УДК 517.518.82

ПОЛИНОМЫ БЕРНШТЕЙНА ДЛЯ СТАНДАРТНОГО МОДУЛЯ НА СИММЕТРИЧНОМ ОТРЕЗКЕ

И. В. Тихонов[1], В. Б. Шерстюков[2], М. А. Петросова[3]

[1]Тихонов Иван Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической физики, факультет ВМК, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, ivtikh@mail.ru

[2]Шерстюков Владимир Борисович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, shervb73@gmail.com

[3]Петросова Маргарита Арсеновна, аспирантка кафедры математического анализа, Московский педагогический государственный университет, petrosova05@mail.ru

Изучаются полиномы Бернштейна на симметричном отрезке. Установлены основные алгебраические факты, связанные с полиномами Бернштейна от стандартного модуля. В частности, на основе формулы Темпла получены рекуррентные соотношения, из которых строго выведено разложение Поповичу. Указаны удобные формулы для первой и второй производных. Как итог, полностью обоснована явная алгебраическая запись для полиномов Бернштейна от модуля. Отмечены некоторые следствия.

Ключевые слова: полиномы Бернштейна, аппроксимация модуля.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-425-435

ВВЕДЕНИЕ

Основные факты из теории классических полиномов Бернштейна на стандартном отрезке $[0,1]$ представлены в [1–5]. В недавнем исследовании [6] (см. также обзор [7]) подробно изучены математические эффекты, связанные с полиномами Бернштейна для функции $f(x) = |2x-1|$, т. е. для простого симметричного модуля, взятого на отрезке $[0,1]$. Там же [6, с. 38] отмечено, что характер некоторых результатов может измениться при переносе ситуации на другой отрезок. В частности, полезно специально выделить *стандартный модуль*

$$f(x) = |x| \tag{1}$$

на симметричном отрезке $[-1,1]$. В настоящей работе мы установим и систематически изложим все ключевые формулы, связанные с полиномами Бернштейна от функции (1). Исследование проведем непосредственно на $[-1,1]$ без обращения к прежним результатам [6], полученным для $[0,1]$.

Отметим, что случай симметричного отрезка $[-1,1]$ в теории полиномов Бернштейна привлек внимание в последнее время в связи со своими характерными особенностями (см. [8]). В работе [9] подробно обсуждается специальное правило склеивания, действующее для полиномов Бернштейна на $[-1,1]$. Используем некоторые соображения из [9].

Напомним, что для произвольной функции $f \in C[-1,1]$ полиномы Бернштейна определяют формулой

$$B_n(f,x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{2k}{n}-1\right) C_n^k \,(1+x)^k \,(1-x)^{n-k}, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

с независимой переменной $x \in \mathbb{R}$ и биномиальными коэффициентами C_n^k. Это так называемые *полиномы Бернштейна на симметричном отрезке* $[-1,1]$.

Важную роль играет формула Темпла, действующая для разности двух последовательных полиномов Бернштейна. На симметричном отрезке для полиномов (2) формула Темпла приобретает вид

$$B_{n+1}(f,x) - B_n(f,x) = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{n} Q_{n,k}(f)\,(1+x)^k\,(1-x)^{n-k+1}, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

с коэффициентами

$$Q_{n,k}(f) = C_{n+1}^k\, f\left(\frac{2k}{n+1}-1\right) - C_n^k\, f\left(\frac{2k}{n}-1\right) - C_n^{k-1} f\left(\frac{2(k-1)}{n}-1\right). \tag{4}$$

Используя обозначения для разделенных разностей первого и второго порядков

$$[f;\ x_1, x_0] \equiv \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \qquad [f;\ x_2, x_1, x_0] \equiv \frac{[f;\ x_2, x_1] - [f;\ x_1, x_0]}{x_2 - x_0},$$

можно перейти к эквивалентным выражениям

$$Q_{n,k}(f) = -\frac{2}{n+1}\, C_{n-1}^{k-1} \left(\left[f;\ \frac{2k}{n} - 1,\ \frac{2k}{n+1} - 1 \right] - \left[f;\ \frac{2k}{n+1} - 1,\ \frac{2(k-1)}{n} - 1 \right] \right) \tag{5}$$

и

$$Q_{n,k}(f) = -\frac{4}{n(n+1)}\, C_{n-1}^{k-1} \left[f;\ \frac{2k}{n} - 1,\ \frac{2k}{n+1} - 1,\ \frac{2(k-1)}{n} - 1 \right]. \tag{6}$$

При работе с формулами (4)–(6) полезно учитывать расположение точек

$$-1 \leqslant \frac{2(k-1)}{n} - 1 < \frac{2k}{n+1} - 1 < \frac{2k}{n} - 1 \leqslant 1, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

верное при любом $n \in \mathbb{N}$. Подробнее о формуле Темпла на $[-1, 1]$ см. [9]. Будем основываться на перечисленных соотношениях при выводе ключевых формул, связанных с полиномами Бернштейна для стандартного модуля (1).

1. ПОЛИНОМЫ БЕРНШТЕЙНА ДЛЯ МОДУЛЯ

Для функции (1) определение полиномов Бернштейна (2) дает выражение

$$B_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{2k}{n} - 1 \right| C_n^k\, (1+x)^k\, (1-x)^{n-k}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Полиномы (7) обозначаем просто $B_n(x)$ без указания на функцию f из формулы (1).

Прямые вычисления по правилу (7) приводят к результатам:

$$B_1(x) = 1,$$

$$B_2(x) = B_3(x) = \frac{1}{2}\, \left(1 + x^2\right),$$

$$B_4(x) = B_5(x) = \frac{1}{8}\, \left(3 + 6x^2 - x^4\right),$$

$$B_6(x) = B_7(x) = \frac{1}{16}\, \left(5 + 15x^2 - 5x^4 + x^6\right),$$

$$B_8(x) = B_9(x) = \frac{1}{128}\, \left(35 + 140x^2 - 70x^4 + 28x^6 - 5x^8\right),$$

$$B_{10}(x) = B_{11}(x) = \frac{1}{256}\, \left(63 + 315x^2 - 210x^4 + 126x^6 - 45x^8 + 7x^{10}\right),$$

$$B_{12}(x) = B_{13}(x) = \frac{1}{1024}\, \left(231 + 1386x^2 - 1155x^4 + 924x^6 - 495x^8 + 154x^{10} - 21x^{12}\right).$$

Объем проводимых вычислений быстро увеличивается с ростом номера $n \in \mathbb{N}$, и последние формулы из представленного списка сложно получить без компьютерной поддержки.

Установим общую алгебраическую запись по степеням переменной x, действующую для всех полиномов (7). Попутно отметим ряд других интересных фактов. Вывод нужных формул прямо из определения (7) представляется достаточно сложным. Используем обходной путь, связанный с формулой Темпла. Начнем со вспомогательных рекуррентных соотношений, показывающих, что происходит с полиномами (7) при последовательном увеличении номера $n \in \mathbb{N}$.

2. РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Всюду далее рассматриваем полиномы $B_n(x)$ из формулы (7). Базу исследования составляет такое утверждение.

Теорема 1. *При всех* $m \in \mathbb{N}$ *справедливы равенства*

$$B_{2m+1}(x) = B_{2m}(x), \tag{8}$$

$$B_{2m+2}(x) = B_{2m+1}(x) - \frac{1}{m+1}\, 2^{-2m-1}\, C_{2m}^{m}\, (1-x^2)^{m+1}. \tag{9}$$

Доказательство. Используем формулу Темпла (3) с коэффициентами $Q_{n,k}(f)$ в записи (5). Для функции (1) вычислим разделенные разности на $[-1,1]$. Заметим, что $[f;\, x_1, x_0] = -1$ при $x_1,\, x_0 \in [-1,0]$ и $[f;\, x_1, x_0] = 1$ при $x_1,\, x_0 \in [0,1]$ всякий раз, когда $x_1 \neq x_0$. Учтем также, что

$$-1 \leqslant \frac{2(k-1)}{n} - 1 < \frac{2k}{n+1} - 1 < \frac{2k}{n} - 1 \leqslant 0, \qquad k \leqslant \frac{n}{2},$$

и

$$0 \leqslant \frac{2(k-1)}{n} - 1 < \frac{2k}{n+1} - 1 < \frac{2k}{n} - 1 \leqslant 1, \qquad k \geqslant \frac{n+2}{2}.$$

Далее надо различать два случая.

Пусть $n = 2m$. Тогда $n/2 = m$ и $(n+2)/2 = m+1$. По формуле (5) заключаем, что $Q_{n,k}(f) = 0$ при всех $k \leqslant m$ и при всех $k \geqslant m+1$, т. е. вообще при всех k от 1 до n. Принимая во внимание формулу Темпла (3), получаем равенство (8).

Пусть $n = 2m+1$. Тогда, кроме нулевых слагаемых при $k \leqslant n/2 = (2m+1)/2$ и $k \geqslant (n+2)/2 = (2m+3)/2$, в формуле (3) возникнет единственное ненулевое слагаемое при $k = m+1$ с коэффициентом

$$Q_{2m+1,\, m+1}(f) = -\frac{1}{m+1}\, C_{2m}^{m} \left(\left[f;\, \frac{2(m+1)}{2m+1} - 1,\, 0 \right] - \left[f;\, 0,\, \frac{2m}{2m+1} - 1 \right] \right) =$$
$$= -\frac{1}{m+1}\, C_{2m}^{m} \bigl(1 - (-1)\bigr) = -\frac{2}{m+1}\, C_{2m}^{m}.$$

Подставляя данное значение в (3), получаем равенство (9). Теорема доказана. □

Соотношение (8) для полиномов (7) есть проявление общего *правила склеивания*, действующего на $[-1,1]$ для полиномов Бернштейна от кусочно-линейных функций с рациональными абсциссами точек излома (см. [9]). В силу свойства (8) изучаем далее лишь полиномы $B_{2m}(x)$ с четными номерами $n = 2m$.

Комбинируя (8) и (9) и замечая, что

$$\frac{1}{m+1}\, 2^{-2m-1}\, C_{2m}^{m} = \frac{1}{2m+1}\, 2^{-2(m+1)}\, C_{2m+2}^{m+1}, \qquad m \in \mathbb{N},$$

получаем соответствующее рекуррентное соотношение

$$B_{2m+2}(x) = B_{2m}(x) - \frac{1}{2m+1}\, 2^{-2(m+1)}\, C_{2m+2}^{m+1}\, (1-x^2)^{m+1}, \qquad m \in \mathbb{N}. \tag{10}$$

Формула (10) позволяет быстро вывести ключевое представление для полиномов Бернштейна от функции (1), упомянутое без обоснования в работе Поповичу (Popoviciu) [10].

3. РАЗЛОЖЕНИЕ ПОПОВИЧУ

Следующее соотношение будем называть *разложением Поповичу* (ср. с [10, с. 54]).

Теорема 2. *При любом* $m \in \mathbb{N}$ *справедлива формула*

$$B_{2m}(x) = 1 - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2k-1}\, 2^{-2k}\, C_{2k}^{k}\, (1-x^2)^{k}. \tag{11}$$

Доказательство. При $m = 1$ для полинома $B_2(x)$ имеем представление

$$B_2(x) = \frac{1}{2}\left(1 + x^2\right) = 1 - \frac{1}{2}\left(1 - x^2\right),$$

очевидно согласованное с (11). Дальнейшая индукция по $m \in \mathbb{N}$ также очевидна с учетом рекуррентного соотношения (10). Теорема доказана. □

Тот же Поповичу указал в [10] на связь формулы (11) с известным разложением для стандартного модуля. Действительно, следуя идее Лебега [11], представим модуль следующим «биномиальным» рядом:

$$|x| = \sqrt{x^2} = \sqrt{1-(1-x^2)} = 1 - \frac{1}{2}\left(1-x^2\right) - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(2k-3)!!}{2^k\, k!}\,(1-x^2)^k =$$

$$= 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}\, \frac{(2k)!}{2^{2k}\,(k!)^2}\,(1-x^2)^k$$

с равномерной сходимостью при $|1-x^2| \leqslant 1$ и расходимостью при $|1-x^2| > 1$. В окончательном виде

$$|x| = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}\, 2^{-2k}\, C_{2k}^{k}\,(1-x^2)^k, \qquad x \in \Big[-\sqrt{2},\, \sqrt{2}\,\Big]. \tag{12}$$

Согласно (11) полиномы $B_{2m}(x)$ совпадают с частичными суммами ряда (12). Отсюда следует такой результат.

Теорема 3. *При $n \to \infty$ последовательность полиномов Бернштейна* (7) *сходится к функции* (1) *равномерно на отрезке $\Big[-\sqrt{2},\, \sqrt{2}\,\Big]$ и расходится на $\mathbb{R}$ всюду вне этого отрезка.*

Доказательство. Сделанное утверждение становится очевидным, если учесть правило склеивания (8) и сравнить разложение (11) с равномерно сходящимся рядом (12). □

Теорему 3 можно дополнительно усилить, осуществив естественный выход в комплексную плоскость. Заменив в рассуждениях переменную $x \in \mathbb{R}$ комплексной переменной $z \in \mathbb{C}$, получим, что полиномы $B_{2m}(z)$ при $m \to \infty$ будут равномерно сходиться на компакте в $\mathbb{C}$, ограниченном лемнискатой

$$\left|1 - z^2\right| = 1, \tag{13}$$

в левой петле — к функции $f_1(z) = -z$, а в правой петле — к функции $f_2(z) = z$. Данный факт тесно связан с общей теорией Канторовича о сходимости полиномов Бернштейна в комплексной плоскости (ср. [1, с. 91–92]). Отрезок сходимости, упомянутый в теореме 3, является большой центральной осью для лемнискаты (13). Можно дополнительно уточнить характер сходимости полиномов Бернштейна внутри лемнискаты, но это выходит за рамки нашего исследования. Сейчас нас интересуют комбинаторные и алгебраические аспекты, возникающие при изучении полиномов (7).

4. ПРОИЗВОДНЫЕ ПОЛИНОМОВ БЕРНШТЕЙНА

С помощью разложения Поповичу можно получить удобные выражения для первой и второй производных от рассматриваемых полиномов Бернштейна.

Теорема 4. *При любом $m \in \mathbb{N}$ справедливы формулы*

$$B_{2m}'(x) = x \sum_{k=0}^{m-1} 2^{-2k}\, C_{2k}^{k}\,(1-x^2)^k, \tag{14}$$

$$B_{2m}''(x) = 2^{-2m+1}\, C_{2m}^{m}\, m\,(1-x^2)^{m-1}. \tag{15}$$

Доказательство. Продифференцировав разложение (11), получим

$$B_{2m}'(x) = x \sum_{k=1}^{m} \frac{k}{2k-1}\, 2^{-2k+1}\, C_{2k}^{k}\,(1-x^2)^{k-1}.$$

Заметим, что

$$\frac{k}{2k-1}\, 2^{-2k+1}\, C_{2k}^{k} = 2^{-2(k-1)}\, C_{2k-2}^{k-1}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Поэтому

$$B_{2m}'(x) = x \sum_{k=1}^{m} 2^{-2(k-1)}\, C_{2k-2}^{k-1}\,(1-x^2)^{k-1} = x \sum_{k=0}^{m-1} 2^{-2k}\, C_{2k}^{k}\,(1-x^2)^k.$$

Равенство (14) доказано. Для второй производной имеем соответственно

$$B_{2m}''(x) = \sum_{k=0}^{m-1} 2^{-2k}\, C_{2k}^{k}\, (1-x^2)^k \;-\; x^2 \sum_{k=0}^{m-1} 2^{-2k+1}\, C_{2k}^{k}\, k\,(1-x^2)^{k-1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} 2^{-2k}\, C_{2k}^{k}\, (1-x^2)^k \;+\; (1-x^2-1) \sum_{k=0}^{m-1} 2^{-2k+1}\, C_{2k}^{k}\, k\,(1-x^2)^{k-1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} (2k+1)\, 2^{-2k}\, C_{2k}^{k}\, (1-x^2)^k \;-\; \sum_{k=1}^{m-1} 2^{-2k+1}\, C_{2k}^{k}\, k\,(1-x^2)^{k-1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} (2k+1)\, 2^{-2k}\, C_{2k}^{k}\, (1-x^2)^k \;-\; \sum_{k=0}^{m-2} (k+1)\, 2^{-2k-1}\, C_{2k+2}^{k+1}\, (1-x^2)^k.$$

Поскольку

$$(k+1)\, 2^{-2k-1}\, C_{2k+2}^{k+1} = (2k+1)\, 2^{-2k}\, C_{2k}^{k}, \qquad k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

то

$$B_{2m}''(x) = \sum_{k=0}^{m-1} (2k+1)\, 2^{-2k}\, C_{2k}^{k}\, (1-x^2)^k \;-\; \sum_{k=0}^{m-2} (2k+1)\, 2^{-2k}\, C_{2k}^{k}\, (1-x^2)^k =$$

$$= (2m-1)\, 2^{-2(m-1)}\, C_{2m-2}^{m-1}\, (1-x^2)^{m-1} = 2^{-2m+1}\, C_{2m}^{m}\, m\,(1-x^2)^{m-1},$$

что соответствует формуле (15). Теорема доказана. □

Формула, подобная (15), без обоснований (и с опечаткой) также была отмечена в [10, с. 54] в качестве добавления к разложению (11). Несколько неожиданно, что при двукратном дифференцировании полинома $B_{2m}(x)$ происходят такие упрощения. Однако, результат допускает простое объяснение на качественном уровне.

Действительно, вторая производная от порождающей функции $f(x) = |x|$ в некотором естественном смысле совпадает с удвоенной δ-функцией. Сходимость же, присущая полиномам Бернштейна, обладает определенной устойчивостью по отношению к дифференцированию (см. [1, с. 25–27]). Разбираемый пример наглядно показывает, что такая устойчивость сохраняется при дифференцировании вплоть до обобщенных функций. В случае стандартного отрезка $[0,1]$ этот момент обсуждался в [6, с. 16] (см. также [7, с. 149]). Для полноты картины проверим, что и сейчас полиномы $B_{2m}''(x)$ из формулы (15) образуют на $[-1,1]$ классическую 2δ-образную последовательность, сходящуюся к $2\delta(x)$.

Базовые геометрические свойства очевидны: первый полином $B_2''(x) \equiv 1$ оказывается вырожденным, прочие же полиномы (15), являясь четными и непостоянными, строго положительны на $(-1,1)$, обращаются в нуль при $x = \pm 1$ и имеют центральный максимум при $x = 0$. Остальное заключено в следующем утверждении.

Теорема 5. *Последовательность полиномов из формулы* (15)*, взятая на* $[-1,1]$*, обладает характерными свойствами* 2δ*-образной последовательности:*

1. $B_{2m}''(0) \to \infty$ *при* $m \to \infty$*;*
2. $B_{2m}''(x) \to 0$ *при* $m \to \infty$ *для любого* $x \neq 0$ *из отрезка* $[-1,1]$*;*
3. $\int\limits_{-1}^{1} B_{2m}''(x)\, dx = 2$ *при всех* $m \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Два первых свойства полиномов (15) без труда проверяются с помощью классической асимптотики

$$2^{-2m}\, C_{2m}^{m} \sim \frac{1}{\sqrt{m\pi}}, \qquad m \to \infty, \tag{16}$$

и при учете значений выражения $1 - x^2$ в зависимости от выбора точки $x \in [-1, 1]$. При проверке третьего свойства, привлекая формулу (14), имеем

$$\int\limits_{-1}^{1} B''_{2m}(x)\,dx = B'_{2m}(1) - B'_{2m}(-1) = 1 - (-1) = 2, \qquad m \in \mathbb{N},$$

что и требовалось показать. Означенный интеграл можно также вычислить непосредственно, исходя из представления (15), если сделать замену $x = 2t - 1$ и воспользоваться известным равенством

$$\int\limits_{0}^{1} t^p\,(1-t)^q\,dt = \frac{p!\,q!}{(p+q+1)!}, \qquad p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Результат будет такой же. Теорема доказана. □

Любопытно, что последовательность полиномов (15) отличается лишь константой и способом нумерации от последовательности

$$P_m(x) \equiv \frac{1}{2}\,\frac{(2m+1)!!}{(2m)!!}\,(1-x^2)^m \quad \left(= \frac{1}{2}\,B''_{2m+2}(x)\right), \qquad m \in \mathbb{N}, \tag{17}$$

использованной Э. Ландау [12] в его доказательстве аппроксимационной теоремы Вейерштрасса. В связи с доказательством Ландау отметим содержательный обзор Валле Пуссена [13, с. 112], хотя полиномы (17) даны там с ошибкой в числовом множителе.

Итак, изучаемые полиномы Бернштейна (7) воплощают неожиданную связь трех основных подходов, принятых в литературе (см., например, [14, с. 101–110]) для доказательства теоремы Вейерштрасса. Связь с методом Лебега осуществляется посредством разложения (12) для функции $|x|$; связь с методом Ландау заложена в выражениях (15) для вторых производных $B''_{2m}(x)$; и наконец, связь с методом Бернштейна ясна из самого генезиса полиномов (7).

5. ЗНАЧЕНИЯ В НУЛЕ

При получении основного результата понадобится следующая информация о значениях полиномов Бернштейна в нуле.

Теорема 6. *При всех $m \in \mathbb{N}$ верны соотношения*

$$B_{2m}(0) = 2^{-2m}\,C_{2m}^{m}, \qquad B'_{2m}(0) = 0. \tag{18}$$

Доказательство. По формуле (11) имеем

$$B_{2m}(0) = 1 - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2k-1}\,2^{-2k}\,C_{2k}^{k}, \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Воспользуемся тождеством

$$\frac{1}{2k-1}\,C_{2k}^{k} = 4\,C_{2k-2}^{k-1} - C_{2k}^{k}, \qquad k \in \mathbb{N},$$

и получим

$$B_{2m}(0) = 1 - \sum_{k=1}^{m} 2^{-2(k-1)}\,C_{2k-2}^{k-1} + \sum_{k=1}^{m} 2^{-2k}\,C_{2k}^{k} =$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{m-1} 2^{-2k}\,C_{2k}^{k} + \sum_{k=1}^{m} 2^{-2k}\,C_{2k}^{k} = 2^{-2m}\,C_{2m}^{m}.$$

Значения $B_{2m}(0)$ найдены. Результат для $B'_{2m}(0)$ очевиден в силу явной записи (14), а также по соображениям четности полиномов $B_{2m}(x)$. Теорема доказана. □

Упомянем к месту, что значения полиномов Бернштейна в точке излома порождающего их модуля вычислялись по разным поводам многими авторами, начиная с Поповичу [10, с. 53]. Изложенный способ, основанный на разложении (11), предложен в обзоре [7, с. 154].

6. АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ЗАПИСЬ ПОЛИНОМОВ БЕРНШТЕЙНА

Установим итоговый результат, относящийся к явной алгебраической записи изучаемых полиномов Бернштейна.

Теорема 7. *При любом* $m \in \mathbb{N}$ *справедлива формула*

$$B_{2m}(x) = 2^{-2m}\, C_{2m}^{m} \left[1 + \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\, C_m^k\, x^{2k} \right]. \tag{19}$$

Доказательство. Руководящая идея проста: исходим из того, что вторая производная $B''_{2m}(x)$ имеет компактное представление (15). Разложим по биному

$$(1-x^2)^{m-1} = \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j\, C_{m-1}^j\, x^{2j}, \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Подставляя в (15), запишем

$$B''_{2m}(x) = 2^{-2m+1}\, C_{2m}^m\, m \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j\, C_{m-1}^j\, x^{2j} = 2^{-2m+1}\, C_{2m}^m\, m! \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(-1)^j}{j!\,(m-1-j)!}\, x^{2j}.$$

Дважды проинтегрируем возникшее равенство с учетом начальных условий (18). Получим

$$B_{2m}(x) = 2^{-2m}\, C_{2m}^m \left[1 + 2m! \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(-1)^j}{j!\,(m-1-j)!}\; \frac{x^{2j+2}}{(2j+1)(2j+2)} \right] =$$

$$= 2^{-2m}\, C_{2m}^m \left[1 + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(-1)^j}{2j+1}\; \frac{m!}{(j+1)!\,(m-j-1)!}\, x^{2j+2} \right] =$$

$$= 2^{-2m}\, C_{2m}^m \left[1 + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(-1)^j}{2j+1}\, C_m^{j+1}\, x^{2j+2} \right] = 2^{-2m}\, C_{2m}^m \left[1 + \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\, C_m^k\, x^{2k} \right].$$

Теорема доказана. □

Явная формула (19) соответствует одному прежнему результату, отмеченному в работе [6, с. 38]. Способ рассуждения в [6] был принципиально иным и, в итоге, более сложным. Отметим также, что пример функции $f(x) = |x|$ как порождающей для полиномов Бернштейна (7) упоминался в классической монографии [14, с. 111] (ср. с № 3130 в задачнике Б. П. Демидовича). Однако форма записи для $B_{2m}(x)$, предложенная в [14], была весьма несовершенной и мало отличалась от исходного определения (7).

Как видно из нашей формулы (19), полиномы $B_{2m}(x)$ имеют характерную особенность: два младших слагаемых всегда положительны, а последующие — знакопеременны. Означенный эффект хорошо виден на примерах, представленных в параграфе 2. Допустима сокращенная запись

$$B_{2m}(x) = 2^{-2m}\, C_{2m}^m \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\, C_m^k\, x^{2k}, \qquad m \in \mathbb{N}, \tag{20}$$

очевидно согласованная с (19). Укажем еще на связи полученных результатов с некоторыми комбинаторными соотношениями.

7. КОМБИНАТОРНЫЕ СЛЕДСТВИЯ

Как известно, значения полиномов Бернштейна на концах исходного отрезка совпадают со значениями порождающей функции. Соответственно в нашем случае верно, что $B_{2m}(1) = 1$ при любом $m \in \mathbb{N}$. Подставляя $x = 1$ в представление (20) и преобразуя результат, приходим к тождеству

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\, C_m^k \;=\; \frac{2^{2m}}{C_{2m}^m} \;=\; \frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}\,, \qquad m \in \mathbb{N}. \tag{21}$$

Формула (21) согласована с общим правилом [15, пример 4.2.2.45] вида

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{k+a}\, C_m^k \;=\; \frac{m!}{a(a+1)\ldots(a+m)}, \qquad m \in \mathbb{N}. \tag{22}$$

Для получения (21) надо подставить в (22) значение $a = -1/2$.

Нахождение в компактной форме значений $B_{2m}(x)$ в точках $x \in \mathbb{R}$, отличных от 0 и ± 1, представляет серьезные трудности, возможно, даже не разрешимые. Однако согласно теореме 3 для полиномов $B_{2m}(x)$ известна точная область сходимости. Обращаясь к формуле (20), можем утверждать, что

$$2^{-2m}\, C_{2m}^m \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\, C_m^k\, x^{2k} \;\to\; x \tag{23}$$

при $m \to \infty$ для любого $x \in \left[0, \sqrt{2}\,\right]$. Делая подстановку $q = x^2$ и учитывая соотношение (16), получаем асимптотику

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\, C_m^k\, q^k \;\sim\; \sqrt{m\pi q}, \qquad m \to \infty, \tag{24}$$

верную при любом $q \in (0, 2]$. Асимптотика (24) равномерна по $q \in [\,\delta, 2\,]$ с фиксированным малым $\delta > 0$. Поскольку характер сходимости в формуле (23) можно конкретизировать, а выражение $2^{-2m}\, C_{2m}^m$ допускает точные оценки на основе (16), то и соотношение (24) можно подкрепить соответствующими двустронними оценками, годными при всех $m \in \mathbb{N}$ (если, конечно, подобный результат будет представлять интерес).

Нам не удалось обнаружить аналогов формулы (24) в фундаментальном справочнике [15]. Имеющееся там правило [15, пример 4.2.3.20] вида

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{k+a}\, C_m^k\, q^k \;=\; q^{-a} \int_0^q t^{a-1}\,(1-t)^m\, dt, \qquad m \in \mathbb{N}, \tag{25}$$

применимо лишь при $a > 0$. Между прочим, явная формула (22) очевидно получена из (25) вычислением интеграла при $q = 1$ с последующим аналитическим продолжением на все значения $a \in \mathbb{C}$, кроме $a = 0,\ a = -1,\ \ldots,\ a = -m$. Переход же от тождества (25) к асимптотике (24) представляется не вполне очевидным.

8. ПРОБЛЕМА РОСТА КОЭФФИЦИЕНТОВ

В связи с формулами, установленными для полиномов Бернштейна от стандартного модуля (1), возникает содержательное направление нового специального исследования. На наш взгляд, существенный интерес представляет задача о скорости роста коэффициентов полиномов $B_{2m}(x)$ в явной алгебраической записи (19). Требуется выделить максимальный по модулю коэффициент и по возможности точно выяснить его поведение при возрастании значения $m \in \mathbb{N}$. Аналогичные вопросы желательно разрешить и для других, «соседних», коэффициентов. Было бы полезно также оценить скорость роста при $m \to \infty$ суммы модулей всех коэффициентов в (19), т. е. суммы

$$\sigma_{2m} = 2^{-2m}\, C_{2m}^m \left[\, 1 + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2k-1}\, C_m^k \right], \qquad m \in \mathbb{N}. \tag{26}$$

Подходящую асимптотику для суммы (26) целесообразно дополнить качественными двусторонними оценками, верными при всех $m \in \mathbb{N}$.

Предварительные результаты, представленные в [16], показывают, что случай симметричного отрезка $[-1, 1]$ обладает существенной спецификой по сравнению со случаем стандартного отрезка $[0, 1]$, на котором проведено подробное исследование [6]. В частности, на симметричном отрезке поведение коэффициентов первых полиномов $B_2(x)$, $B_4(x)$, $\ldots$, $B_{12}(x)$, перечисленных в параграфе 1 настоящей статьи, резко отличается от того, что будет наблюдаться для полиномов (19) при больших значениях $m \in \mathbb{N}$.

Отмеченные вопросы находятся в русле общих исследований [17–19] по скорости роста коэффициентов полиномов при равномерных аппроксимациях непрерывных функций.

Авторы признательны А. Ю. Трынину, обратившему внимание на связь наших задач с указанным общим направлением.

Библиографический список

1. *Lorentz G. G.* Bernstein Polynomials. N. Y. : Chelsea Publ. Comp., 1986. xi+134 p.
2. *Виденский В. С.* Многочлены Бернштейна : учеб. пособие к спецкурсу. Л. : ЛГПИ им. А. И. Герцена, 1990. 64 с.
3. *Натансон И. П.* Конструктивная теория функций. М.; Л. : ГИТТЛ, 1949. 688 с.
4. *Davis P. J.* Interpolation and Approximation. N. Y. : Dover, 1975. xvi+394 p.
5. *DeVore R. A., Lorentz G. G.* Constructive Approximation. Berlin ; Heidelberg ; N. Y. : Springer–Verlag, 1993. x+450 p.
6. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.* Приближение модуля полиномами Бернштейна // Вестн. Челяб. гос. ун-та. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 15, № 26. С. 6–40.
7. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А.* Полиномы Бернштейна : старое и новое // Математический форум. Т. 8, ч. 1. Исследования по математическому анализу. Владикавказ : ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2014. С. 126–175.
8. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А.* Случай симметричного отрезка в теории классических полиномов Бернштейна // Системы компьютерной математики и их приложения : материалы XV междунар. науч. конф. Смоленск : СмолГУ, 2014. Вып. 15. С. 184–186.
9. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А.* Правило склеивания для полиномов Бернштейна на симметричном отрезке // Изв. Сарат. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 3. С. 288–300. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-288-300.
10. *Popoviciu T.* Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur // Mathematica (Cluj). 1935. Vol. 10. P. 49–54.
11. *Lebesgue A.* Sur l'approximation des fonctions // Bulletin des Sciences Mathématiques. 1898. Vol. 22. Première partie. P. 278–287.
12. *Landau E.* Über die Approximation einer stetigen Funktion durch eine ganze rationale Funktion // Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. 1908. T. 25. P. 337–345.
13. *De la Vallée Poussin Ch.* On the approximation of functions of a real variable and on quasi-analytic functions. A course of three lectures delivered at the Rice Institute, December 16, 17 and 19, 1924 // The Rice Institute Pamphlet. 1925. Vol. 12, № 2. P. 105–172.
14. *Гончаров В. Л.* Теория интерполирования и приближения функций. М.; Л. : ГИТТЛ, 1954. 328 с.
15. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М. : Наука, 1981. 800 с.
16. *Петросова М. А.* О скорости роста максимальных коэффициентов в полиномах Бернштейна, взятых от симметричного модуля на симметричном отрезке // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 18-й междунар. Сарат. зимней школы. Саратов : Научная книга, 2016. С. 209–211.
17. *Stafney J. D.* A permissible restriction on the coefficients in uniform polynomial approximation to $C[0, 1]$ // Duke Math. J. 1967. Vol. 34, № 3. P. 393–396. DOI:10.1215/S0012-7094-67-03443-6.
18. *Roulier J. A.* Permissible bounds on the coefficients of approximating polynomials // J. Approx. Theory. 1970. Vol. 3, № 2. P. 117–122. DOI: 10.1016/0021-9045(70)90018-3.
19. *Гурарий В. И., Мелетиди М. А.* Об оценках коэффициентов полиномов, аппроксимирующих непрерывные функции // Функциональный анализ и его прилож. 1971. Т. 5, вып. 1. С. 73–75.

Образец для цитирования:
Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А. Полиномы Бернштейна для стандартного модуля на симметричном отрезке // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 4. С. 425–435. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-425-435.

Bernstein Polynomials for a Standard Module Function on the Symmetric Interval

I. V. Tikhonov[1], V. B. Sherstyukov[2], M. A. Petrosova[3]

[1]Ivan V. Tikhonov, Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, GSP-1, 1-52, Leninskiye Gory, 119991, Moscow, Russia, ivtikh@mail.ru

[2]Vladimir B. Sherstyukov, National Research Nuclear University MEPhI, 31, Kashirskoe shosse, 115409, Moscow, Russia, shervb73@gmail.com

[3]Margarita A. Petrosova, Moscow Pedagogical State University, 1, M. Pirogovskaya str., 199296, Moscow, Russia, petrosova05@mail.ru

Bernstein polynomials are studied on a symmetric interval. Basic relations connected with Bernstein polynomials for a standard module function are received. By the Templ's formula we establish recurrence relations from which the Popoviciu's expansion is derived. Suitable formulas for the first and second derivatives are found. As a result an explicit algebraic form for Bernstein polynomials is obtained. We also notice some corollaries.

Key words: Bernstein polynomials, module function approximation.

References

1. Lorentz G. G. *Bernstein Polynomials*. New York, Chelsea Publ. Comp., 1986. xi+134 p.
2. Videnskii V. S. *Mnogochleny Bernshteina* [Bernstein Polynomials]. Posobie k spetskursu. Leningrad, LGPI, 1990. 64 p. (in Russian).
3. Natanson I. P. *Konstruktivnaya teoriya funkcii* [Constructive theory of functions]. Moscow, Leningrad, GITTL, 1949, 688 p. (in Russian).
4. Davis P. J. *Interpolation and Approximation*. New York, Dover, 1975, xvi+394 p.
5. DeVore R. A., Lorentz G. G. *Constructive Approximation*. Berlin, Heidelberg, New York, Springer–Verlag, 1993, x+450 p.
6. Tikhonov I. V., Sherstyukov V. B. Priblizhenie modulya polinomami Bernshteina [The module function approximation by Bernstein polynomials]. *Vestnik ChelGU. Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2012, vol. 15, no. 26, pp. 6–40 (in Russian).
7. Tikhonov I. V., Sherstyukov V. B., Petrosova M. A. Polynomy Bernshteina: staroe i novoe [Bernstein Polynomials: the old and the new]. *Matematicheskii forum. Issledovaniya po matematicheskomu analizu* [Math Forum. Research on mathematical analysis]. Vladikavkaz, Publ. VNTs RAN, 2014, vol. 8, pt. 1, pp. 126–175 (in Russian).
8. Tikhonov I. V., Sherstyukov V. B., Petrosova M. A. Sluchai simmetrichnogo otrezka v teorii klassicheskikh polinomov Bernshteina [Symmetric interval case in the theory of classical Bernstein polynomials]. *Sistemy komp'iuternoi matematiki i ikh prilozheniia : materialy XV mezhdunarod. nauch. konf.* [Systems of computer mathematics and their applications : Proc. XV Intern. Sci. Conf.]. Smolensk, SmolGU, 2014, iss. 15. pp. 184–186 (in Russian).
9. Tikhonov I. V., Sherstyukov V. B., Petrosova M. A. Gluing rule for Bernstein polynomials on the symmetric interval. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2015, vol. 15, iss. 3, pp. 288–300 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-288-300.
10. Popoviciu T. Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur. *Mathematica (Cluj)*, 1935, vol. 10, pp. 49–54.
11. Lebesgue A. Sur l'approximation des fonctions. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 1898, vol. 22, première partie, pp. 278–287.
12. Landau E. Über die Approximation einer stetigen Funktion durch eine ganze rationale Funktion. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 1908, vol. 25, pp. 337–345.
13. De la Vallée Poussin Ch. On the approximation of functions of a real variable and on quasi-analytic functions. A course of three lectures delivered at the Rice Institute, December 16, 17 and 19, 1924. *The Rice Institute Pamphlet*, 1925, vol. 12, no. 2, pp. 105–172.
14. Goncharov V. L. *Teoriya interpolirovaniya i priblizheniya funkcii* [Theory of interpolation and approximation of functions]. Moscow, Leningrad, GITTL, 1954, 328 p. (in Russian).
15. Prudnikov A. P., Brychkov Ju. A., Marichev O. I. *Integraly i ryady. Elementarnye funkcii* [Integrals and series. Elementary functions]. Moscow, Nauka, 1981, 800 p. (in Russian).
16. Petrosova M. A. O skorosti rosta maksimal'nykh koefficientov v polinomakh Bernshteina, vzyatykh ot simmetrichnogo modulya na simmetrichnom otrezke [On the maximum rate growth of coefficients in Bernstein polynomials which are taken from the simmetric module on a symmetric interval]. *Sovremennye problemy teorii funktsii i ikh prilozheniia : materialy 18-i mezhdunar. Sarat. zimnei shkoly* [Contemporary Problems of Function Theory and Their Applications : Proc. 18th Intern. Saratov Winter School]. Saratov, Nauchnaya kniga, 2016, pp. 209–211 (in Russian).
17. Stafney J. D. A permissible restriction on the coefficients in uniform polynomial approximation to $C[0, 1]$. *Duke Math. J.*, 1967, vol. 34, no. 3, pp. 393–396. DOI: 10.1215/S0012-7094-67-03443-6.

18. Roulier J. A. Permissible bounds on the coefficients of approximating polynomials. *J. Approx. Theory*, 1970, vol. 3, no. 2, pp. 117–122. DOI: 10.1016/0021-9045(70)90018-3.
19. Gurarii V. I., Meletidi M. A. On estimates of the coefficients of polynomials approximating continuous functions. *Funct. Anal. Appl.* 1971, vol. 5, iss. 1, pp. 60–62. DOI: 10.1007/BF01075850.

Please cite this article in press as:
Tikhonov I. V., Sherstyukov V. B., Petrosova M. A. Bernstein Polynomials for a Standard Module Function on the Symmetric Interval. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 4, pp. 425–435 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-425-435.

УДК 517.52

ПРИЗНАК ДИНИ – ЛИПШИЦА ДЛЯ ОБОБЩЁННЫХ СИСТЕМ ХААРА

В. И. Щербаков

Щербаков Виктор Иннокентьевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, Московский технический университет связи и информатики (МТУСИ), kafmathan@mail.ru (для В. И. Щербакова)

В работе рассматриваются обобщённые системы Хаара, порождённые (вообще говоря, неограниченной) последовательностью $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ и определённые на модифицированном отрезке $[0,1]^*$, т. е. на отрезке [0, 1] с «раздвоенными» $\{p_n\}$ — рациональными точками. Основной результат данной работы — установление поточечной оценки между абсолютной величиной разности между непрерывной в заданной точке функции и её n-й частичной суммой Фурье и «поточечным» модулем непрерывности (это понятие (поточечный модуль непрерывности $\omega_n(x,f)$) также определяется в данной работе) заданной функции. На основании этой «поточечной» оценки устанавливается равномерная оценка абсолютной величины разности между функцией и её частичными суммами Фурье и модулем непрерывности данной функции. Установлено также достаточное условие поточечной и равномерной ограниченности частичных сумм Фурье по обобщённой системе Хаара для заданной непрерывной функции. На основании этих оценок устанавливается признак сходимости ряда Фурье по обобщённой системе Хаара, аналогичный признаку Дини – Липшица. Показана также неулучшаемость полученного в работе условия. Для любых $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ с $\sup\limits_n p_n = \infty$ построен пример непрерывной на $[0,1]^*$ функции, ряд Фурье которой по обобщённой системе Хаара, порождённой последовательностью $\{p_n\}$, ограниченно расходится в некоторой фиксированной точке. Данный результат может быть применён и на нульмерных компактных абелевых группах.

Ключевые слова: абелева группа, модифицированный отрезок [0; 1], непрерывность на модифицированном отрезке [0; 1], системы характеров, системы Прайса, обобщённые системы Хаара, ядра Дирихле, признак Дини – Липшица.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-435-448

1. ВВЕДЕНИЕ. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть $\mathbb{N}$ — множество целых неотрицательных чисел, $p_0 = 1$, $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ — целочисленная последовательность с $p_n \geqslant 2$, $m_n = \prod\limits_{k=0}^{n} p_k$, $n \in \mathbb{N}$. Всякое число $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ единственным образом можно представить в виде

$$n = \sum_{k=0}^{s} a_k m_k = a_s m_s + n', \tag{1}$$

где a_k, s и n' — целые с $0 \leqslant a_k \leqslant p_{k+1}-1$, $1 \leqslant a_s \leqslant p_{s+1}-1$ (т. е. $m_s \leqslant n \leqslant m_{s+1}-1$) и $0 \leqslant n' \leqslant m_s-1$.

Рассмотрим систему целочисленных последовательностей $G = \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} | x_n \in \{0,1,\ldots,p_n-1\}\}$ с операцией $\dot{+}$ покоординатного сложения по модулю $p_n : \{x_n\}\dot{+}\{y_n\} = \{(x_n+y_n) \mod p_n\}$, относительно которой G является абелевой группой, пусть «$\dot{-}$» — обратная операция.

Окрестностями нуля в G являются подгруппы $G_n = \{\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in G |\ x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0\}$, $G_0 = G$, смежные классы $x\dot{+}G_n$ будут окрестностями точки $x \in G$. Подгруппы G_n образуют убывающую последовательность

$$G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_n \supset \ldots, \qquad \bigcap_{n=0}^{\infty} G_n = \{0_G\},$$