(3) при $\psi(x) = 0$. Аналогичным приемом можно доказать, что ряд

$$-\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)(R_\lambda\psi)(x)\frac{\sin\rho t}{\rho}\,d\lambda$$

сходится тем же образом к классическому решению задачи (1)–(3) при $\varphi(x) = 0$. Отсюда следует утверждение теоремы. □

Для исследования неоднородного случая нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть $F(t) \in C^2(\mathbb{R})$. Тогда существует функция $H(t) \in C^2(\mathbb{R})$, такая что*

$$H(t+1) - H(t) = F(t), \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{16}$$

Доказательство. Положим $H(t) = h(t)$ при $t \in [0, 1]$, где $h(t)$ — функция из $C^2[0, 1]$, для которой $h(1) - h(0) = F(0)$. По формуле (16) функцию $H(t)$ однозначно продолжаем с $[0, 1]$ вправо и влево на всю числовую ось. Очевидно, что

$$H^{(k)}(1-0) = h^{(k)}(1), \qquad H^{(k)}(1+0) = h^{(k)}(0) + F^{(k)}(0), \qquad k = 0, 1, 2.$$

Выберем $h(t)$ так, чтобы

$$h^{(k)}(1) = h^{(k)}(0) + F^{(k)}(0), \qquad k = 0, 1, 2.$$

При этих условиях $H(t) \in C^2[0, 2]$. Из непрерывности функций $H^{(k)}(t)$ $(k = 0, 1, 2)$ в точке $t = 1$ и формулы $H(t + 1) = H(t) + F(t)$ вытекает непрерывность этих функций в точках $t = 2, 3, \ldots$, а из формулы $H(t) = H(t + 1) - F(t)$ — в точках $t = 0, -1, -2, \ldots$. Таким образом, $H(t) \in C^2(\mathbb{R})$. Лемма доказана. □

Теперь рассмотрим еще один частный случай задачи (1)–(3), когда $q(x) = \varphi(x) = \psi(x) = 0$. Обозначим через R^0_λ резольвенту оператора L_0, который есть оператор L при $q(x) = 0$ с собственными значениями $\lambda^0_n = n^2\pi^2$, $n = 1, 2, \ldots$. По лемме 1

$$R^0_\lambda g = z^0_2(x,\rho)(g, z^0_1) - v^0(x,\rho)(g, z^0_2) + M^0_\rho g, \tag{17}$$

где z^0_1, z^0_2, v^0, M^0_ρ — те же, что и z_1, z_2, v, M_ρ, но взятые для оператора L_0. В этом случае

$$z^0_1(x,\rho) = \cos\rho x, \qquad z^0_2(x,\rho) = \frac{1}{\rho}\sin\rho x, \qquad v^0(x,\rho) = \sin\rho x \operatorname{ctg}\rho.$$

Теорема 3. *При выполнении условия*

$$f(0, 0) = f(1, 0) = 0 \tag{18}$$

классическое решение задачи (1)–(3) *в случае $q(x) = \varphi(x) = \psi(x) = 0$ существует и дается формулой*

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\left(\int\limits_0^t (R^0_\lambda f)(x,\tau)\frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}\,d\tau\right)d\lambda,$$

где $R^0_\lambda f$ — значение R^0_λ на функции $f(x, \tau)$ как функции x, причем ряд сходится равномерно по $x \in [0, 1]$ при любом фиксированном t.

Доказательство. Будем считать, что $f(x, t)$ и $f'_t(x, t)$ определены и непрерывны в $\mathbb{R}^2$, положив, например, $f(x, t) = f(1, t)$ при $x > 1$ и $f(x, t) = f(0, t)$ при $x < 0$.

Решим вначале вспомогательную задачу:

$$u''_{tt} = u''_{xx} + f(x,t), \qquad u(0,t) = u(1,t) = 0, \qquad -\infty < x, t < \infty. \tag{19}$$

После замены переменных $x = \xi + \eta$ и $t = \xi - \eta$ эта задача перейдет в задачу

$$v''_{\xi\eta}(\xi,\eta) = g(\xi,\eta), \qquad v(\xi,-\xi) = v(\xi,1-\xi) = 0, \qquad \xi,\eta \in \mathbb{R}, \tag{20}$$

где $g(\xi, \eta) = -f(\xi + \eta, \xi - \eta)$.

Общее решение уравнения задачи (20) имеет вид

$$v(\xi,\eta) = G(\xi,\eta) + c_1(\xi) + c_2(\eta),$$

где $G(\xi,\eta) = \int\limits_0^\xi \int\limits_0^\eta g(s,\tau)\,d\tau\,ds \in C^2(\mathbb{R}^2)$, $c_1(\xi)$, $c_2(\eta)$ — произвольные функции из $C^2(\mathbb{R})$.

Подставив общее решение в краевые условия задачи (20), получим систему

$$G(\xi,-\xi) + c_1(\xi) + c_2(-\xi) = 0, \qquad G(\xi,1-\xi) + c_1(\xi) + c_2(1-\xi) = 0. \tag{21}$$

Вычитая из второго уравнения первое и выполняя замену $\theta = -\xi$, приходим к уравнению для функции $c_2(\theta)$

$$c_2(\theta+1) - c_2(\theta) = F(\theta), \qquad \theta \in \mathbb{R},$$

где $F(\theta) = G(-\theta, 1+\theta) - G(-\theta,\theta)$.

Пусть $c_2(\theta)$ — решение этого уравнения (оно существует по лемме 2). Тогда из первого уравнения системы (21) находим $c_1(\xi)$. В результате мы получили решение задачи (20). Следовательно, задача (19) имеет решение в $C^2(\mathbb{R}^2)$. Пусть $u_0(x,t)$ — одно из таких решений.

Обозначим $\varphi_0(x) = u_0(x,0)$, $\psi_0(x) = u'_{0t}(x,0)$. Очевидно, что

$$\varphi_0(x) \in C^2[0,1], \qquad \psi_0(x) \in C^1[0,1]. \tag{22}$$

В силу условия (18) имеем

$$\varphi_0(0) = \varphi_0(1) = \varphi_0''(0) = \varphi_0''(1) = \psi_0(0) = \psi_0(1) = 0. \tag{23}$$

Функция $u_0(x,t)$ есть решение задачи (1)–(3) при данной $f(x,t)$, $q(x) = 0$, $\varphi(x) = \varphi_0(x)$, $\psi(x) = \psi_0(x)$. Из условий (22), (23) следует, что существует классическое решение $w(x,t)$ задачи (1)–(3) при $q(x) = 0$, $f(x,t) = 0$, $\varphi(x) = \varphi_0(x)$, $\psi(x) = \psi_0(x)$. Нетрудно видеть, что функция $u_1(x,t) = u_0(x,t) - w(x,t)$ с учетом теоремы 1 будет искомым решением.

Теорема доказана. □

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Для доказательства основной теоремы нам потребуются следующие факты.

Лемма 3 (см. [2]). *При $\rho \in \tilde{\gamma}_n$ имеют место асимптотические формулы*

$$v^{(j)}(x,\rho) = v^{0(j)}(x,\rho) + O(\rho^{j-1}), \qquad j = 0,1,2, \tag{24}$$

где оценки $O(\ldots)$ равномерны по $x \in [0,1]$.

Лемма 4 (см. [2]). *При $\rho \in \tilde{\gamma}_n$ имеют место формулы*

$$(g, z_2) = (n\pi+\mu)^{-1}\left[(g_1(\xi)\cos\mu\xi, \sin n\pi\xi) + (g_1(\xi)\sin\mu\xi, \cos n\pi\xi)\right], \tag{25}$$

$$(g, z_2 - z_2^0) = (n\pi+\mu)^{-2}\left[(g_2(\xi)\cos\mu\xi, \cos n\pi\xi) - (g_2(\xi)\sin\mu\xi, \sin n\pi\xi)\right], \tag{26}$$

где $\rho = n\pi + \mu$, $\mu \in \tilde{\gamma}_0$, $g_1(\xi) = g(\xi) + \int\limits_\xi^1 K(s,\xi)g(s)\,ds$, $g_2(\xi) = -g(\xi)K(\xi,\xi) + \int\limits_\xi^1 K'_\xi(s,\xi)g(s)\,ds$, $K(s,\xi)$ непрерывно дифференцируема по $s,\xi \in [0,1]$.

Лемма 5. *Обозначим через $\gamma(x)$ функции $\cos x$ или $\sin x$. Пусть $f(x,t) \in C(Q_T)$, $f(x,t,\mu) = f(x,t)\gamma(\mu x)$, $\mu \in \tilde{\gamma}_0$ и $\beta_n(t,\mu) = (f(x,t,\mu), \gamma(n\pi x))$. Тогда справедлива оценка*

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} \frac{1}{n}|\beta_n(t,\mu)| \leqslant c\left(\sum_{n=n_1}^{n_2}\frac{1}{n^2}\right)^{1/2}, \tag{27}$$

где постоянная c не зависит от t, μ, c_1 и c_2.

Доказательство. По неравенству Коши – Буняковского имеем

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} \frac{1}{n}|\beta_n(t,\mu)| \leqslant \left(\sum_{n=n_1}^{n_2} \frac{1}{n^2}\right)^{1/2} \left(\sum_{n=n_1}^{n_2} |\beta_n^2(t,\mu)|\right)^{1/2}, \tag{28}$$

а в силу неравенства Бесселя

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} |\beta_n^2(t,\mu)| \leqslant c_1 \int_0^1 |f(x,t,\mu)|^2\,dx, \tag{29}$$

причем

$$|f(x,t,\mu)| \leqslant c_2|f(x,t)| \leqslant c_3,$$

где все c_i не зависят от x, t, μ, n_1 и n_2.

Из (28) и (29) следует (27). Лемма доказана. □

Положим

$$a_n(x,t) = \int_{\gamma_n} \left(\int_0^t (R_\lambda f - R_\lambda^0 f)(x,\tau)\frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}\,d\tau\right) d\lambda. \tag{30}$$

Лемма 6. *Ряды* $\sum\limits_{n\geqslant n_0} a^{(j)}_{n,x^j}(x,t)$ *и* $\sum\limits_{n\geqslant n_0} a^{(j)}_{n,t^j}(x,t)$ $(j=0,1,2)$ *сходятся абсолютно и равномерно по* $(x,t)\in Q_T$.

Доказательство. Учитывая, что первые и третьи слагаемые в (13) и (17) есть целые функции по λ, из (30) имеем

$$a_n(x,t) = \int_{\gamma_n} \left(\int_0^t J(x,\tau,\rho,f)\frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}\,d\tau\right) d\lambda. \tag{31}$$

где $J(x,\tau,\rho,f) = v^0(x,\rho)(f(\xi,\tau),z_2^0(\xi,\rho)) - v(x,\rho)(f(\xi,\tau),z_2(\xi,\rho))$. Интегрируя в правой части (31) по частям и дифференцируя обе части по x, получаем

$$\begin{aligned} a^{(j)}_{n,x^j}(x,t) = 2\int_{\tilde\gamma_n} \rho^{-1}\Bigg[& J^{(j)}_{x^j}(x,\tau,\rho,f)\cos\rho(t-\tau)\Big|_{\tau=0}^{\tau=t} - \\ & - \int_0^t J^{(j)}_{x^j}(x,\tau,\rho,f'_\tau)\cos\rho(t-\tau)\,d\tau\Bigg]d\rho, \quad j=0,1,2. \end{aligned} \tag{32}$$

Представим J в виде

$$J(x,\tau,\rho,f) = J_1(x,\tau,\rho,f) + J_2(x,\tau,\rho,f),$$

где $J_1 = (v^0(x,\rho) - v(x,\rho))(f(\xi,\tau),z_2(\xi,\rho))$, $J_2 = v^0(x,\rho)(f(\xi,\tau),z_2^0(\xi,\rho) - z_2(\xi,\rho))$.

При $\rho = n\pi+\mu$ и $\mu\in\tilde\gamma_0$ в силу формул (24)–(27) имеем

$$J^{(j)}_{1,x^j}(x,t,\rho,f) = O(n^{j-2}[\beta_{1n}(t,\mu)+\beta_{1n}(t,\mu)]), \qquad j=0,1,2,$$

где первое β_{1n} есть $(g_1(\xi,t)\cos\mu\xi,\sin n\pi\xi)$, второе β_{1n} есть $(g_1(\xi,t)\sin\mu\xi,\cos n\pi\xi)$, $g_1(\xi,t)$ — функция g_1 из леммы 4 при $g=f(\xi,t)$, оценки $O(\ldots)$ равномерны по $(x,t)\in Q_T$, $\mu\in\tilde\gamma_0$.

Аналогично имеют место оценки

$$J^{(j)}_{2,x^j}(x,t,\rho,f) = O(n^{j-2}[\beta_{2n}(t,\mu)+\beta_{2n}(t,\mu)]), \qquad j=0,1,2,$$

где первое β_{2n} есть $(g_2(\xi,t)\cos\mu\xi,\cos n\pi\xi)$, второе β_{2n} есть $-(g_2(\xi,t)\sin\mu\xi,\sin n\pi\xi)$, $g_2(\xi,t)$ — функция g_2 из леммы 4 при $g=f(\xi,t)$.

Из этих оценок получаем оценку

$$J^{(j)}_{x^j}(x,t,\rho,f) = O(n^{j-2}\tilde\beta_n(t,\mu)), \qquad j=0,1,2,$$

где $\tilde\beta_n(t,\mu) = |\beta_{1n}(t,\mu)| + |\beta_{1n}(t,\mu)| + |\beta_{2n}(t,\mu)| + |\beta_{2n}(t,\mu)|$ и оценки $O(\ldots)$ равномерны по $(x,t) \in Q_T$, $\mu \in \tilde\gamma_0$. Такие же оценки справедливы для $J^{(j)}_{x^j}(x,t,\rho,f'_\tau)$. Следовательно, подынтегральное выражение в (32) есть $O(n^{j-3}\beta_n(t,\mu))$, где $\sum\limits_{n=n_1}^{n_2} |\beta_n^2(t,\mu)| \leqslant c$, c не зависит от n_1, n_2, t и $\mu \in \tilde\gamma_0$. Отсюда сразу имеем абсолютную и равномерную сходимость рядов $\sum\limits_{n\geqslant n_0} a^{(j)}_{n,x^j}(x,t)$ при $j = 0, 1$.

Если $j = 2$, то по лемме 5 справедлива оценка

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} |a''_{n,x^2}(x,t)| = O\left(\int\limits_{\tilde\gamma_n} \sum_{n=n_1}^{n_2} \frac{1}{n}\beta_n(t,\mu)|d\mu|\right) = O\left(\int\limits_{\tilde\gamma_n} \left(\sum_{n=n_1}^{n_2} \frac{1}{n^2}\right)^{1/2} |d\mu|\right) = O\left(\left(\sum_{n=n_1}^{n_2} \frac{1}{n^2}\right)^{1/2}\right),$$

равномерная по x, t, n_1 и n_2. Это дает абсолютную и равномерную сходимость ряда из вторых производных. Аналогично устанавливается абсолютная и равномерная сходимость рядов $\sum\limits_{n\geqslant n_0} a^{(j)}_{n,t^j}(x,t)$, $j = 0, 1, 2$, так как

$$a'_{n,t}(x,t) = \int\limits_{\gamma_n} \left(\int\limits_0^t (R_\lambda f - R^0_\lambda f)(x,\tau) \cos\rho(t-\tau)\, d\tau\right) d\lambda,$$

$$a''_{n,t^2}(x,t) = \int\limits_{\gamma_n} \left[(R_\lambda f - R^0_\lambda f)(x,t) - \rho \int\limits_0^t (R_\lambda f - R^0_\lambda f)(x,\tau) \sin\rho(t-\tau)\, d\tau\right] d\lambda =$$

$$= \int\limits_{\gamma_n} \left[(R_\lambda f - R^0_\lambda f)(x,0)\cos\rho t + \int\limits_0^t (R_\lambda f'_\tau - R^0_\lambda f'_\tau)(x,\tau)\cos\rho(t-\tau)\, d\tau\right] d\lambda.$$

Лемма доказана. □

4. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Запишем формальное решение (12) в виде

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t) + u_4(x,t),$$

где

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0} \int\limits_{\gamma_n}\right)\left(\int\limits_0^t (R^0_\lambda f_1)\frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}\, d\tau\right) d\lambda, \tag{33}$$

$$u_2(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0} \int\limits_{\gamma_n}\right)(R_\lambda\psi)\frac{\sin\rho t}{\rho}\, d\lambda, \tag{34}$$

$$u_3(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0} \int\limits_{\gamma_n}\right)\left(\int\limits_0^t (R_\lambda f_1 - R^0_\lambda f_1)\frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}\, d\tau\right) d\lambda. \tag{35}$$

$$u_4(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0} \int\limits_{\gamma_n}\right)\left((R_\lambda\varphi)\cos\rho t + \int\limits_0^t (R_\lambda f_2)\frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}\, d\tau\right) d\lambda, \tag{36}$$

$$f_1(x,\tau) = f(x,\tau) - f_2(x), \qquad f_2(x) = -\varphi''(x) + q(x)\varphi(x).$$

Лемма 7. *Ряд* (33) *сходится и функция* $u_1(x,t)$ *является классическим решением задачи* (1)–(3) *при* $q(x) = \varphi(x) = \psi(x) = 0$ *с неоднородностью* $f_1(x,t)$.

Доказательство. В силу условий (6) функция $f_1(x,t)$ удовлетворяет условию (18). Отсюда по теореме 3 следует утверждение леммы. □

Лемма 8. *Ряд* (34) *сходится и функция* $u_2(x,t)$ *является классическим решением задачи* (1)–(3) *при* $\varphi(x)=0$ *и* $f(x,t)=0$.

Доказательство. Утверждение леммы следует из теоремы 2. □

Лемма 9. *Ряд* (36) *сходится к функции* $\varphi(x)$.

Доказательство. Функцию $\varphi(x)$ можно рассматривать как решение задачи (1)–(3) при $\psi(x)=0$ с неоднородностью $f_2(x)$. Следовательно, по теореме 1 $u_4=\varphi(x)$. □

Лемма 10. *Ряд* (35) *сходится, и функция* $u_3(x,t)$ *непрерывна вместе с частными производными* $u''_{3,xx}(x,t)$ *и* $u''_{3,tt}(x,t)$, *причем*

$$u_3(0,t)=u_3(1,t)=u_3(x,0)=u'_{3,t}(x,0)=0, \qquad x\in[0,1], \qquad t\in\mathbb{R}, \tag{37}$$

$$u''_{3,tt}(x,t)-u''_{3,xx}(x,t)=\frac{1}{2\pi i}q(x)\left(\int\limits_{|\lambda|=r}+\sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\left(\int\limits_0^t(R_\lambda f_1)\frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}\,d\tau\right)d\lambda. \tag{38}$$

Доказательство. Обозначим для краткости $v(x,t)=u_3(x,t)$. По лемме 6 функция $v(x,t)$ непрерывна вместе с v''_{xx} и v'_{tt} в Q_T и ряд (35) можно дважды дифференцировать почленно по t и по x.

Вначале отметим, что по свойству R_λ и R^0_λ справедливы равенства $(R_\lambda f_1)(x,\tau)=(R^0_\lambda f_1)(x,\tau)=0$ при $x=0$ и $x=1$. Из этих равенств и формулы (35) сразу получаем, что

$$v(0,t)=v(1,t)=v(x,0)=0. \tag{39}$$

Дифференцируя (35) по t, имеем

$$v'_t(x,t)=-\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r}+\sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\left(\int\limits_0^t(R_\lambda f_1-R^0_\lambda f_1)\cos\rho(t-\tau)\,d\tau\right)d\lambda. \tag{40}$$

Из (39), (40) следует справедливость (37). По известной теореме равносходимости выполняется тождество

$$-\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r}+\sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)(R_\lambda f_1-R^0_\lambda f_1)\,d\lambda=0, \qquad (x,t)\in Q_T. \tag{41}$$

Дифференцируя обе части (40) по t, с учетом (41) получаем, что

$$v''_{tt}(x,t)=\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r}+\sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\left(\int\limits_0^t(R_\lambda f_1-R^0_\lambda f_1)\rho\sin\rho(t-\tau)\,d\tau\right)d\lambda. \tag{42}$$

Теперь продифференцируем обе части (35) дважды по x:

$$v''_{xx}(x,t)=-\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r}+\sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\left(\int\limits_0^t\left((R_\lambda f_1)''_{xx}-(R^0_\lambda f_1)''_{xx}\right)\frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}\,d\tau\right)d\lambda. \tag{43}$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned}(R_\lambda f_1)''_{xx}&=-L(R_\lambda f_1)+q(x)R_\lambda f_1=[-L(R_\lambda f_1)+\lambda R_\lambda f_1]-\\&-\lambda R_\lambda f_1+q(x)R_\lambda f_1=-f_1-\lambda R_\lambda f_1+q(x)R_\lambda f_1.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$(R_\lambda f_1)''_{xx}-(R^0_\lambda f_1)''_{xx}=q(x)R_\lambda f_1-\lambda\left(R_\lambda f_1-R^0_\lambda f_1\right). \tag{44}$$

Подставляя (44) в (43), получаем формулу

$$v''_{xx}(x,t)=-\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r}+\sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\left(\int\limits_0^t\left(q(x)R_\lambda f_1-\lambda\left(R_\lambda f_1-R^0_\lambda f_1\right)\right)\frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}\,d\tau\right)d\lambda. \tag{45}$$

Из равенств (42) и (45) следует (38). Лемма доказана. □

Теорема 4. *Если выполняются условия* (4)–(7), *то при любых* $x \in [0,1]$ *и* $t \in \mathbb{R}$ *формальный ряд* (12) *сходится, и его сумма* $u(x,t)$ *является классическим решением задачи* (1)–(3).

Доказательство. Согласно леммам 7–10 все $u_j(x,t)$, $j = 1,\dots,4$, удовлетворяют условиям (2). Следовательно, $u(x,t)$ также удовлетворяет этим условиям. На основании этих же лемм

$$u(x,0) = \sum_{j=1}^{4} u_j(x,0) = 0 + 0 + 0 + \varphi(x) = \varphi(x),$$
$$u'_t(x,0) = 0 + \psi(x) + 0 + 0 = \psi(x),$$

т. е. $u(x,t)$ удовлетворяет условиям (3).

Рассмотрим, наконец,

$$u''_{tt}(x,t) - u''_{xx}(x,t) = \sum_{j=1}^{4} \left(u''_{j,tt}(x,t) - u''_{j,xx}(x,t)\right) =$$
$$= f_1(x,t) - q(x)u_2(x,t) + \frac{1}{2\pi i} q(x) \left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0} \int\limits_{\gamma_n} \right) \left(\int\limits_0^t (R_\lambda f_1) \frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}\, d\tau \right) d\lambda - \varphi''(x) =$$
$$= f(x,t) - q(x)\varphi(x) - q(x)u_2(x,t) -$$
$$-q(x)\left(-\frac{1}{2\pi i}\right) \left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0} \int\limits_{\gamma_n} \right) \left(\int\limits_0^t (R_\lambda f_1 - R^0_\lambda f_1) \frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}\, d\tau \right) d\lambda -$$
$$-q(x)\left(-\frac{1}{2\pi i}\right) \left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0} \int\limits_{\gamma_n} \right) \left(\int\limits_0^t (R^0_\lambda f_1) \frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}\, d\tau \right) d\lambda =$$
$$= f(x,t) - q(x)\left(u_4(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t) + u_1(x,t)\right) = f(x,t) - q(x)u(x,t).$$

Таким образом, функция $u(x,t)$ является решением уравнения (1). Теорема доказана. □

Работа выполнена в рамках госзадания Минобрнауки России (проект № 1.1520.2014К).

Библиографический список

1. *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Резольвентный подход в методе Фурье // Докл. АН. 2014. Т. 458, № 2. С. 138–140. DOI: 10.7868/S0869565214260041.
2. *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Резольвентный подход для волнового уравнения // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55, № 2. С. 229–241. DOI: 10.7868/S0044466915020052.
3. *Корнев В. В., Хромов А. П.* Резольвентный подход к методу Фурье в одной смешанной задаче для волнового уравнения // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55, № 4. С. 621–630. DOI: 10.7868/S0044466915040079.
4. *Корнев В. В., Хромов А. П.* Резольвентный подход в методе Фурье для волнового уравнения в несамосопряженном случае // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55, № 7. С. 1156–1167.
5. *Петровский И. Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. М. : Физматгиз, 1961. 400 с.
6. *Чернятин В. А.* Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1991. 112 с.
7. *Расулов М. Л.* Метод контурного интеграла. М. : Наука, 1964. 462 с.
8. *Вагабов А. И.* Введение в спектральную теорию дифференциальных операторов. Ростов н/Д : Изд-во Рост. ун-та, 1994. 160 с.

Образец для цитирования:

Корнев В. В., Хромов А. П. Резольвентный подход к методу Фурье в смешанной задаче для неоднородного волнового уравнения // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 4. С. 403–413. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-403-413.

Resolvent Approach to Fourier Method in a Mixed Problem for Non-homogeneous Wave Equation

V. V. Kornev[1], **A. P. Khromov**[2]

[1]Vladimir V. Kornev, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., 410012, Saratov, Russia, KornevVV@info.sgu.ru
[2]Avgust P. Khromov, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., 410012, Saratov, Russia, KhromovAP@info.sgu.ru

Fourier method of obtaining classic solution is being justified in a mixed problem for non-homogeneous wave equation with a complex potential and fixed boundary conditions under minimal conditions on initial data. The proof is based on resolvent approach which does not need any information on eigen and associated functions of the corresponding spectral problem.

Key words: mixed problem, wave equation, Fourier method, resolvent.

The results have been obtained in the framework of the national tasks of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (project no. 1.1520.2014K).

References

1. Burlutskaya M. Sh., Khromov A. P. Resolvent approach in the Fourier method. *Dokl. Math.*, 2014, vol. 90, no. 2, pp. 545–548. DOI: 10.1134/S1064562414060076.
2. Burlutskaya M. Sh., Khromov A. P. The resolvent approach for the wave equation. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2015, vol. 55, iss. 2, pp. 227–239. DOI: 10.1134/S0965542515020050.
3. Kornev V. V., Khromov A. P. Resolvent approach to the Fourier method in a mixed problem for the wave equation. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2015, vol. 55, iss. 4, pp. 618–627. DOI: 10.1134/S0965542515040077.
4. Kornev V. V., Khromov A. P. A resolvent approach in the Fourier method for the wave equation: the non-selfadjoint case. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2015, vol. 55, iss. 7, pp. 1138–1149. DOI: 10.1134/S0965542515070088.
5. Petrovskii I. G. *Lektsii ob uravneniiakh s chastnymi proizvodnymi* [Lectures on Partial Differential Equations]. Moscow, Fizmatgiz, 1961. 400 p. (in Russian).
6. Chernyatin V. A. *Obosnovanie metoda Fur'e v smeshannoi zadache dlya uravnenii v chastnykh proizvodnykh* [Justification of the Fourier method in a mixed problem for partial differential equations]. Moscow, Moscow Univ. Press, 1991. 112 p. (in Russian).
7. Rasulov M. L. *Metod konturnogo integrala* [The method of the contour integral]. Moscow, Nauka, 1964. 462 p. (in Russian).
8. Vagabov A. I. *Vvedenie v spektral'nuiu teoriiu differentsial'nykh operatorov* [Introduction to the spectral theory of differential operators]. Rostov-on-Don, Rostov Univ. Press, 1994. 106 p. (in Russian).

Please cite this article in press as:
Kornev V. V., Khromov A. P. Resolvent Approach to Fourier Method in a Mixed Problem for Non-homogeneous Wave Equation. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 4, pp. 403–413 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-403-413.

УДК 514.76

ТРЕХМЕРНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА, НЕ ДОПУСКАЮЩИЕ ИНВАРИАНТНЫХ СВЯЗНОСТЕЙ

Н. П. Можей

Можей Наталья Павловна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры программного обеспечения информационных технологий, Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, mozheynatalya@mail.ru

Если существует хотя бы одна инвариантная аффинная связность на однородном пространстве, то пространство является изотропно-точным, однако обратное неверно. Возможность построения на однородном пространстве инвариантной аффинной связности изучал П. К. Рашевский, к построениям П. К. Рашевского несколько позже пришел К. Номидзу. Цель данной работы — изучить, в каких случаях невозможно построение инвариантной аффинной связности на трехмерном изотропно-точном однородном пространстве, и классифицировать пространства, не допускающие инвариантных связностей. Локальная классификация однородных пространств эквивалентна описанию эффективных пар алгебр Ли,