УДК 512.546

О ФАКТОРТОПОЛОГИЯХ В ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПОЛУГРУППАХ И ГРУППАХ

С. Р. Султанов

Султанов Сергей Режепович, кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой математики и методики преподавания математических дисциплин, Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина, s.sultanov@rsu.edu.ru

В работе рассматривается вопрос определения факторполугруппы топологической полугруппы при помощи открытых отношений конгруэнтности на данной топологической полугруппе. Основываясь на этом подходе, получено описание всех открытых гомоморфных образов топологической полугруппы. Аналогичным образом данный подход применяется к описанию всех открытых гомоморфных образов топологической группы.

Ключевые слова: топологическая факторполугруппа, гомоморфизмы топологических полугрупп, топологическая факторгруппа.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-422-424

Светлой памяти Учителя,
Виктора Владимировича Вагнера,
посвящается

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, нормальные делители дискретной группы находятся во взаимно однозначном соответствии с отношениями конгруэнтности на ней, и факторгруппы по конгруэнтностям совпадают с факторгруппами по нормальным делителям [1, с. 46]. Аналогичным образом мы можем получить все факторполугруппы, рассматривая отношения конгруэнтности на данной полугруппе. Так, например, Виктор Владимирович Вагнер показывал, что все гомоморфные образы полугруппы исчерпываются (с точностью до изоморфизма) ее факторполугруппами по конгруэнтностям (стабильным отношениям эквивалентности в его терминологии, которой мы и будем придерживаться) на заданной полугруппе. Здесь мы покажем, что данный подход можно применить к определению топологической факторполугруппы и факторгруппы, и установим в связи с этим аналоги некоторых известных свойств.

Напомним некоторые определения и известные результаты. Пусть G — полугруппа и ε — стабильное отношение эквивалентности на полугруппе G, т. е. для любых элементов a, b, c, d полугруппы G из эквивалентностей $a \sim b$ и $c \sim d$ следует $ac \sim bd$. Определим операцию «$\cdot$» произведения классов в фактор-множестве G/ε, полагая для любых классов эквивалентности $\varepsilon\,(a)$ и $\varepsilon\,(b)$: $\varepsilon\,(a) \cdot \varepsilon\,(b) = \varepsilon\,(a' b')$, где a' и b' — произвольные элементы из классов $\varepsilon\,(a)$ и $\varepsilon\,(b)$ соответственно. Тогда фактор-множество G/ε с определенной выше операцией «$\cdot$» образует факторполугруппу полугруппы G.

1. ТОПОЛОГИЯ ФАКТОРПОЛУГРУППЫ

Перейдем к вопросу определения топологической факторполугруппы. Пусть G — топологическая полугруппа и ε — стабильное отношение эквивалентности на полугруппе G. Наделим фактормножество G/ε фактортопологией [2, с. 147] и покажем, что если отношение эквивалентности ε является открытым на пространстве G, то определенная нами операция произведения классов «$\cdot$» будет непрерывной в факторполугруппе G/ε, наделенной фактортопологией. Действительно, пусть a^*, b^* — произвольные элементы факторпространства G/ε, U^* является открытой окрестностью элемента $a^* \cdot b^*$ в пространстве G/ε. Тогда множество $f^{-1}(U^*) = U$ является открытым в пространстве G, где f — естественное отображение пространства G на G/ε. Пусть $a^* = \varepsilon(a)$, $b^* = \varepsilon(b)$. Поскольку f — гомоморфизм полугруппы G на факторполугруппу G/ε, то $ab \in U$. Следовательно, найдутся открытые в пространстве G множества $V \ni a$ и $W \ni b$ такие, что $VW \subset U$. Тогда $f(VW) \subset U^*$, а поскольку $f(VW) = f(V) \cdot f(W)$, то $f(V)f(W) \subset U^*$. Заметим, что $f(V)$ и $f(W)$ являются открытыми окрестностями точек a^* и b^* факторпространства G/ε в силу открытости отображения f, и, следовательно, непрерывность операции «$\cdot$» в G/ε доказана.

Таким образом, мы установили что каждое открытое стабильное отношение эквивалентности на топологической полугруппе G будет определять *топологическую факторполугруппу* $(G/\varepsilon, \cdot)$, которую в дальнейшем мы будем называть факторполугруппой топологической полугруппы G.

2. ГОМОМОРФИЗМЫ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПОЛУГРУПП И ГРУПП

Докажем аналог известного для дискретной полугруппы свойства стабильных отношений эквивалентности.

Теорема 1. *Каждое стабильное открытое отношение эквивалентности на топологической полугруппе G определяет на ней открытый гомоморфизм, и обратно, каждому открытому гомоморфизму, определенному на топологической полугруппе G, будет соответствовать порожденное им открытое стабильное отношение эквивалентности на данной полугруппе.*

Доказательство. Пусть ε — стабильное открытое отношение эквивалентности на топологической полугруппе G. Тогда естественное отображение f пространства G на факторпространство G/ε является открытым гомоморфизмом топологической полугруппы G на ее факторполугруппу G/ε, и, следовательно, первая часть утверждения доказана. Далее, пусть g — открытый гомоморфизм топологической полугруппы G на топологическую полугруппу G'. Тогда гомоморфизм g определяет на полугруппе G стабильное отношение эквивалентности ε, задаваемое условием: $a \sim b$ тогда и только тогда, когда $g\,(a) = g\,(b)$ для всех элементов a и b из G. Далее заметим, что если U — открытое множество в G, то $g\,(U)$ открыто в G', а тогда $g^{-1}(g\,(U))$ является открытым подмножеством G, совпадая при этом с объединением всех классов эквивалентности ε, пересекающихся с U, и ,следовательно, отношение ε является открытым [3, с. 149]. Теорема доказана. □

Полученный результат позволяет нам описать все открытые гомоморфизмы топологической полугруппы.

Теорема 2. *Открытые гомоморфные образы топологической полугруппы G исчерпываются* (*с точностью до изоморфизма*) *ее факторполугруппами по всем открытым стабильным отношениям эквивалентности на данной полугруппе G.*

Доказательство. Как было показано выше, каждая факторполугруппа G/ε топологической полугруппы G по открытому стабильному отношению эквивалентности ε на G является образом данной полугруппы G при открытом естественном гоморфизме G на G/ε. Покажем, что других открытых гомоморфных образов у полугруппы G не существует (с точностью до изоморфизма). Пусть топологическая полугруппа G' является гомоморфным образом полугруппы G при некотором открытом гомоморфизме g. Тогда, как было показано, данный гомоморфизм порождает открытое стабильное отношение эквивалентности ε на полугруппе G, определяющее разбиение G на классы эквивалентности $\left\{g^{-1}(y)\right\}_{y\in G'}$. Заметим, что гомоморфизм g является факторотображением по следствию 2.4.8 [2, с. 149]. Тогда отображение $\overline{g}$ факторпространства G/ε на пространство G', определяемое формулой $\overline{g}(g^{-1}(y)) = y$ для каждого $y \in G'$, является гомеоморфизмом по теореме 2.4.3 [2, с. 148]. Заметим далее, что поскольку $\varepsilon\,(a) \cdot \varepsilon\,(b) = \varepsilon\,(ab)$ для всех $a, b \in G$, то $g^{-1}(a') \cdot g^{-1}(b') = g^{-1}(a'b')$ для любых $a'b' \in G'$, а тогда $\overline{g}(g^{-1}(a') \cdot g^{-1}(b')) = \overline{g}(g^{-1}(a'b')) = a'b' = \overline{g}(g^{-1}(a'))\overline{g}(g^{-1}(b'))$, и, следовательно, $\overline{g}$ является гомоморфизмом полугруппы G/ε на G'. Таким образом, топологические полугруппы G/ε и G' будут изоморфны. Теорема доказана. □

Перейдем к рассмотрению стабильных отношений эквивалентности, заданных на топологической группе G. Как известно, каждое такое отношение порождает в дискретной группе ее нормальный делитель, совпадающий с классом эквивалентных единице элементов группы, и обратно, каждый нормальный делитель дискретной группы задает на ней стабильное отношение эквивалентности. Также известно, что все открытые гомоморфные образы топологической группы G исчерпываются (с точностью до изоморфизма) всеми ее факторгруппами по нормальным делителям группы G [2, с. 123]. Опираясь на эти факты, покажем справедливость следующей теоремы.

Теорема 3. *Открытые гомоморфные образы топологической группы G исчерпываются (с точностью до изоморфизма) ее факторгруппами G/ε по всем стабильным отношениям эквивалентности на группе G, обладающим замкнутыми классами эквивалентности.*

Доказательство. Заметим, что между всеми нормальными делителями топологической группы G и стабильными отношениями эквивалентности на ней, обладающими замкнутыми классами эквивалентности, существует взаимно однозначное соответствие. Действительно, если N — нормальный делитель топологической группы G, то разбиение группы G на смежные классы по нормальному делителю N порождает на группе G стабильное отношение эквивалентности ε. Заметим, что множество $\varepsilon(e)$ будет замкнутым подмножеством G в силу равенства $\varepsilon(e) = N$, тогда каждый класс $\varepsilon(a) = aN$ также замкнут в пространстве G. Обратно, пусть ε — стабильное отношение эквивалентности на топологической группе G, и классы эквивалентности замкнуты в G. Тогда класс $\varepsilon(e)$ является нормальным делителем топологической группы G, и таким образом указанное соответствие установлено. Тогда если ε — стабильное отношение эквивалентности в группе G, обладающее замкнутыми классами эквивалентности, то класс $\varepsilon(e)$ является нормальным делителем топологической группы G и факторгруппа G/ε является открытым гомоморфным образом группы G при естественном отображении [2, с. 122]. Пусть далее топологическая группа G' является гомоморфным образом группы G при некотором открытом гомоморфизме g. Тогда ядро данного гомоморфизма, являясь замкнутым нормальным делителем группы G, порождает на ней стабильное отношение эквивалентности ε, обладающее замкнутыми классами эквивалентности, и группы G/ε и G' будут изоморфны по теореме 11 [2, с. 123]. Теорема доказана. □

Библиографический список

1. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М. : Наука, 1982. 288 с.
2. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М. : Мир, 1986. 752 с.
3. *Понтрягин Л. С.* Непрерывные группы. М. : Наука, 1984. 520 с.

Образец для цитирования:
Султанов С. Р. О фактортопологиях в топологических полугруппах и группах // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 4. С. 422–424. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-422-424.

On a Quotient Topology in Topological Semigroups and Groups

S. R. Sultanov

Sergey R. Sultanov, Ryazan State University, 46, Svobody str., Ryazan, Russia, s.sultanov@rsu.edu.ru

The paper discusses the definution of the topological factor semigrop using the open congruence relations on this topological semigroup. Based on this approach, a description of all open gomomorfic images of topological semigroup is obtained. Similarly, this approach is used to describe all open homomorphic images of a topological group.

Key words: topological factor semigroup, homomorphisms of topological semigroup, topological factor group..

References

1. Kargapolov M. E., Merzlyakov U. E. *Osnovy teorii grupp* [Basics of group theory]. Moscow, Nauka, 1982. 288 p. (in Russian).
2. Engelking R. *Obshchaia topologiia* [General topology]. Moscow, Mir, 1986. 752 p. (in Russian).
3. Pontryagin L. S. *Nepreryvnye gruppy* [Continuous groups]. Moscow, Nauka, 1984. 520 p. (in Russian).

Please cite this article in press as:
Sultanov S. R. On a Quotient Topology in Topological Semigroups and Groups. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 4, pp. 422–424 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-422-424.