

МЕХАНИКА

УДК 539.3

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПАРАМЕТРОВ ЗАКРЕПЛЕНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ БАЛКИ ПРИ НАЛИЧИИ ЗАТУХАНИЯ

А. О. Ватульян¹, Л. В. Васильев²

¹Ватульян Александр Ованесович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теории упругости, Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Владикавказский научный центр РАН (ЮМИ), vatulyan@math.sfedu.ru

²Васильев Леонид Викторович, магистр кафедры теории упругости, Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, leninid@mail.ru

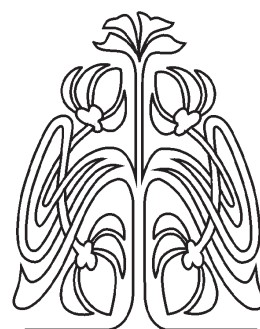
Определение характеристик твердых тел по дополнительным данным об амплитудах смещений или резонансным значениям в последние годы все чаще привлекает внимание исследователей. Среди такого типа задач особый интерес вызывают задачи, связанные с определением параметров, входящих в граничные условия и характеризующих взаимодействие исследуемого тела с окружающими телами. В настоящей работе исследуется задача об определении параметров граничных условий в балке, представлен новый подход к решению обратной задачи о реконструкции параметров опирания неоднородной вязкоупругой балки с вязкоупругими связями на правом конце и жестким закреплением на левом конце на основе анализа амплитуды и сдвига фазы смещения в двух точках на фиксированной частоте. Использован принцип соответствия для составления дифференциального уравнения колебаний на основе модели стандартного вязкоупругого тела. Представлен способ сведения задачи к каноническому виду. Составлены вспомогательные задачи Коши для численного решения как прямой, так и обратной задачи методом пристрелки. В рамках представленной модели проведены вычислительные эксперименты по восстановлению 4 параметров, характеризующих вязкоупругие связи в краевых условиях. Проанализировано влияние изменения параметров на резонансную частоту и амплитуду смещений. Проведена оценка влияния зашумления входных данных на реконструкцию искомым параметров. Отмечено, что представленный способ реконструкции позволяет восстанавливать параметры в граничных условиях с достаточно высокой точностью.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение 4-го порядка с переменными коэффициентами, краевые условия, колебания, реконструкция, вязкоупругость.

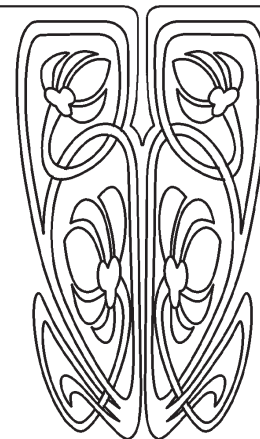
DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-449-456

ВВЕДЕНИЕ

Задачи об определении характеристик твердых тел по дополнительным данным об амплитудах смещений или резонансным значениям в последние годы все чаще привлекают внимание специалистов. Среди этого класса задач наиболее разработанным является класс граничных обратных задач по реконструкции параметров в граничных условиях. В реальных конструкциях часто характер закрепления на некоторой части границы оказывается отличным от канонического и моделируется некоторой упругой или вязкоупругой связью, причем для расчетов на прочность и колебания которой необходимо определить характеристики этой связи. Среди методов,



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





позволяющих оценить характеристики упругих систем, следует в первую очередь отметить акустические; в [1, 2] изложены теоретические основы низкочастотных акустических методов контроля. Отметим, что подобная задача для упругой балки с постоянной жесткостью была рассмотрена ранее [3–5], причем в этом случае можно выписать аналитическое решение, например через функции Крылова, соответственно составить частотное уравнение в явном виде и далее на основе анализа аналитических зависимостей определять искомые параметры на основе данных о нескольких резонансных частотах. В случае переменной жесткости анализировать аналитические зависимости при произвольных законах неоднородности не представляется возможным ввиду их отсутствия, однако можно реализовать построение численного решения с любой степенью точности на основе введения некоторых специальных задач Коши, порожденных исходной краевой задачей. В то же время вопрос об эффективности реконструкции параметров опирания при наличии затухания остается открытым. В настоящей работе представлен метод восстановления параметров закрепления вязкоупругого стержня с переменной жесткостью, жестко закрепленного на левом конце и имеющего вязкоупругие связи на другом конце при известных смещениях, заданных (измеренных) в двух точках. Применен принцип соответствия для составления дифференциального уравнения собственных колебаний на основе модели стандартного вязкоупругого тела. Представлен способ сведения задачи к каноническому виду. Составлены вспомогательные задачи Коши для численного решения как прямой, так и обратной задачи методом пристрелки. Поскольку искомые параметры вязкоупругости содержатся только в граничных условиях, то произведена оценка влияния этих параметров на амплитуду смещения точек балки и разработан эффективный способ их реконструкции, представлены результаты вычислительных экспериментов.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим колебания неоднородной вязкоупругой балки длины L . Будем считать, что левый конец балки зашпелен, а правый — оперт, причем опора имеет вязкоупругие свойства. Для общего случая уравнение колебаний упругой балки переменной жесткости имеет вид [6]

$$(E(x)Jy''(x))'' - \rho F \omega^2 y(x) = q, \quad (1)$$

где q — распределенная нагрузка. Для изучения колебаний балки из вязкоупругого материала будем использовать модель стандартного вязкоупругого тела [7], для которого определяющее соотношение имеет вид

$$n\dot{\sigma} + \sigma = En\dot{\varepsilon} + H\varepsilon, \quad (2)$$

где n — время релаксации, σ — напряжение, E — мгновенный модуль упругости, ε — деформация, H — длительный модуль упругости. Будем использовать принцип соответствия [7], согласно которому для изучения колебаний балки из вязкоупругого материала в уравнении (1) необходимо заменить модуль упругости комплексной функцией частоты координаты аналогично [8]. Вводя безразмерный параметр

$$k^4 = \frac{\rho_0 F_0 l^4}{G_0} \omega^2$$

и выражая

$$\omega = \frac{k^2}{l^2} \sqrt{\frac{G_0}{\rho_0 F_0}}$$

(G_0 — характерная жесткость, ρ_0 — характерная плотность материала, F_0 — характерная площадь поперечного сечения), получим, что в силу принципа соответствия необходимо заменить $E(x)$ на динамический модуль:

$$G_0 f(\xi, k) = G_0 \frac{h(\xi) + ik^2 c g(\xi)}{1 + ik^2 c},$$

где $h(\xi) = \frac{H(\xi)}{G_0}$, $g(\xi) = \frac{E(\xi)}{G_0}$, $k^2 c = n\omega$, $\xi = \frac{x}{l}$ — безразмерная координата, причем $g(\xi) > h(\xi)$. Тогда аналог уравнения (1) для вязкоупругого случая имеет вид

$$(f(\xi, k)y''(\xi))'' - k^4 y(\xi) = q_0, \quad (3)$$



где $q_0 = \frac{q}{G_0}$. Вязкоупругую связь на конце $\xi = 1$ будем характеризовать 4 параметрами вязкоупругости. Тогда граничные условия для уравнения (3) примут вид

$$\begin{cases} y(0) = 0, \\ y'(0) = 0 \\ f(1, k)y''(1, k) - F_1(k)y'(1, k) = 0, \\ (f(1, k)y''(1, k))' + F_2(k)y(1, k) = 0, \end{cases} \quad (4)$$

где $F_1(k)$ и $F_2(k)$ — комплексные функции вида

$$F_i(k) = \frac{\beta_i(1 + ick^2 q_i)}{1 + ick^2},$$

β_i, q_i, c — параметры вязкоупругости (далее считаем параметр c заданным). Для решения краевой задачи (3), (4) используем метод стрельбы [9]. Приведем (3) к каноническому виду:

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = \frac{y_3}{f(\xi, k)}, \\ y_3' = y_4, \\ y_4' = k^4 y_1 + q_0, \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} y_1(0, k) = 0, \\ y_2(0, k) = 0, \\ f(1, k)y_3(1, k) - F_1(k)y_2(1, k) = 0, \\ f(1, k)'y_4(1, k) + F_2(k)y_1(1, k) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Решение краевой задачи (5), (6) получается путем формирования линейной комбинации решений с разными начальными условиями:

$$y = y_0 + y^1 c_1 + y^2 c_2. \quad (7)$$

Здесь y_0 — есть частное решение неоднородной задачи (6) с начальными условиями:

$$y_1^0(0) = 0, \quad y_2^0(0) = 0, \quad y_3^0(0) = 0, \quad y_4^0(0) = 0,$$

y_1 и y_2 — есть решения вспомогательных задач Коши для системы (6) при $q_0 = 0$ с начальными условиями:

$$1) \quad y_1^1(0) = 0, \quad y_2^1(0) = 0, \quad y_3^1(0) = 0, \quad y_4^1(0) = 1,$$

$$2) \quad y_1^2(0) = 0, \quad y_2^2(0) = 0, \quad y_3^2(0) = 1, \quad y_4^2(0) = 0.$$

Удовлетворяя граничным условиям исходной задачи, получим, что c_1 и c_2 определяются из решения следующей алгебраической системы:

$$\begin{cases} f(1, k)(y_3^0(1, k) + y_3^1(1, k)c_1 + y_3^2(1, k)c_2) - F_1(k)(y_2^0(1, k) + y_2^1(1, k)c_1 + y_2^2(1, k)c_2) = 0, \\ f(1, k)'(y_4^0(1, k) + y_4^1(1, k)c_1 + y_4^2(1, k)c_2) + F_2(k)(y_1^0(1, k) + y_1^1(1, k)c_1 + y_1^2(1, k)c_2) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Проведена серия численных экспериментов для прямой задачи при законах неоднородности $h(\xi) = \xi^2 + 0.2$, $g(\xi) = 1 + \xi$, $c = 0.01$. Амплитуда смещения при резонансном значении максимальна в вязкоупругом случае и принимает конечное значение в отличие от упругого случая, так как имеется затухание, обусловленное вязкоупругостью балки. Приведем сравнение амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) для упругого и вязкоупругого случая, которое представлено на рис. 1.

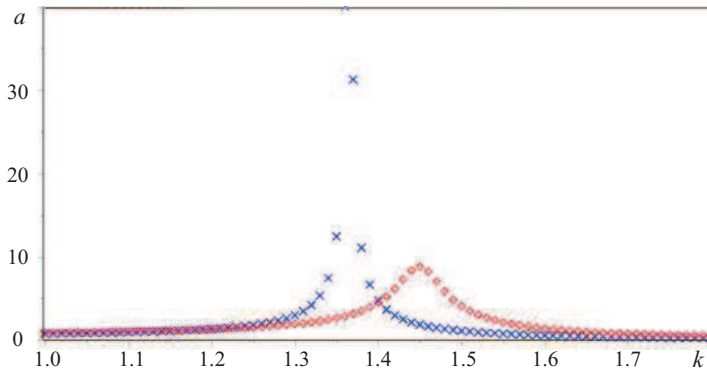


Рис. 1. АЧХ упругой и вязкоупругой балки

Крестики на рис. 1 обозначают амплитуды смещений для упругого случая, а кружочки для вязкоупругого, таким образом, вязкоупругие свойства балки на значение резонанса и значение амплитуды влияет достаточно сильно. Обозначим $a = |y(1, k)|$.

На рис. 2 изображены кривые, характеризующие участок АЧХ, соответствующий первому резонансу для разных параметров q_1 . Кривая, соответствующая $q_1 = 1$, обозначена квадратиками, $q_1 = 2$ — крестиками, $q_1 = 3$ — кружочками.

На рис. 3 изображены кривые, характеризующие участок АЧХ, соответствующий первому резонансу для разных параметров b_1 . Кривая, соответствующая $b_1 = 1$, обозначена точками, $b_1 = 0.6$ — плюсами, $b_1 = 0.3$ — крестиками, $b_1 = 0$ — кружочками.

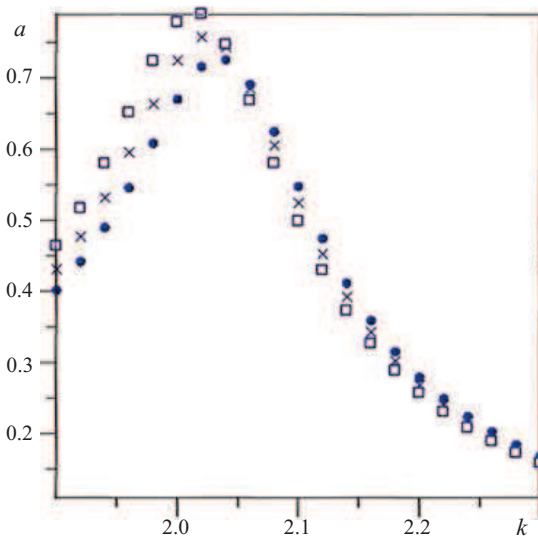


Рис. 2. Зависимость АЧХ от параметра q_1

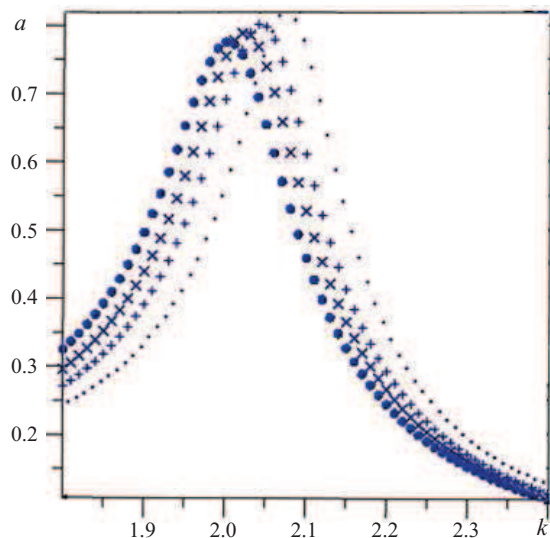


Рис. 3. Зависимость АЧХ от параметра b_1

На рис. 4 изображена АЧХ для неоднородности вида $h(\xi) = -\xi^2 + 1.2$, $g(\xi) = 1.3 + \xi$.

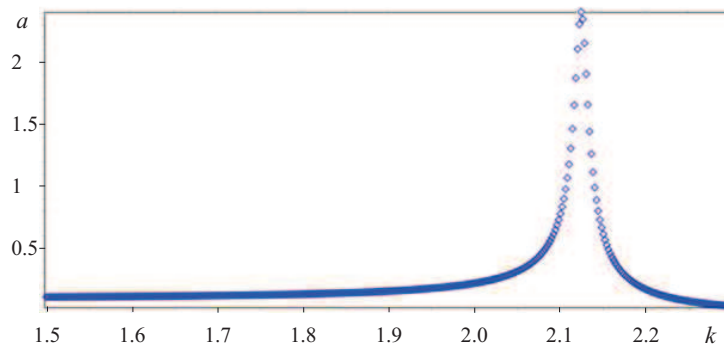


Рис. 4. АЧХ при $h(\xi) = -\xi^2 + 1.2$, $g(\xi) = 1.3 + \xi$

Таким образом, вид функций $h(\xi)$ и $g(\xi)$ существенно влияет на резонансную частоту и амплитуду колебаний.



2. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

Рассмотрим несколько способов восстановления параметров, входящих в граничные условия. Пусть известны две резонансные частоты и комплексные значения перемещений. Тогда можно при помощи метода пристрелки восстановить неизвестные параметры β_1 и β_2 . Решая систему (8) относительно параметров c_1 и c_2 , получаем

$$c_1 = -\frac{b}{P} \quad \text{и} \quad c_2 = \frac{d}{P},$$

где

$$P = a_0 + a_1 F_1(k) + a_2 F_2(k) + a_3 F_1(k) F_2(k),$$

$$a_0 = f(1, k) f'(1, k) (y_4^2(1, k) y_3^1(1, k) - y_3^2(1, k) y_4^1(1, k)), \quad a_1 = f'(1, k) (y_3^2(1, k) y_1^1(1, k) - y_1^2(1, k) y_3^1(1, k)),$$

$$a_2 = f(1, k) (y_4^2(1, k) y_2^1(1, k) - y_2^2(1, k) y_4^1(1, k)), \quad a_3 = y_2^2(1, k) y_1^1(1, k) - y_1^2(1, k) y_2^1(1, k),$$

$$b = b_0 + b_1 F_1(k) + b_2 F_2(k) + b_3 F_1(k) F_2(k),$$

$$b_0 = f(1, k) f'(1, k) (y_4^0(1, k) y_3^2(1, k) - y_3^0(1, k) y_4^2(1, k)), \quad b_1 = f'(1, k) (y_4^0(1, k) y_2^2(1, k) - y_2^0(1, k) y_4^2(1, k)),$$

$$b_2 = f(1, k) (y_3^0(1, k) y_1^2(1, k) - y_1^0(1, k) y_3^2(1, k)), \quad b_3 = y_1^0(1, k) y_2^2(1, k) - y_2^0(1, k) y_1^2(1, k),$$

$$d = d_0 + d_1 F_1(k) + d_2 F_2(k) + d_3 F_1(k) F_2(k),$$

$$d_0 = f(1, k) f'(1, k) (y_4^0(1, k) y_3^2(1, k) - y_3^0(1, k) y_4^2(1, k)), \quad d_1 = f'(1, k) (y_4^0(1, k) y_2^1(1, k) - y_2^0(1, k) y_4^1(1, k)),$$

$$d_2 = f(1, k) (y_3^0(1, k) y_1^1(1, k) - y_1^0(1, k) y_3^1(1, k)), \quad d_3 = y_1^0(1, k) y_2^1(1, k) - y_2^0(1, k) y_1^1(1, k).$$

Решения содержат в себе $F_1(k)$ и $F_2(k)$. Подставляя эти выражения в (7), получим формулы для расчета прогиба балки в произвольной точке. Будем считать, что для восстановления неизвестных параметров вязкоупругости известны две резонансные частоты и смещения в них, на основании этих данных составим систему двух уравнений

$$\begin{cases} PA_1 = -(y_2^2(1, k_1) F_2(k_1) + f(1, k_1)' y_3^2(1, k_1)) y_1^1(1, k_1) + (y_2^1(1, k_1) F_2(k_1) + f(1, k_1)' y_3^1(1, k_1)) y_1^2(1, k_1), \\ PA_2 = -(y_2^2(1, k_2) F_2(k_2) + f(1, k_2)' y_3^2(1, k_2)) y_1^1(1, k_2) + (y_2^1(1, k_2) F_2(k_2) + f(1, k_2)' y_3^1(1, k_2)) y_1^2(1, k_2), \end{cases} \quad (9)$$

где A_1 и A_2 — известные комплексные значения амплитуд. Решая систему (9), получаем два набора решений. Пример вычислительного эксперимента по реконструкции параметров вязкоупругости приведен в табл. 1.

Таблица 1

Результаты реконструкции

Заданные β_1 и β_2	Восстановленные β_1 и β_2
$\beta_1 = 0.2, \beta_2 = 0.3$	$\beta_1 = 0.2004, \beta_2 = 0.2994$ $\beta_1 = 31.384, \beta_2 = -2.4799$

Отметим, что такой подход, как и в упругом случае, дает два набора параметров. Учитывая, что β_1 и β_2 положительны по физическому смыслу, то второе решение можно отбросить. Также можно восстанавливать β_1 и β_2 , если известно только одно резонансное значение k . При этом получим систему типа (9) путем разбиения условий на вещественную и мнимую части, но при такой схеме реконструкции возникает ещё 4 фантомных решения; результаты реконструкции представлены в табл. 2. Это свидетельствует о том, что для однозначной реконструкции искомым параметрам необходимо иметь информацию о двух амплитудах.

Представленный выше подход приводит к нелинейной проблеме при реконструкции параметров вязкоупругости. Заметим, что можно составить простые линейные уравнения для нахождения неизвестных параметров и уже восстанавливать четыре различных параметра, тогда как восстановление более трех параметров в указанном выше способе вызывает трудности из-за нелинейности уравнений. Для этого необходимо знать амплитуды, измеренные в двух точках балки на одной частоте, в этом случае составим систему из двух уравнений относительно амплитуд:

$$\begin{cases} A_1 = y_1^0(\xi_1) + c_1 y_1^1(\xi_1) + c_2 y_1^2(\xi_1), \\ A_2 = y_1^0(\xi_2) + c_1 y_1^1(\xi_2) + c_2 y_1^2(\xi_2). \end{cases} \quad (10)$$

Таблица 2

Результаты реконструкции

Заданные β_1 и β_2	Восстановленные β_1 и β_2
$\beta_1 = 0.2, \beta_2 = 0.3$	$\beta_1 = 0.2407, \beta_2 = 0.2575$ $\beta_1 = 0.2132, \beta_2 = 0.2860$ $\beta_1 = 0.2227, \beta_2 = -0.2915$ $\beta_1 = -1434.3, \beta_2 = -2.7329$ $\beta_1 = 0.2227, \beta_2 = -0.29158$



Решая (10) относительно c_1 и c_2 и подставляя полученные соотношения в (8), необходимо разделить уравнения в системе на мнимую и вещественную части и получить систему уравнений, линейно зависящих от искомым параметров вязкоупругости

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(f(1, k)(y_3^0(1, k) + y_3^1(1, k)c_1 + y_3^2(1, k)c_2) - F_1(k)(y_2^0(1, k) + y_2^1(1, k)c_1 + y_2^2(1, k)c_2)) = 0, \\ \operatorname{Im}(f(1, k)(y_3^0(1, k) + y_3^1(1, k)c_1 + y_3^2(1, k)c_2) - F_1(k)(y_2^0(1, k) + y_2^1(1, k)c_1 + y_2^2(1, k)c_2)) = 0, \\ \operatorname{Re}(f(1, k)'(y_4^0(1, k) + y_4^1(1, k)c_1 + y_4^2(1, k)c_2) + F_2(k)(y_1^0(1, k) + y_1^1(1, k)c_1 + y_1^2(1, k)c_2)) = 0, \\ \operatorname{Im}(f(1, k)'(y_4^0(1, k) + y_4^1(1, k)c_1 + y_4^2(1, k)c_2) + F_2(k)(y_1^0(1, k) + y_1^1(1, k)c_1 + y_1^2(1, k)c_2)) = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Были проведены численные испытания по восстановлению для функций, удовлетворяющих условию $\int_0^1 h_1(\xi) d\xi = \int_0^1 h_2(\xi) d\xi$. В табл. 3 представлены результаты при известных функциях $h_1(\xi) = \xi^2 + 0.5333$, $g(\xi) = 1.3 + \xi$, $c = 0.01$. В табл. 4 представлены результаты для $h_2(\xi) = -\xi^2 + 1.2$, $g(\xi) = 1.3 + \xi$, $c = 0.01$.

Результаты реконструкции

Таблица 3

k		2.01	2.32	2.23	2.19
Комплексное смещение	$\xi = 0.5$	0.0415 - 0.1489i	0.0737 - 0.3419i	0.0323 - 0.2697i	0.0485 - 0.2525i
	$\xi = 1$	0.1380 - 0.3375i	0.2428 - 1.0174i	0.1189 - 0.7631i	0.1634 - 0.7033i
Заданные	β_1	0.2	2	2.2	1.3
	β_2	0.3	3	1.3	1.3
	q_1	1.2	1.1	1.1	1.3
	q_2	1.3	1.4	1.8	1.3
Реконструкция	β_1	0.2074	2.0044	2.2031	1.3293
	β_2	0.3001	2.9925	1.2989	1.2867
	q_1	0.9970	1.1153	1.1848	1.3427
	q_2	1.2660	1.4062	1.7340	1.2816

Результаты реконструкции

Таблица 4

k		2.12	2.38	2.31	2.28
Комплексное смещение	$\xi = 0.5$	0.2241 + 0.9055i	0.3860 + 0.7267i	0.3191 + 0.7432i	0.0784 + 0.2352i
	$\xi = 1$	1.1202 + 2.3020i	0.1033 + 0.2407i	0.0783 + 0.2514i	0.3180 + 0.6887i
Заданные	β_1	0.2	2	2.2	1.3
	β_2	0.3	3	1.3	1.3
	q_1	1.2	1.1	1.1	1.3
	q_2	1.3	1.4	1.8	1.3
Реконструкция	β_1	0.1925	3.0209	2.2163	1.2813
	β_2	0.3022	1.9917	1.2951	1.2987
	q_1	1.3125	1.0914	1.0417	1.3103
	q_2	1.3269	1.4118	1.8381	1.2852

Для выявления влияния погрешностей эксперимента на результаты реконструкции проведен вычислительный эксперимент. Проведено зашумление входных параметров при помощи аддитивной случайной добавки, результаты экспериментов представлены в табл. 5.

Результаты реконструкции

Таблица 5

k		2.28	2.28	2.28	2.28
Комплексное смещение	$\xi = 0.5$	0.0784 + 0.2352i	0.0784 + 0.2352i	0.0784 + 0.2352i	0.0784 + 0.2342i
	$\xi = 1$	0.3181 + 0.6887i	0.3181 + 0.6886i	0.3179 + 0.6886i	0.3180 + 0.6897i
Заданные	β_1	1.3	1.3	1.3	1.3
	β_2	1.3	1.3	1.3	1.3
	q_1	1.3	1.3	1.3	1.3
	q_2	1.3	1.3	1.3	1.3
Реконструкция	β_1	1.3068	1.3343	1.3901	0.8325
	β_2	1.2981	1.2923	1.2693	1.4713
	q_1	1.5353	1.5255	0.8612	4.8804
	q_2	1.2241	1.2322	1.4684	0.5734



Результаты вычислительных экспериментов свидетельствуют о том, что при амплитуде зашумления порядка 10^{-3} искажения делают невозможным восстановление q_1 и q_2 .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлен новый способ оценки упругости опор балок переменной жесткости в упругом и вязкоупругом случаях по резонансным частотам. Получен метод восстановления параметров податливости опоры для различных типов неоднородности балки при известном резонансном значении и соответствующих ему амплитудах с достаточной точностью. Результаты вычислительных экспериментов позволили сделать вывод о том, что в вязкоупругом случае восстановление параметров происходит с меньшей точностью, чем в упругом случае.

Библиографический список

1. Углов А. Л., Ерофеев В. И., Смирнов А. Н. Акустический контроль оборудования при изготовлении и эксплуатации. М. : Наука, 2009. 279 с.
2. Глаголевский Б. А., Москаленко И. Б. Низкочастотные акустические методы контроля в машиностроении. Л. : Машиностроение, 1977. 203 с.
3. Ахтямов А. М. Теория идентификации краевых условий и её приложения. М. : Физматлит, 2009. 272 с.
4. Ахтямов А. М., Муфтахов А. В., Ахтямова А. А. Об определении закрепления и нагрузки одного из концов стержня по собственным частотам его колебаний // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьютер. науки. 2013. Вып 3. С. 114–129.
5. Ватульян А. О., Васильев Л. В. Об определении параметров упругого закрепления неоднородной балки // Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2015. Вып. 3. С. 14–20.
6. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем. М. : Машиностроение, 1970. 736 с.
7. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. М. : Мир, 1974. 340 с.
8. Богачев И. В., Ватульян А. О. Обратные коэффициентные задачи для диссипативных операторов и идентификация свойств вязкоупругих материалов // Владикавказ. матем. журн. 2012. Т. 14, вып. 3. С. 31–44.
9. Калиткин Н. Н. Численные методы : учеб. пособие. СПб. : БХВ-Петербург, 2011. 586 с.

Образец для цитирования:

Ватульян А. О., Васильев Л. В. Об определении параметров закрепления неоднородной балки при наличии затухания // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 4. С. 449–456. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-449-456.

Determination of Attaching Parameters of Inhomogeneous Beams in the Presence of Damping

A. O. Vatulyan¹, L. V. Vasilev²

¹Alexandr O. Vatulyan, Southern Federal University, 105, B. Sadovaia str., 344006, Rostov-on-Don, Russia; Vladikavkaz Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, 22, Markusa str., 362008, Vladikavkaz, Russia, vatulyan@math.sfedu.ru

²Leonid V. Vasilev, Southern Federal University, 105, B. Sadovaia str., 344006, Rostov-on-Don, Russia, leninid@mail.ru

Characterization of solids by additional data on displacements amplitudes or resonance frequencies have been increasingly attracting attention of researchers in recent years. Among the tasks of this type, the problems associated with definition of parameters describing boundary conditions and characterizing an interaction of the body studied with the surrounding bodies are of particular interest. In this paper, we investigate the problem of determining the parameters of the boundary conditions in a beam. We propose a new approach to solve the inverse problem of a reconstruction of the bearing parameters of an inhomogeneous viscoelastic beam with viscoelastic bonds on the right end and being fixed at the left end based on the analysis of the amplitude and shift phase of the displacement at two points at a fixed frequency. We have used the principle of conformity to derive the differential equation of oscillations based on the standard model of viscoelastic body. We present a way of reduction of the original problem to the canonical form. We have formulated the auxiliary Cauchy problems for a numerical solution of both direct and inverse problems by the false position method. Within the framework of the present model, we have performed the computational experiments to restore 4 parameters characterizing the viscoelastic bonds in the boundary conditions. We have analyzed the influence of changes in the parameters on the resonant frequency and on the displacements amplitude. The influence of the input data noise on the reconstruction of the desired parameters is investigated. It is revealed that the method proposed for the reconstruction of the unknown parameters can be employed in order to their retrieval in the boundary conditions with high accuracy.

Key words: differential equation of order 4 with variable coefficients, boundary conditions, vibrations, reconstruction, viscoelasticity.



References

1. Uglov A. L., Erofeev V. I., Smirnov A. N. *Akusticheskiy kontrol' oborudovaniya pri izgotovlenii i ehkspluatatsii* [Acoustic control equipment in manufacturing and operation]. Moscow, Nauka, 2009. 279 p. (in Russian).
2. Glagolevskij B. A., Moskalenko I. B. *Nizkochastotnye akusticheskie metody kontrolya v mashinostroenii* [Low-frequency acoustic methods of inspection in mechanical engineering]. Leningrad, Mashinostroenie, 1977. 203 p. (in Russian).
3. Akhtyamov A. M. *Teoriya identifikatsii kraevykh usloviy i eyo prilozheniya* [The theory of identification of boundary conditions and applications]. Moscow, Fizmatlit, 2009. 272 p. (in Russian).
4. Ahtyamov A. M., Muftahov A. V., Ahtyamova A. A. Ob opredelenii zakrepleniya i nagruzhenosti odnogo iz koncov sterzhnya po sobstvennym chastotam ego kolebanij [Determination of loading and fixation of one end of the rod based on the natural frequencies]. *Vestn. Udmurtsk. un-ta. Matem. Mekh. Komp'yut. nauki*, 2013, vol. 3, pp. 114–129 (in Russian).
5. Vatulyan A. O., Vasilev L. V. Ob opredelenii parametrov uprugogo zakrepleniya neodnorodnoy balki [Determination of the parameters of an inhomogeneous beam elastic fixation]. *Ekologicheskij vestnik nauchnykh centrov CHEHS*, 2015, no. 3, pp. 14–20 (in Russian).
6. Philippov A. P. *Kolebaniya deformiruemyykh sistem* [Oscillations of deformable systems]. Moscow, Mashinostroenie, 1970. 736 p. (in Russian).
7. Kristensen R. *Voedenie v teoriyu vyazkoprugosti* [Introduction to the of viscoelasticity theory]. Moscow, Mir, 1974. 340 p. (in Russian).
8. Bogachev I. V., Vatulyan A. O. Obratnye koeffitsientnye zadachi dlya dissipativnykh operatorov i identifikatsiya svoystv vyazkoprugih materialov [The inverse coefficient problem for dissipative operators and identification of the properties of viscoelastic materials]. *Vladikavkazskiy matematicheskij zhurnal*, 2012, vol. 14, iss. 3, pp. 31–44 (in Russian).
9. Kalitkin N. N. *Chislennyye metody : ucheb. posobie* [Numerical methods. Tutorial]. St. Petersburg, BHV-Petersburg, 2011. 586 p. (in Russian).

Please cite this article in press as:

Vatulyan A. O., Vasilev L. V. Determination of Attaching Parameters of Inhomogeneous Beams in the Presence of Damping. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 4, pp. 449–456 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-449-456.

УДК 539.3

ИЗГИБ МНОГОСВЯЗНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ПЛИТ С КРИВОЛИНЕЙНЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ

С. А. Калоеров¹, А. И. Занько²

¹Калоеров Стефан Алексеевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории упругости и вычислительной математики, Донецкий национальный университет, kaloerov@mail.ru

²Занько Алена Игоревна, аспирант кафедры теории упругости и вычислительной математики, Донецкий национальный университет, all53700@mail.ru

Предложен приближенный метод определения напряженного состояния тонких плит с криволинейными отверстиями, заключающийся в использовании комплексных потенциалов теории изгиба анизотропных плит, аппроксимации контуров отверстий дугами эллипсов и берегами прямолинейных разрезов, конформных отображений, в представлении комплексных потенциалов рядами Лорана и определении неизвестных коэффициентов рядов обобщенным методом наименьших квадратов. Изотропные плиты рассматриваются как частный случай анизотропных плит. Численные исследования проведены для плиты с квадратными и треугольными отверстиями. Исследованиями установлена высокая степень точности получаемых результатов. Отмечены значительные отличия известных в литературе результатов от полученных данным подходом.

Ключевые слова: анизотропная пластинка, изотропная пластинка, криволинейное отверстие, комплексные потенциалы, обобщенный метод наименьших квадратов.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-456-464

ВВЕДЕНИЕ

Для плит с круговыми или эллиптическими контурами в свое время были разработаны методы решения задач определения напряженного состояния, основывающиеся на представлении исходных