18. Roulier J. A. Permissible bounds on the coefficients of approximating polynomials. *J. Approx. Theory*, 1970, vol. 3, no. 2, pp. 117–122. DOI: 10.1016/0021-9045(70)90018-3.

19. Gurarii V. I., Meletidi M. A. On estimates of the coefficients of polynomials approximating continuous functions. *Funct. Anal. Appl.* 1971, vol. 5, iss. 1, pp. 60–62. DOI: 10.1007/BF01075850.

Please cite this article in press as:
Tikhonov I. V., Sherstyukov V. B., Petrosova M. A. Bernstein Polynomials for a Standard Module Function on the Symmetric Interval. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 4, pp. 425–435 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-425-435.

УДК 517.52

ПРИЗНАК ДИНИ – ЛИПШИЦА ДЛЯ ОБОБЩЁННЫХ СИСТЕМ ХААРА

В. И. Щербаков

Щербаков Виктор Иннокентьевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, Московский технический университет связи и информатики (МТУСИ), kafmathan@mail.ru (для В. И. Щербакова)

В работе рассматриваются обобщённые системы Хаара, порождённые (вообще говоря, неограниченной) последовательностью $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ и определённые на модифицированном отрезке $[0,1]^*$, т. е. на отрезке [0, 1] с «раздвоенными» $\{p_n\}$ — рациональными точками. Основной результат данной работы — установление поточечной оценки между абсолютной величиной разности между непрерывной в заданной точке функции и её n-й частичной суммой Фурье и «поточечным» модулем непрерывности (это понятие (поточечный модуль непрерывности $\omega_n(x,f)$) также определяется в данной работе) заданной функции. На основании этой «поточечной» оценки устанавливается равномерная оценка абсолютной величины разности между функцией и её частичными суммами Фурье и модулем непрерывности данной функции. Установлено также достаточное условие поточечной и равномерной ограниченности частичных сумм Фурье по обобщённой системе Хаара для заданной непрерывной функции. На основании этих оценок устанавливается признак сходимости ряда Фурье по обобщённой системе Хаара, аналогичный признаку Дини – Липшица. Показана также неулучшаемость полученного в работе условия. Для любых $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ с $\sup\limits_n p_n = \infty$ построен пример непрерывной на $[0,1]^*$ функции, ряд Фурье которой по обобщённой системе Хаара, порождённой последовательностью $\{p_n\}$, ограниченно расходится в некоторой фиксированной точке. Данный результат может быть применён и на нульмерных компактных абелевых группах.

Ключевые слова: абелева группа, модифицированный отрезок [0; 1], непрерывность на модифицированном отрезке [0; 1], системы характеров, системы Прайса, обобщённые системы Хаара, ядра Дирихле, признак Дини – Липшица.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-435-448

1. ВВЕДЕНИЕ. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть $\mathbb{N}$ — множество целых неотрицательных чисел, $p_0 = 1$, $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ — целочисленная последовательность с $p_n \geqslant 2$, $m_n = \prod\limits_{k=0}^{n} p_k$, $n \in \mathbb{N}$. Всякое число $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ единственным образом можно представить в виде

$$n = \sum_{k=0}^{s} a_k m_k = a_s m_s + n', \tag{1}$$

где a_k, s и n' — целые с $0 \leqslant a_k \leqslant p_{k+1}-1$, $1 \leqslant a_s \leqslant p_{s+1}-1$ (т. е. $m_s \leqslant n \leqslant m_{s+1}-1$) и $0 \leqslant n' \leqslant m_s - 1$.

Рассмотрим систему целочисленных последовательностей $G = \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} | x_n \in \{0, 1, \ldots, p_n - 1\}\}$ с операцией $\dot{+}$ покоординатного сложения по модулю $p_n : \{x_n\} \dot{+} \{y_n\} = \{(x_n + y_n) \mod p_n\}$, относительно которой G является абелевой группой, пусть «$\dot{-}$» — обратная операция.

Окрестностями нуля в G являются подгруппы $G_n = \{\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in G | \; x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0\}$, $G_0 = G$, смежные классы $x \dot{+} G_n$ будут окрестностями точки $x \in G$. Подгруппы G_n образуют убывающую последовательность

$$G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_n \supset \ldots, \qquad \bigcap_{n=0}^{\infty} G_n = \{0_G\},$$

и фактор-группа G_{n-1}/G_n имеет порядок p_n ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, 0_G — нулевой элемент группы G, то есть $0_G = \{0, 0, \ldots, 0, \ldots\}$) . Таким образом, G стала нульмерной компактной абелевой группой, которую часто называют группой Виленкина [1, 2].

Относительно топологии, заданной цепочкой подгрупп (G_n), определяется предел и непрерывность на G.

Обозначим

$$\omega_n(x, f) = \sup_{t \in G_n} |f(x \dot{+} t) - f(x)| \text{ и } \omega_n(f) = \sup_{x \in G} \omega_n(x, f). \tag{2}$$

Невозрастающую последовательность $\{\omega_n(f)\}_{n=0}^{\infty}$ называют *модулем непрерывности* функции $f(t)$. Очевидно, что $\lim\limits_{n \to \infty} \omega_n(f) = 0$, если $f(t)$ непрерывна на G.

Отображение

$$M : x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \mapsto M(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_k}{m_k} \tag{3}$$

переводит группу G на отрезок $[0, 1]$ с нарушением взаимной однозначности в p_n-ично рациональных точках. Его иногда называют отображением Монна [3, 4]. Последовательности

$$x = \{l_1, l_2, \ldots, l_{n-1}, l_n, 0, 0, \ldots\}, \tag{4}$$

$$y = \{l_1, l_2, \ldots, l_{n-1}, l_n - 1, p_{n+1} - 1, p_{n+2} - 1, \ldots, p_{n+k} - 1, \ldots\} \tag{5}$$

при отображении Монна переходят в одно и то же число l/m_n. Если это число l/m_n считать дважды: как правое (4), так и левое (5), то отрезок $[0, 1]$ с такими точками называют *модифицированным отрезком* и обычно обозначают через $[0, 1]^*$. Такой модифицированный отрезок является геометрической моделью группы Виленкина.

Меру μ на G вначале определяют на полукольце смежных классов $x \dot{+} G_n$ как $\mu(x \dot{+} G_n) = 1/m_n$ и затем продолжают по схеме Каратеодори. Полученная таким образом мера инвариантна относительно сдвигов и на борелевских множествах совпадает с мерой Хаара. Эту меру будем обозначать через dx. По данной мере по схеме Лебега строится абсолютно сходящийся интеграл $\int_G f(x)\,dx$.

Положим $e_n = \{\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-1}, 1, 0, 0, \ldots\}$. Систему $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$($e_1 = \{1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots\}$) назовём *базисной*.

Очевидно, что для $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in G$ справедливо равенство

$$x = x_1 e_1 \dot{+} x_2 e_2 \dot{+} \ldots \dot{+} x_n e_n \dot{+} \ldots$$

($le_n = \{\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-1}, l, 0, 0, \ldots\}$). Используя базисную последовательность $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, имеем

$$G_n = \bigcup_{j=0}^{p_{n+1}-1} (je_{n+1} \dot{+} G_n) \quad \text{и} \quad G = G_0 = \bigcup_{j_1=0}^{p_1-1} \ldots \bigcup_{j_n=0}^{p_n-1} (j_1 e_1 \dot{+} j_2 e_2 \dot{+} \ldots \dot{+} j_n e_n \dot{+} G_n).$$

Смежный класс $j_1 e_1 \dot{+} j_2 e_2 \dot{+} \ldots \dot{+} j_n e_n \dot{+} G_n$ при отображении Монна переходит в отрезок $\left[\frac{k}{m_n}, \frac{k+1}{m_n}\right]$, где k связано с числами $j_1, \ldots, j_n$ равенством

$$k = j_n + j_{n-1} p_n + j_{n-2} p_{n-1} p_n + \ldots + j_1 p_2 \ldots p_n, \qquad j_l \in \overline{0; p_l - 1}.$$

Далее будем обозначать $le_n \dot{+} G_n = G_{l,n}$, $l \in \overline{0, p_n - 1}$. Очевидно, что

$$M(G_{l,n}) = \left[\frac{l}{m_n}, \frac{l+1}{m_n}\right] \quad \text{и} \quad M(G_n \setminus G_{n+1}) = \left[\frac{1}{m_{n+1}}, \frac{1}{m_n}\right]. \tag{6}$$

Положим

$$\tilde{x}_0 = 0, \qquad \tilde{x}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{m_k}. \tag{7}$$

2. ОБОБЩЁННЫЕ СИСТЕМЫ ХААРА И УОЛША

Пусть (названия систем даются в п. 7.1) $\Psi = \{\psi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, где $\psi_0(x) \equiv 1$, $r_k(x) = \psi_{m_k}(x) = \exp\frac{2i\pi x_{k+1}}{p_{k+1}}$, если $k = 0, 1, 2, \dots$ и $\psi_n(x) = \prod\limits_{k=0}^{s}(r_k(x))^{a_k}$, где a_k и s определены формулой (1). Как будет сказано в п. 7.1, иногда $r_k(x)$ называют функциями Радемахера. Пусть $\{\psi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ — полная ортонормированная система непрерывных на группе G функций со свойствами

$$\psi_n(x\dot{+}y) = \psi_n(x) \times \psi_n(y), \qquad |\psi_n(x)| \equiv 1. \tag{8}$$

Рассмотрим ещё одну полную ортонормированную систему непрерывных на группе G кусочно-постоянных функций

$$\Gamma = \{\gamma_n(x)\}_{n=0}^{\infty} \colon \gamma_0(x) \equiv 1,$$
$$\gamma_n(x) = \gamma_{a_s m_s + n'}(x) = \begin{cases} \sqrt{m_s}\exp\dfrac{2i\pi a_s x_{s+1}}{p_{s+1}}, & \text{если } n' = \tilde{x}_s m_s, \\ 0, & \text{если } n' \neq \tilde{x}_s m_s, \end{cases} \tag{9}$$

где $\tilde{x}_s$ определены формулой (7), а s, a_s, n' — равенством (1).

3. ЯДРА ДИРИХЛЕ ПО ОБОБЩЁННЫМ СИСТЕМАМ ХААРА И УОЛША И ИХ ВЗАИМОСВЯЗЬ

Напомним, что n-е ядро Дирихле по ортонормированной системе функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ вычисляется по формуле

$$D_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(t)}.$$

Так как $|\psi_n(x)| \equiv 1$, то $\overline{\psi_k(t)} = \frac{1}{\psi_k(t)} = \psi_k(\dot{-}t)$, и, используя формулу (8), для системы Ψ имеем

$$D_n(x,t) = \sum_{k=0}^{n-1}\psi_k(x)\overline{\psi_k(t)} = \sum_{k=0}^{n-1}\psi_k(x\dot{-}t) = D_n(x\dot{-}t),$$

т. е. здесь можно считать, что

$$D_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\psi_k(x), \tag{10}$$

и тогда $D_n(\dot{-}x) = \overline{D_n(x)}$.

В дальнейшем ядра Дирихле по системе Ψ будем обозначать как $D_n(x\dot{-}t)$ (либо $D_n(x)$(как функцию одной переменной)), а по системам Γ — как $D_n(x,t)$.

Справедливы следующие теоремы (см. [5, равенства (22), (23)].

Теорема A. *Ядра Дирихле для систем $\Psi = \{\psi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ и $\Gamma = \{\gamma_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ с номерами jm_n $(j = 1, 2, \dots, p_{n+1} - 1)$ совпадают, т. е.*

$$D_{jm_n}(x,t) = D_{jm_n}(x\dot{-}t). \tag{11}$$

Теорема B. *Для систем $\Gamma = \{\gamma_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ либо $D_n(x,t) = D_{a_s m_s + n'}(x,t) = D_{a_s m_s}(x,t)$, либо $D_n(x,t) = D_{a_s m_s + n'}(x,t) = D_{(a_s+1)m_s}(x,t)$, а точнее*

$$D_n(x,t) = \begin{cases} D_{a_s m_s}(x,t), & \textit{если } x\dot{-}t \in G_s, \quad n' \leqslant \tilde{x}_s m_s = \tilde{t}_s m_s, \\ D_{(a_s+1)m_s}(x,t), & \textit{если } x\dot{-}t \in G_s, \quad n' > \tilde{x}_s m_s = \tilde{t}_s m_s, \\ D_{a_s m_s}(x,t) = 0, & \textit{если } x\dot{-}t \in G \setminus G_s, \end{cases} \tag{12}$$

числа a_s, m_s и n' определяются формулой (1).

Известно также, что (см., например, [1, 6–8]

$$D_{m_n}(x) = \begin{cases} m_n, & \text{если} \quad x \in G_n, \\ 0, & \text{если} \quad x \in G \setminus G_n. \end{cases} \tag{13}$$

Если j — целое $1 \leqslant j \leqslant p_{n+1}-1$, то

$$D_{jm_n}(x) = D_{m_n}(x)\frac{1-(r_n(x))^j}{1-r_n(x)} \tag{14}$$

и (так как для $x \in G_{n+1}$, $k < m_{n+1}\colon \psi_k(x) = 1$ имеем $D_{jm_n}(x) = \sum\limits_{k=0}^{jm_n-1}\psi_k(x) = jm_n$)

$$D_{jm_n}(x) = \begin{cases} jm_n, & \text{если} \quad x \in G_{n+1}, \\ m_n\dfrac{1-(r_n(x))^j}{1-r_n(x)}, & \text{если} \quad x \in G_n \setminus G_{n+1}, \\ 0, & \text{если} x \in G \setminus G_n. \end{cases} \tag{15}$$

4. S-МАЖОРАНТА И ЕЁ ИНТЕГРАЛЬНАЯ ОЦЕНКА

Определим функцию

$$S(x) = \frac{m_n}{\sin\frac{\pi x_{n+1}}{p_{n+1}}}, \tag{16}$$

где x_{n+1} — первый отличный от нуля (слева) элемент последовательности $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ (т. е. $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, $x_{n+1} \neq 0$, если $x \in G \setminus G_1$, для $x_1 \neq 0$ будет $n = 0$).

В [6] $S(x)$ обозначена как $q(x)$. Функцию $S(x)$ можно определить и так:

$$S(x) = \frac{m_n}{\sin\frac{\pi l}{p_{n+1}}}, \quad \text{если} \quad x \in G_{l,n+1}, \quad l = 1,2,\ldots p_{n+1}-1, \quad n = 0,1,2,\ldots, \tag{17}$$

т. е. $G_{l,n+1} \subset G_n \setminus G_{n+1}$, а смежные классы $G_{l,n}$ определены в (6).

Рассмотрим множества

$$G_{n,+} = \bigcup_{l=1}^{[p_{n+1}/2]} G_{l,n+1} \quad \text{и} \quad G_+ = \bigcup_{n=0}^{\infty} G_{n,+} \tag{18}$$

($[x]$ означает целую часть действительного числа x), а также

$$G_{n,-} = \dot{-}G_{n,+} \quad \text{и} \quad G_- = \dot{-}G_+ = \bigcup_{n=0}^{\infty} G_{n,-}. \tag{19}$$

Отметим, что

$$G_{n,+} \cup G_{n,-} = G_n \setminus G_{n+1}, \qquad G_+ \cup G_- = G \setminus \{0_G\}, \tag{20}$$

$$G_{n,+} \cap G_{n,-} = \begin{cases} G_{l,\frac{p_{n+1}}{2},n+1}, & \text{если} \quad p_{n+1} \text{ — чётное}, \\ \varnothing, & \text{если} \quad p_{n+1} \text{ — нечётное}. \end{cases} \tag{21}$$

Очевидно, что $S(x)$ обладает свойством групповой чётности:

$$S(\dot{-}x) = S(x). \tag{22}$$

Сравним теперь $S(x)$ со «стандартной» мажорантой $1/M(x)$.

Если $x \in G_{l,n+1}$, $l = 1,2,\ldots,p_{n+1}-1$, $n = 0,1,2,\ldots$, то (см. равенство (6)) $M(x) \in \left[\frac{l}{m_{n+1}}; \frac{l+1}{m_{n+1}}\right]$ и $\frac{m_{n+1}}{2l} \leqslant \frac{m_{n+1}}{l+1} \leqslant \frac{1}{M(x)} \leqslant \frac{m_{n+1}}{l}$.

Поэтому для $x \in G_{l,n+1} \subset G_{n,+}$, т. е. $l \leqslant \left[\frac{p_{n+1}}{2}\right]$, тогда $\frac{\pi l}{p_{n+1}} \leqslant \frac{\pi}{2}$ и $\sin\frac{\pi l}{p_{n+1}} \geqslant \frac{2}{\pi} \times \frac{\pi l}{p_{n+1}}$,

$$S(x) = \frac{m_n}{\sin\frac{\pi l}{p_{n+1}}} \leqslant \frac{m_n}{\frac{2}{\pi}\frac{\pi l}{p_{n+1}}} = \frac{m_n p_{n+1}}{2l} = \frac{m_{n+1}}{2l} \leqslant \frac{1}{M(x)}, \tag{23}$$

а если $x \in G_{l,n+1} \subset G_n \setminus G_{n+1}$ (или $l \in \overline{0, p_{n+1}-1}$), то

$$S(x) = \frac{m_n}{\sin\frac{\pi l}{p_{n+1}}} \geqslant \frac{m_n p_{n+1}}{\pi l} = \frac{m_{n+1}}{\pi l} \geqslant \frac{1}{\pi}\frac{1}{M(x)}. \tag{24}$$

А ввиду того что обе части неравенства (24) не зависят от n, то оно справедливо при *всех* $x \neq 0$.

Оценим $\int_{G_n \setminus G_{n+1}} S(x)\, dx$.

1. Оценка сверху. Имеем $\int\limits_{G_n \setminus G_{n+1}} S(x)\, dx \leqslant \int_{G_{n,+}} S(x)\, dx + \int_{G_{n,-}} S(x)\, dx$. Во втором слагаемом делаем подстановку $x = \dot{-}t$. Используя далее формулы (22) и (23), получим

$$\int\limits_{G_n \setminus G_{n+1}} S(x)\, dx \leqslant 2 \int\limits_{G_{n,+}} S(x)\, dx \leqslant 2 \int\limits_{G_{n,+}} \frac{dx}{M(x)} \leqslant$$

$$\leqslant 2 \int\limits_{G_n \setminus G_{n+1}} \frac{dx}{M(x)} = 2 \int\limits_{1/m_{n+1}}^{1/m_n} \frac{du}{u} = 2 \ln \frac{m_{n+1}}{m_n} = 2 \ln p_{n+1} \tag{25}$$

(в последнем интеграле сделана подстановка $u = M(t)$ и использовано равенство (6)).

2. Оценка снизу. Из неравенства (24) имеем:

$$\int_{G_n \setminus G_{n+1}} S(x)\, dx \geqslant \frac{1}{\pi} \int_{G_n \setminus G_{n+1}} \frac{dx}{M(x)} = \frac{1}{\pi} \ln p_{n+1}. \tag{26}$$

Мы показали, что имеет место следующая

Лемма 1. *Для любого целого n выполнено неравенство*

$$\frac{1}{\pi} \ln p_{n+1} \leqslant \int_{G_n \setminus G_{n+1}} S(x)\, dx \leqslant 2 \ln p_{n+1}. \tag{27}$$

Справедлива также следующая лемма.

Лемма 2. *Для всех $x, t \in G$ и целых n верна оценка*

$$|D_n(x,t)| \leqslant S(x \dot{-} t). \tag{28}$$

Доказательство. Из теоремы В (равенства (12)) непосредственно получаемого равенства

$$1 - e^{2i\alpha} = -2i \sin \alpha \, e^{i\alpha}, \tag{29}$$

формул (8), (15) и (17) для $x \in G_s \setminus G_{s+1}$ имеем

$$|D_n(x,t)| = |D_{j_s m_s}(x,t)| = |D_{j_s m_s}(x \dot{-} t)| = m_s \frac{|1 - (r_s(x \dot{-} t))^{j_s}|}{|1 - r_s(x \dot{-} t)|} =$$

$$= m_s \frac{\left|1 - \exp\left(\frac{2i\pi(x_{s+1} - t_{s+1}) j_s}{p_{s+1}}\right)\right|}{\left|1 - \exp\left(\frac{2i\pi(x_{s+1} - t_{s+1})}{p_{s+1}}\right)\right|} = m_s \frac{\left|\sin \frac{\pi(x_{s+1} - t_{s+1}) j_s}{p_{s+1}}\right|}{\sin \frac{\pi(x_{s+1} - t_{s+1})}{p_{s+1}}} \leqslant \frac{m_s}{\sin \frac{\pi(x_{s+1} - t_{s+1})}{p_{s+1}}} = S(x \dot{-} t),$$

так как в зависимости от n' (см. (12)) $j_s = a_s$ либо $j_s = a_s + 1$. □

А из формул (8), (10), (11) и (12) получим, что для всех $x, t \in G$ и целых n

$$|D_n(x,t)| = |D_{j_s m_s}(x,t)| = |D_{j_s m_s}(x \dot{-} t)| = \left| \sum_{k=0}^{j_s m_s - 1} \psi_k(x) \right| \leqslant$$

$$\leqslant j_s m_s \leqslant (a_s + 1) m_s \leqslant p_{s+1} m_s \leqslant m_{s+1}. \tag{30}$$

5. ФОРМУЛИРОВКИ ОСНОВНЫХ ТЕОРЕМ

Пусть $S_n(x,f)$ n-я частичная сумма Фурье по системе Г. Справедлива

Теорема 1. *Для всех целых n и любого $x \in G$ произвольной интегрируемой на группе G и непрерывной в точке $x \in G$ функции $f(t)$ имеет место неравенство*

$$|S_n(x,f) - f(x)| \leqslant (1 + 2 \ln p_{s+1}) \omega_s(x,f), \tag{31}$$

где n и s связаны формулой (1), *а $\omega_n(x,f)$ — модуль непрерывности $f(t)$ (см.* (2)) .

Из теоремы 1 легко вытекают следующие выводы.

Следствие 1. *Для любой непрерывной на группе G функции $f(t)$, всех $x \in G$ и натуральных n справедлива оценка*

$$|S_n(x,f) - f(x)| \leqslant (1 + 2\ln p_{s+1})\omega_s(f), \tag{32}$$

где n и s связаны формулой (1), *а $\omega_n(f)$ — модуль непрерывности $f(t)$ (см.* (2)*).*

Как будет упомянуто в п. 7.1, следствие 1 можно получить из некоторых результатов [9].

Следствие 2. *Если $\omega_n(x,f) = o\left(\frac{1}{\ln p_{n+1}}\right)$, то ряд Фурье по системе Γ от удовлетворяющей условиям теоремы 1 функции $f(t)$ сходится к ней в точке x.*

Следствие 3 (признак Дини – Липшица по обобщённым системам Хаара). *Если*

$$\omega_n(f) = o\left(\frac{1}{\ln p_{n+1}}\right), \tag{33}$$

то ряд Фурье по системе Γ от непрерывной на G функции $f(t)$ сходится к ней равномерно на G.

Следствие 4. *В случае $\omega_n(x,f) = O\left(\frac{1}{\ln p_{n+1}}\right)$ частичные суммы Фурье от удовлетворяющей условиям теоремы 1 функции $f(t)$ по системе Γ ограничены в точке x.*

Следствие 5. *Если $\sup\limits_n p_n < \infty$, то ряд Фурье по системе Γ от любой непрерывной на группе G функции $f(t)$ сходится к ней равномерно на G.*

Свойство 5 было известно ранее, см. условие (51) в п. 7.2.

Отметим, что условие (33) не улучшается, ибо имеет место

Теорема 2. *В случае $\sup\limits_n p_n = \infty$ для любой точки $x \in G$ существует непрерывная на группе G функция, модуль непрерывности которой $\omega_n(x,f) = O\left(\frac{1}{\ln p_{n+1}}\right)$, однако её ряд Фурье по системе Γ расходится (ввиду следствия 4 — ограниченно) в точке x.*

6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Известно, что n-я частичная сумма Фурье от функции $f(t)$ в точке x по ортонормированной системе $\Phi = \{\varphi_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ можно найти по формуле

$$S_n^{(\Phi)}(x,f) = \int\limits_0^1 f(t)\,D_n(x,t)\,dt,$$

где $D_n(x,t)$ — ядра Дирихле.

Тогда для системы Γ: $S_n^{(\Gamma)}(x,f) = \int\limits_G f(t)D_n(x,t)\,dt$.

Рассмотрим $S_n^{(\Gamma)}(x,f) - f(x)$. Ввиду того, что $\int\limits_G D_n(x,t)\,dt = 1$, получаем

$$S_n^{(\Gamma)}(x,f) - f(x) = \int\limits_G f(t)D_n(x,t)\,dt - f(x)\int\limits_G D_n(x,t)\,dt = \int\limits_G (f(t)-f(x))D_n(x,t)\,dt =$$

$$= \int\limits_{x\dot{+}G_{s+1}} (f(t)-f(x))D_n(x,t)\,dt + \int\limits_{x\dot{+}G_s\setminus G_{s+1}} (f(t)-f(x))D_n(x,t)\,dt + \int\limits_{x\dot{+}G\setminus G_s} (f(t)-f(x))D_n(x,t)\,dt.$$

Исходя из равенства (12) для третьего слагаемого в полученной формуле справедливы равенства:

$$\int\limits_{x\dot{+}G\setminus G_s} (f(t)-f(x))D_n(x,t)\,dt = \int\limits_{x\dot{-}t\in G\setminus G_s} (f(t)-f(x))D_n(x,t)\,dt = 0.$$

Мы показали, что

$$S_n^{(\Gamma)}(x,f)-f(x)=\int\limits_{x\dot{-}t\in G_{s+1}}(f(t)-f(x))D_n(x,t)\,dt+\int\limits_{x\dot{-}t\in G_s\setminus G_{s+1}}(f(t)-f(x))D_n(x,t)\,dt. \qquad (34)$$

Первое слагаемое в равенстве (34) оценим исходя из (30):

$$0\leqslant \Big|\int\limits_{x\dot{+}t\in G_{s+1}}(f(t)-f(x))D_n(x,t)\,dt\Big|\leqslant\int\limits_{x\dot{-}t\in G_{s+1}}|f(t)-f(x)||D_n(x,t)|\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\omega_{s+1}(x,f)\int\limits_{x\dot{-}t\in G_{s+1}}|D_n(x,t)|\,dt\leqslant\omega_{s+1}(x,f)m_{s+1}\int\limits_{x\dot{-}t\in G_{s+1}}dt=\omega_s(x,f)\leqslant\omega_s(x,f), \qquad (35)$$

так как мера $G_{s+1}:\mu(G_{s+1})=\frac{1}{m_{s+1}}$, а последовательность $\{\omega_n(f)\}_{n=0}^{\infty}$ (см. формулу (2)) не убывает.

Применяя формулы (27) и (28), рассмотрим второй интеграл в (34)

$$0\leqslant \Big|\int\limits_{x\dot{-}t\in G_s\setminus G_{s+1}}(f(t)-f(x))D_n(x,t)\,dt\Big|\leqslant\int\limits_{x\dot{-}t\in G_s\setminus G_{s+1}}|f(t)-f(x)||D_n(x,t)|\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\omega_s(x,f)\int\limits_{x\dot{-}t\in G_s\setminus G_{s+1}}S(x\dot{-}t)\,dt\leqslant 2\omega_s(f)\ln p_{s+1}. \qquad (36)$$

Подставляя (35) и (36) в (34), получим неравенство (31). Теорема доказана. □

7. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

7.1. Построение контрпримера в случае, когда последовательность $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет бесконечную подпоследовательность, состоящую только из нечётных чисел

Пусть p_{n+1} — нечётное, а $j_n=\frac{p_{n+1}-1}{2}$. Тогда из равенства (29), формулы (15) и теоремы A найдём по системе Γ $D_{j_nm_n}(x,t)$ при $x\dot{-}t\in G_{4l+1,n+1}\subset G_n\setminus G_{n+1}$ (т. е. l — целое с $0\leqslant l\leqslant\frac{p_{n+1}-2}{4}$):

$$D_{j_nm_n}(x,t)=D_{j_nm_n}(x\dot{-}t)=m_n\frac{1-(r_n(x\dot{-}t))^{j_n}}{1-r_n(x\dot{-}t)}=m_n\frac{1-\exp\frac{2i\pi(4l+1)j_n}{p_{n+1}}}{1-\exp\frac{2i\pi(4l+1)}{p_{n+1}}}=$$

$$=m_n\frac{-2i\sin\frac{\pi(4l+1)j_n}{p_{n+1}}\exp\left(i\frac{\pi(4l+1)j_n}{p_{n+1}}\right)}{-2i\sin\frac{\pi(4l+1)}{p_{n+1}}\exp\left(i\frac{\pi(4l+1)}{p_{n+1}}\right)}=m_n\frac{\sin\frac{\pi(4l+1)(p_{n+1}-1)}{2p_{n+1}}}{\sin\frac{\pi(4l+1)}{p_{n+1}}}e^{i\frac{\pi(4l+1)(j_n-1)}{p_{n+1}}}=$$

$$=m_n\frac{\sin\left(\frac{\pi(4l+1)p_{n+1}}{2p_{n+1}}-\frac{\pi(4l+1)}{2p_{n+1}}\right)}{2\sin\frac{\pi(4l+1)}{2p_{n+1}}\cos\frac{\pi(4l+1)}{2p_{n+1}}}e^{i\frac{\pi(4l+1)(p_{n+1}-3)}{2p_{n+1}}}=m_n\frac{\sin\left(2\pi l+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi(4l+1)}{2p_{n+1}}\right)}{2\sin\frac{\pi(4l+1)}{2p_{n+1}}\cos\frac{\pi(4l+1)}{2p_{n+1}}}e^{i\frac{\pi(4l+1)(p_{n+1}-3)}{2p_{n+1}}}=$$

$$=m_n\frac{\cos\frac{\pi(4l+1)}{2p_{n+1}}}{2\sin\frac{\pi(4l+1)}{2p_{n+1}}\cos\frac{\pi(4l+1)}{2p_{n+1}}}e^{i\frac{\pi(4l+1)(p_{n+1}-3)}{2p_{n+1}}}=\frac{m_n}{2\sin\frac{\pi(4l+1)}{2p_{n+1}}}e^{i\frac{\pi(4l+1)(p_{n+1}-3)}{2p_{n+1}}}.$$

Мы показали, что для $x\in G_{4l+1,n+1}$, $l=0,1,2,\ldots,\left[\frac{p_{n+1}-2}{4}\right]$ справедливо равенство

$$D_{j_nm_n}(x,t)=\frac{m_n}{2\sin\frac{\pi(4l+1)}{2p_{n+1}}}e^{i\frac{\pi(4l+1)(p_{n+1}-3)}{2p_{n+1}}}. \qquad (37)$$

Пусть $\{p_{n_k+1}\}_{k=1}^{\infty}$ — бесконечная возрастающая подпоследовательность последовательности $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$, состоящая только из нечётных чисел, и такая, что

$$p_{n_k+1}>12. \qquad (38)$$

Так как p_{n_k+1} — нечётные, то числа

$$j_k=\frac{p_{n_k+1}-1}{2} \qquad (39)$$

целые.

Рассмотрим функцию

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\ln p_{n_k+1}}e^{-i\frac{\pi(4l+1)(p_{n_k+1}-3)}{2p_{n_k+1}}}, \text{ если } x\dot{-}t\in G_{4l+1,n_k+1},\ l=0,1,2,\dots,\left[\frac{p_{n_k+1}-2}{4}\right],\ k=1,2,\dots,\\ 0, \quad \text{для остальных} \quad t.\end{cases}$$

Так как $\overline{\lim\limits_{t\to x}}|f(t)| = \lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{\ln p_{n_k+1}} = 0 = f(x)$, то функция $f(t)$ непрерывна на группе G и $\omega_{n_k}(x,f)\leqslant\dfrac{1}{\ln p_{n_k+1}}$. В [9–11] показано, что для систем Γ (обобщённых систем Хаара) будет

$$\lim_{n\to\infty}S_{m_n}(x,f)=f(x). \tag{40}$$

Найдём частичную сумму Фурье $S_{j_k m_{n_k}}(x,f)$ по системе Γ (j_k определено в (39))

$$S^{(\Gamma)}_{j_k m_{n_k}}(x,f)=\int_G f(t)D_{j_k m_{n_k}}(x,t)\,dt=$$

$$=\int\limits_{x\dot{-}t\in G_{n_k+1}} f(t)D_{j_k m_{n_k}}(x,t)\,dt+\int\limits_{x\dot{-}t\in G_{n_k}\setminus G_{n_k+1}} f(t)D_{j_k m_{n_k}}(x,t)\,dt+\int\limits_{x\dot{-}t\in G\setminus G_{n_k}} f(t)D_{j_k m_{n_k}}(x,t)\,dt.$$

Ввиду формулы (15) и теоремы А, третье слагаемое в правой части последнего равенства обращается в нуль. Таким образом, мы показали, что

$$S^{(\Gamma)}_{j_k m_{n_k}}(x,f)=\int\limits_{x\dot{-}t\in G_{n_k+1}} f(t)D_{j_k m_{n_k}}(x,t)\,dt+\int\limits_{x\dot{-}t\in G_{n_k}\setminus G_{n_k+1}} f(t)D_{j_k m_{n_k}}(x,t)\,dt. \tag{41}$$

Исходя из теоремы А и (15) оценим первое слагаемое в (41) (в (39) j_{n_k} обозначено через j_k)

$$\left|\int\limits_{x\dot{-}t\in G_{n_k+1}} f(t)D_{j_k m_{n_k}}(,t)\,dt\right|\leqslant j_k m_{n_k}\left|\int\limits_{x\dot{-}t\in G_{n_k+1}} f(t)\,dt\right|\leqslant\frac{p_{n_k+1}-1}{2}m_{n_k}\int\limits_{x\dot{-}t\in G_{n_k+1}}|f(t)|\,dt<$$

$$<\frac{p_{n_k+1}m_{n_k}}{\ln p_{n_k+1}}\int\limits_{x\dot{-}t\in G_{n_k+1}}dt=\frac{m_{n_k+1}}{m_{n_k+1}\ln p_{n_k+1}}=\frac{1}{\ln p_{n_k+1}},$$

ибо мера множества $\mu(G_{n_k+1})=\dfrac{1}{m_{n_k}+1}$.

Мы получили неравенство

$$\left|\int\limits_{x\dot{-}t\in G_{n_k+1}} f(t)D_{j_k m_{n_k}}(x,t)\,dt\right|\leqslant\frac{1}{\ln p_{n_k+1}}. \tag{42}$$

Второе слагаемое в формуле (41) оцениваем исходя из равенства (37):

$$\left|\int\limits_{x\dot{-}t\in G_{n_k}\setminus G_{n_k+1}} f(t)D_{j_k m_{n_k}}(x,t)\,dt\right|=\left|\sum_{l=0}^{\left[\frac{p_{n_k+1}-2}{4}\right]}\int\limits_{x\dot{-}t\in G_{4l+1,n_k+1}} f(t)D_{j_k m_{n_k}}(x,t)\,dt\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{\ln p_{n_k+1}}\sum_{l=0}^{\left[\frac{p_{n_k+1}-2}{4}\right]}\int\limits_{x\dot{-}\in G_{4l+1,n_k+1}} e^{-i\frac{\pi(4l+1)(p_{n_k+1}-3)}{2p_{n_k+1}}}\frac{m_{n_k}}{2\sin\frac{\pi(4l+1)}{2p_{n_k+1}}}e^{i\frac{\pi(4l+1)(p_{n_k+1}-3)}{2p_{n_k+1}}}\,dt\right|=$$

$$=\frac{m_{n_k}}{2\ln p_{n_k+1}}\sum_{l=0}^{\left[\frac{p_{n_k+1}-2}{4}\right]}\frac{1}{\sin\frac{\pi(4l+1)}{2p_{n_k+1}}}\int\limits_{x\dot{-}t\in G_{4l+1,n_k+1}}dt\geqslant\frac{m_{n_k}}{2m_{n_k+1}\ln p_{n_k+1}}\sum_{l=0}^{\left[\frac{p_{n_k+1}-2}{4}\right]}\frac{2p_{n_k+1}}{\pi(4l+1)}>$$

$$> \frac{2m_{n_k}p_{n_k+1}}{2\pi m_{n_k+1}\ln p_{n_k+1}} \sum_{l=0}^{\left[\frac{p_{n_k+1}-2}{4}\right]} \frac{1}{4(l+1)} > \frac{\ln\left[\frac{p_{n_k+1}-2}{4}\right]}{4\pi\ln p_{n_k+1}} > \frac{\ln\left(\frac{p_{n_k+1}-2}{4}-1\right)}{4\pi\ln p_{n_k+1}} = \frac{\ln(p_{n_k+1}-6)-\ln 4}{4\pi\ln p_{n_k+1}}.$$

Показано неравенство

$$\left|\int\limits_{x\dot{-}t\in G_{n_k}\setminus G_{n_k+1}} f(t)D_{j_k m_{n_k}}(x,t)\,dt\right| > \frac{\ln(p_{n_k+1}-6)-\ln 4}{4\pi\ln p_{n_k+1}}. \tag{43}$$

Ввиду условия (38) $p_{n_k+1}-6 > p_{n_k+1}-\frac{p_{n_k+1}}{2} = \frac{p_{n_k+1}}{2}$. Поэтому из (43) имеем

$$\left|\int\limits_{x\dot{-}t\in G_{n_k}\setminus G_{n_k+1}} f(t)D_{j_k m_{n_k}}(x,t)\,dt\right| > \frac{\ln p_{n_k+1}-\ln 8}{4\pi\ln p_{n_k+1}} = \frac{1}{4\pi} - \frac{\ln 8}{4\pi\ln p_{n_k+1}}. \tag{44}$$

Подставляя неравенства (44) и (42) в (41), получим

$$|S^{(\Gamma)}_{j_k m_{n_k}}(x,f)| \geqslant \frac{1}{4\pi} - \frac{\ln 8}{4\pi\ln p_{n_k+1}} - \frac{1}{\ln p_{n_k+1}}, \tag{45}$$

т. е. $S^{(\Gamma)}_{j_k m_{n_k}}(x,f)$ не стремится к нулю при $k\to\infty$. Сопоставляя это с равенством (40), выводим, что ряд Фурье по системе Γ в точке от функции $f(t)$ расходится (ограниченно). Теорема 2 доказана в случае, если последовательность $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ имеет бесконечную подпоследовательность, состоящую только из нечётных чисел.

7.2. Построение контрпримера в случае, когда последовательность $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ не удовлетворяет условию п. 7.1

Пусть число p_{n+1} — чётное, а $j_n = \frac{p_{n+1}}{2}$. Найдём $D_{j_n m_n}(x,t)$ для $x\dot{-}t \in G_{4l+1,n+1} \subset G_n \setminus G_{n+1}$ (или $l = 0,1,2,\ldots,\left[\frac{p_{n+1}-2}{4}\right]$). Используя равенство (15) и теорему A, а также формулу (29), имеем

$$D_{j_n m_n}(x,t) = D_{j_n m_n}(x\dot{-}t) = m_n\frac{1-(r_n(x\dot{-}t))^{j_n}}{1-r_n(x\dot{-}t)} = m_n\frac{1-\exp\left(\frac{2i\pi(4l+1)j_n}{p_{n+1}}\right)}{1-\exp\left(\frac{2i\pi(4l+1)}{p_{n+1}}\right)} =$$

$$= m_n\frac{-2i\sin\frac{\pi(4l+1)j_n}{p_{n+1}}}{-2i\sin\frac{\pi(4l+1)}{p_{n+1}}}e^{\frac{i\pi(4l+1)j_n}{p_{n+1}}}e^{\frac{-i\pi(4l+1)}{p_{n+1}}} = m_n\frac{\sin\frac{\pi(4l+1)p_{n+1}}{2p_{n+1}}}{\sin\frac{\pi(4l+1)}{p_{n+1}}}e^{\frac{i\pi(4l+1)(j_n-1)}{p_{n+1}}} =$$

$$= m_n\frac{\sin\frac{\pi(4l+1)}{2}}{\sin\frac{\pi(4l+1)}{p_{n+1}}}e^{\frac{i\pi(4l+1)(p_{n+1}-2)}{2p_{n+1}}} = \frac{m_n\sin(2\pi l+\frac{\pi}{2})}{\sin\frac{\pi(4l+1)}{p_{n+1}}}e^{\frac{i\pi(4l+1)(p_{n+1}-2)}{2p_{n+1}}}.$$

Мы показали, что для $x\dot{-}t\in G_{4l+1,n+1}\subset G_n\setminus G_{n+1}$, т. е. l — целое с $0\leqslant l\leqslant\left[\frac{p_{n+1}-2}{4}\right]$ и $j_n = \frac{p_{n+1}}{2}$

$$D_{j_n m_n}(x,t) = \frac{m_n}{\sin\frac{\pi(4l+1)}{p_{n+1}}}e^{\frac{i\pi(4l+1)(p_{n+1}-2)}{2p_{n+1}}}. \tag{46}$$

Пусть неограниченная последовательность $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ не удовлетворяет условию п. 7.1. Это означает, что всякая её бесконечная подпоследовательность (а она должна быть, так как $\sup\limits_n p_n = \infty$) может содержать не более чем конечное число нечётных чисел. Отбросив их, получим бесконечную подпоследовательность, состоящую только из чётных чисел. Перейдя в ней, в случае необходимости, к подпоследовательности, построим бесконечную возрастающую подпоследовательность $\{p_{n_k+1}\}_{k=1}^{\infty}$, состоящую только из чётных чисел и удовлетворяющей условию (38). Рассмотрим функцию

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln p_{n_k+1}}e^{-\frac{i\pi(4l+1)(p_{n_k+1}-2)}{2p_{n_k+1}}}, & \text{если } x\dot{-}t\in G_{4l+1,n_k+1}\subset G_{n_k}\setminus G_{n_k+1}, \\ & l=0,1,2,\ldots\left[\frac{p_{n_k+1}-2}{4}\right],\ k=1,2,3,\ldots, \\ 0, & \text{для остальных } t. \end{cases}$$

Аналогично п. 7.1 показываем, что функция $f(t)$ непрерывна на группе G и её частичные суммы Фурье удовлетворяют условию (40). Положим

$$j_k = \frac{p_{n_k+1}}{2}. \tag{47}$$

Рассмотрим $\int\limits_{x\dot{-}t\in G_{4l+1,n_k+1}} f(t)D_{j_k m_{n_k}}(x,t)\,dt$. Из равенства (46) получим

$$\int\limits_{x\dot{-}t\in G_{4l+1,n_k+1}} f(t)D_{j_k m_{n_k}}(x,t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\ln p_{n_k+1}} \times \frac{m_{n_k}}{\sin\frac{\pi(4l+1)}{p_{n_k+1}}} \times \int\limits_{x\dot{-}t\in G_{4l+1,n_k+1}} e^{\frac{i\pi(4l+1)(p_{n_k+1}-2)}{2p_{n_k+1}}} e^{-\frac{i\pi(4l+1)(p_{n_k+1}-2)}{2p_{n_k+1}}}\,dt \geqslant$$

$$\geqslant \frac{m_{n_k}}{\ln p_{n_k+1}\frac{\pi(4l+1)}{p_{n_k+1}}} \int\limits_{x\dot{-}t\in G_{4l+1,n_k+1}} dt = \frac{m_{n_k}p_{n_k+1}}{\pi(4l+1)\ln p_{n_k+1}m_{n_k+1}} = \frac{1}{\pi(4l+1)\ln p_{n_k+1}}.$$

Мы доказали формулу

$$\int\limits_{x\dot{-}t\in G_{4l+1,n_k+1}} f(t)D_{j_k m_{n_k}}(x,t)\,dt \geqslant \frac{1}{\pi(4l+1)\ln p_{n_k+1}} \tag{48}$$

(неравенство (48), в частности, означает, что его левая часть всегда действительна).

Теперь рассмотрим $S^{(\Gamma)}_{j_k m_{n_k}}(x,f)$:

$$S^{(\Gamma)}_{j_k m_{n_k}}(x,f) = \int\limits_G f(t)D_{j_k m_{n_k}}(x,t)\,dt = \int\limits_{x\dot{-}t\in G_{n_k+1}} f(t)D_{j_k m_{n_k}}(x,t)\,dt +$$

$$+ \int\limits_{x\dot{-}t\in G_{n_k}\setminus G_{n_k+1}} f(t)D_{j_k m_{n_k}}(x,t)\,dt + \int\limits_{x\dot{-}t\in G\setminus G_{n_k}} f(t)D_{j_k m_{n_k}}(x,t)\,dt. \tag{49}$$

Ввиду равенства (12) последнее слагаемое в (49) обращается в нуль. Мы показали, что

$$S^{(\Gamma)}_{j_k m_{n_k}}(,f) = \int\limits_{x\dot{-}t\in G_{n_k+1}} f(t)D_{j_k m_{n_k}}(x,t)\,dt + \int\limits_{x\dot{-}t\in G_{n_k}\setminus G_{n_k+1}} f(t)D_{j_k m_{n_k}}(x,t)\,dt. \tag{50}$$

Первое слагаемое в (50) оценим исходя из теоремы А и равенства (15) (j_k определены в (47)):

$$\left|\int\limits_{x\dot{-}t\in G_{n_k+1}} f(t)D_{j_k m_{n_k}}(x,t)\,dt\right| = j_k m_{n_k}\left|\int\limits_{x\dot{-}t\in G_{n_k+1}} f(t)\,dt\right| \leqslant \frac{p_{n_k+1}m_{n_k}}{2}\int\limits_{x\dot{-}t\in G_{n_k+1}} |f(t)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{m_{n_k+1}}{2\ln p_{n_k+1}} \int\limits_{x\dot{-}t\in G_{n_k+1}} dt \leqslant \frac{m_{n_k+1}}{\ln p_{n_k+1}} \times \frac{1}{m_{n_k+1}} = \frac{1}{\ln p_{n_k+1}},$$

так как мера $\mu(G_{n_k+1}) = \frac{1}{m_{n_k+1}}$.

Заметим, что равенства (41) и (50) идентичны.

Мы показали, что первое слагаемое в (50) удовлетворяет неравенству (42).

Используя определение функции $f(t)$ (перед формулой (47)), рассмотрим второй интеграл в правой части равенства (50). Из неравенства (48) имеем

$$\int\limits_{x\dot{-}t\in G_{n_k}\setminus G_{n_k+1}} f(t)D_{j_k m_{n_k}}(x,t)\,dt = \sum_{l=0}^{\left[\frac{p_{n_k+1}-2}{4}\right]} \int\limits_{x\dot{-}t\in G_{4l+1,n_k+1}} f(t)D_{j_k m_{n_k}}(x,t)\,dt \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\pi \ln p_{n_k+1}} \sum_{l=0}^{\left[\frac{p_{n_k+1}-2}{4}\right]} \frac{1}{4(l+1)} \geqslant \frac{\ln \left[\frac{p_{n_k+1}-2}{4}\right]}{4\pi \ln p_{n_k+1}} \geqslant \frac{\ln \left(\frac{p_{n_k+1}-2}{4} - 1\right)}{4\pi \ln p_{n_k+1}} = \frac{\ln (p_{n_k+1} - 6) - \ln 4}{4\pi \ln p_{n_k+1}}.$$

Итак, второе слагаемое в (50) оценивается неравенством (43). Рассуждая далее как в п. 7.1, мы приходим к выводу, что ряд Фурье по системе Γ от функции $f(t)$ в точке расходится (ограниченно). Теорема 2 полностью доказана. □

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. О БОЛЕЕ РАННИХ РЕЗУЛЬТАТАХ И ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Систему Ψ рассматривали Н. Я. Виленкин [1] для простых p_n как систему характеров нульмерной компактной абелевой группы и Прайс (Price) [12] на отрезке $[0,1]$ (условия простоты p_n Прайс не накладывал). В данной работе система Ψ рассматривается на группе последовательностей G, которая отображением Монна взаимно-однозначно переводится на модифицированный отрезок $[0,1]^*$ с сохранением меры и интеграла Лебега. Условие простоты на числа из последовательности $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ не накладывается, а базисный элемент e_n выбирается не произвольный из смежного класса в G_{n-1}/G_n, как в нульмерных компактных абелевых группах, а строго задан. Поэтому рассматриваемую в работе систему Ψ лучше называть системой Прайса.

Для $p_n \equiv p$ система Ψ переходит в систему Крестенсона (Chrestenson) [13] (либо Крестенсона – Леви); для $p_n \equiv 2$ — в систему Уолша (Walsh) [14] $W = \{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ в нумерации Пэли (Paley) [15].

При $p_n \equiv 2$ функции $r_n(x) = \psi_{m_n}(x) = w_{2^n}(x)$ рассматривались Радемахером (Rademacher) [16]. Поэтому их часто называют функциями Радемахера (для систем Виленкина либо Прайса).

Систему Γ на отрезке $[0;1]$ рассматривали (по-видимому, впервые) Б. И. Голубов и А. И. Рубинштейн [10] (с ограничением $\sup\limits_n p_n < \infty$) и Б. И. Голубов [9] (без ограничений на последовательность $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$; сама система Γ обозначена в честь Б. И. Голубова). В случае $p_n \equiv 2$ последовательность функций $\{\gamma_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ является системой Хаара (Haar) [17] $H = \{h_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$. На нульмерной компактной абелевой группе система $\{\gamma_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ была рассмотрена С. Ф. Лукомским [11]. Следует отметить, что, как показывает теорема 2, система типа Хаара Γ в отличие от системы Хаара H при $\sup\limits_n p_n = \infty$ уже не является системой сходимости.

Так как двусторонняя оценка S-мажоранты (27) не зависит от выбора базисных элементов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ (хотя сама S-мажоранта к ним привязана), а при доказательстве теоремы 1 используется только эта оценка S-мажоранты, то теорему 1 и все следствия из неё (в том числе и следствие 2 — признак Дини – Липшица по системам типа Хаара) можно распространить и на группы Виленкина.

С. Ф. Лукомский [11] показал, что если выполнено условие

$$\omega_n(f) = o\left(\frac{1}{p_{n+1}}\right), \tag{51}$$

то ряд Фурье по обобщённой системе Хаара от непрерывной на группе G функции $f(t)$ сходится к ней равномерно на G, откуда, в частности, легко вывести и следствие 5 (ранее получено в [11]). В [11] результат рассматривался на нульмерных компактных абелевых группах. Теорема 1 (точнее — следствие 3) является улучшением условия (51), а теорема 2 показывает, что отменить (51) (либо хотя бы улучшить (33)) уже нельзя.

Интегральные оценки ядер Дирихле (функции Лебега) по обобщённым системам Хаара на нульмерных компактных группах найдены также Н. Е. Комиссаровой [18] .

Для систем Ψ условие Дини – Липшица было получено в [8], где показано, что если

$$\omega_n(f) = o\left(\frac{1}{\ln m_{n+1}}\right),$$

то ряд Фурье по системе Виленкина от непрерывной на группе G функции $f(t)$ сходится к ней равномерно на G, а также в случае $\sup\limits_n p_n = \infty$ существует непрерывная на группе G функция $f(t)$, такая, что $\omega_n(f) = O\left(\frac{1}{\ln m_{n+1}}\right)$, однако её ряд Фурье по системе Виленкина расходится в точке $x = 0$.

Не лишне было бы упомянуть, что следствие 1 можно получить из установленного Б. И. Голубовым [9, формула (4.10)] неравенства

$$\|f(t) - S_n(t, f)\|_{C(G)} \leqslant (1 + L_s)E_s^\infty(f),$$

где n и s связаны соотношением (1), L_n — константа Лебега (Комиссаровой [18] было показано, что $L_n = O(\ln n)$), а $E_n^\infty(f)$ — наилучшее приближение в метрике $C(G)$ непрерывной на G функции $f(t)$ полиномом n-й степени по обобщённой системе Хаара $\{\gamma_n(t)\}_{n=0}^\infty$. Однако в данной работе приведено иное доказательство с получением соответствующей *поточечной* оценки для непрерывной *в заданной точке* (и совсем не обязательно на группе G) функции $f(t)$ (теорема 1).

Автор выражает благодарность Б. И. Голубову, Т. П. Лукашенко, С. Ф. Лукомскому, В. А. Скворцову и Д. В. Фуфаеву за ценные советы и замечания, С. А. Маненкову, А. Ю. Кудрявцеву и А. И. Шканаеву за помощь при оформлении работы, а также организаторам 17-й Международной Саратовской зимней математической школы [19] за предоставленную возможность сделать доклад и изложить основные результаты данной работы.

Библиографический список

1. *Виленкин Н. Я.* Об одном классе полных ортогональных систем // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1947. Т. 11, № 4. С. 363–400.
2. *Агаев Г. Н., Виленкин Н. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И.* Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нульмерных группах. Баку : ЭЛМ, 1981. 180 с.
3. *Monna A. F.* Analyse Non-Archimédienne. Berlin ; Heidelberg ; N.Y. : Springer-Veilag, 1970. 118 c.
4. *Хренников А. Ю., Шелкович В. М.* Современный p-аддический анализ и математическая физика. Теория и приложения. М. : Физматгиз, 2012. 452 с.
5. *Щербаков В. И.* Расходимость рядов Фурье по обобщённым системам Хаара в точках непрерывности функции // Изв. вузов. Сер. матем. 2016. № 1. С. 49–68.
6. *Щербаков В. И.* О поточечной сходимости рядов Фурье по мультипликативным системам // Вестн. МГУ. Сер. Математика, механика. 1983. № 2. С. 37–42.
7. *Onneweer C. W., Waterman D.* Uniform convergence of Fourier Series on groups // Michigan Math. J. 1971. Vol. 18, iss. 3. P. 265–273.
8. *Щербаков В. И.* Признак Дини – Липшица и сходимость рядов Фурье по мультипликативным системам // Analysis Math. 1984. Vol. 10, iss. 1. P. 133–150.
9. *Голубов Б. И.* Об одном классе полных ортогональных систем // Сиб. матем. журн. 1968. Т. IX, № 2. С. 297–314.
10. *Голубов Б. И., Рубинштейн А. И.* Об одном классе систем сходимости // Матем. сб. Нов. сер. 1966. Т. 71, вып. 1. С. 96–115.
11. *Лукомский С. Ф.* О рядах Хаара на компактной нульмерной группе // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 1. С. 24–29.
12. *Price J. J.* Certain groups of orthogonal step functions // Canadian J. Math. 1957. Vol. 9, iss. 3. P. 417–425.
13. *Chrestenson H. E.* A class of generalized Walsh's functions // Pacific J. Math. 1955. Vol. 5, iss. 1. P. 17–31.
14. *Walsh J. L.* A constructive of normal orthogonal functions // Amer. J. Math. 1923. Vol. 49, iss. 1. P. 5–24.
15. *Paley R. E. A. C.* A remarkable series of orthogonal functions // Proc. London Math. Soc. 1932. Vol. 36. P. 241–264.
16. *Rademacher H.* Enige *Sätzeüber* Reihen von allgemeinen Orthogonalfunctionen // Math. Ann. 1922. B. 87, № 1–2. P. 112–130.
17. *Haar A.* Zur Theorie der Orthogonalischen Functionsysteme // Math. Ann. 1910. B. 69. P. 331–371.
18. *Комиссарова Н. Е.* Функции Лебега по системе Хаара на нульмерных компактных группах // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 3. С. 30–36.
19. *Щербаков В. И.* Признак Дини – Липшица по обобщённым системам Хаара // Современные пробелмы теории функций и их приложения : материалы 17-й междунар. Сарат. зимн. шк. Саратов : Научная книга, 2014. С. 307–308.

Образец для цитирования:

Щербаков В. И. Признак Дини – Липшица для обобщённых систем Хаара // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 4. С. 435–448. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-435-448.

Dini – Lipschitz Test on the Generalized Haar Systems

V. I. Shcherbakov

Victor I. Shcherbakov, Moscow Technical University of Communication and Information, 32, Narodnogo Opolchenija str., 123995, Moscow, Russia, kafmathan@mail.ru (for Shcherbakov V. I.)

Generalized Haar systems, which are generated (generally speaking, unbounded) by a sequence $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ and which is defined on the modification segment $[0,1]^*$, thai is on a segment [0, 1], where $\{p_n\}$ — rational points are calculated two times and which is a geometrical representation of zero-dimensional compact Abelians group are considering in this work. The main result of this work is a setting of the pointwise estimation between of an absolute value of difference between continuous in the given point function and it's n-s particular Fourier sums and "pointwise" module of continuity of this function (this notion ("pointwise" module of continuity $\omega_n(x,f)$) is also defined in this work). Based on this a uniform estimation between an absolute value of difference between a continious on the $[0,1]^*$ function and it's particular Fourier Sums and the module of continuity of this function is established. A sufficient condition of the pointwise and uniformly boundedness of particular Fourier Sums by generalized Haar's systems for the given continuous function is established too. Based on this estimation we establish a test of convergence of Fourier Series with respect to generalized Haar's systems analogous Dini – Lipschitz test. The unimprovement of the test, which is obtained in this work, is showed too. For any $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ with $\sup\limits_n p_n = \infty$ a model of the continuous on $[0,1]^*$ function, which Fourier Series by generalized Haar's system, which generated by sequence $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ boundly diverges in some fixed point, is constructed. This result may be applied to the zero-dimentions compact Abelian groups.

Key words: Abelian group, modification segment [0; 1], a continuous functions on the modification segment [0; 1], characters systems, Price's systems, a generalized Haar's systems, Dirichler's kernels, Dini – Lipschitz's test .

References

1. Vilenkin N. Ya. On a class of complete orthonormal systems. *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.*, 1947, vol. 11, no. 4, pp. 363–400 (in Russian).
2. Agaev G. N., Vilenkin N. Ya., Dzafarli G. M., Rubinstein A. I. *Mul'tiplicativnye sistemi funkciy i garmonicheskiy analiz na nul'mernyh gruppah* [Multiplicative Systems of Functions and Harmonic Analysis on Zero-dimensional Groups]. Baku, ELM, 1981, 180 p. (in Russian).
3. Monna A. F. *Analyse Non-Archimédienne*. Berlin, Heidelberg, N. Y., Springer-Veilag, 1970, 118 p.
4. Khrennikov A. Y., Shelkovich V. M. Sovremennyi p-addicheskyi analiz i matematicheskaja phizika. Teoria i prilozhenija [The Moderne p-additional Analysis and Mathematical Phisics. Theory and Applications]. Moscow, Fizmatgiz, 2012, 452 p. (in Russian).
5. Shcherbakov V. I. Divergence of the Fourier series by generalized Haar systems at points of continuity of a function. Russian Math. (Iz. VUZ), 2016, vol. 60, no. 1, pp. 42–59. DOI: 10.3103/S1066369X16010059.
6. Shcherbakov V. I. About Pointwise convergence of the Fourier Series with Respect to Multiplicative Systems. *Vestn. MSU, Ser. Math., Mech.*, 1983, iss. 2, pp. 37–42 (in Russian).
7. Onneweer C. W., Waterman D. Uniform convergence of Fourier Series on groups. *Michigan Math. J.*, 1971, vol. 18, iss. 3, pp. 265–273.
8. Shcherbakov V. I. Dini – Lipschitz Test and Convergence of Fourier Series which Respect to Multiplicative Systems. *Analysis Math.*, 1984. vol. 10, iss. 1, pp. 133–150 (in Russian).
9. Golubov B. I. About One Class of the Complete Orthogonal Systems. *Sib. Math. J.*, 1968, vol. IX, no. 2, pp. 297–314 (in Russian).
10. Golubov B. I., Rubinshtein A. I. A class of convergence systems. *Mat. Sb. (N.S.)*, 1966, vol. 71, iss. 1, pp. 96–115 (in Russian).
11. Lukomskii S. F. Haar series on compact zero-dimensional abelian group. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2009, vol. 9, iss. 1, pp. 24–29 (in Russian).
12. Price J. J. Certain groups of orthogonal step functions. *Canadian J. Math.*, 1957, vol. 9, iss. 3, pp. 417–425.
13. Chrestenson H. E. A class of generalized Walsh's functions. *Pacific J. Math.*, 1955, vol. 5, iss. 1, pp. 17–31.
14. Walsh J. L. A constructive of normal orthogonal functions. *Amer. J. Math.*, 1923, vol. 49, iss. 1, pp. 5–24.
15. Paley R. E. A. C. A remarkable series of orthogonal functions. *Proc. London Math. Soc.*, 1932, vol. 36, pp. 241–264.
16. Rademacher H. Enige *Sätze über* Reihen von allgemeinen Orthogonalfunctionen. *Math. Ann.*, 1922, B. 87, no. 1–2, pp. 112–130.
17. Haar A. Zur Theorie der Orthogonalischen Functionsysteme. *Math. Ann.*, 1910, B. 69, pp. 331–371.
18. Komissarova N. E. Lebesgue functions for Haar system on compact zero-dimensional group. *Izv.*

Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform., 2012, vol. 13, iss. 3, pp. 30–36 (in Russian).

19. Shcherbakov V. I. Priznak Dini – Lipshitza po obobshchennym sistemam Haara [Dini-Lipschitz Test on the Generalized Haar's Systems]. *Sovremennye problemy teorii funktsii i ikh prilozheniia : materialy 17-i mezhdunar. Sarat. zimn. shk.* [Contemporary Problems of Function Theory and Their Applications : Proc. 17th Intern. Saratov Winter School], Saratov, Nauchnaya kniga, 2014, pp. 307–308 (in Russian).

Please cite this article in press as:
Shcherbakov V. I. Dini – Lipschitz Test on the Generalized Haar Systems. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 4, pp. 435–448 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-435-448.