



References

1. Uglov A. L., Erofeev V. I., Smirnov A. N. *Akusticheskiy kontrol' oborudovaniya pri izgotovlenii i ehkspluatatsii* [Acoustic control equipment in manufacturing and operation]. Moscow, Nauka, 2009. 279 p. (in Russian).
2. Glagolevskij B. A., Moskalenko I. B. *Nizkochastotnye akusticheskie metody kontrolya v mashinostroenii* [Low-frequency acoustic methods of inspection in mechanical engineering]. Leningrad, Mashinostroenie, 1977. 203 p. (in Russian).
3. Akhtyamov A. M. *Teoriya identifikatsii kraevykh usloviy i eyo prilozheniya* [The theory of identification of boundary conditions and applications]. Moscow, Fizmatlit, 2009. 272 p. (in Russian).
4. Ahtyamov A. M., Muftahov A. V., Ahtyamova A. A. Ob opredelenii zakrepleniya i nagruzhenosti odnogo iz koncov sterzhnya po sobstvennym chastotam ego kolebanij [Determination of loading and fixation of one end of the rod based on the natural frequencies]. *Vestn. Udmurtsk. un-ta. Matem. Mekh. Komp'yut. nauki*, 2013, vol. 3, pp. 114–129 (in Russian).
5. Vatulyan A. O., Vasilev L. V. Ob opredelenii parametrov uprugogo zakrepleniya neodnorodnoy balki [Determination of the parameters of an inhomogeneous beam elastic fixation]. *Ekologicheskij vestnik nauchnykh centrov CHEHS*, 2015, no. 3, pp. 14–20 (in Russian).
6. Philippov A. P. *Kolebaniya deformiruemyykh sistem* [Oscillations of deformable systems]. Moscow, Mashinostroenie, 1970. 736 p. (in Russian).
7. Kristensen R. *Voedenie v teoriyu vyazkoupругosti* [Introduction to the of viscoelasticity theory]. Moscow, Mir, 1974. 340 p. (in Russian).
8. Bogachev I. V., Vatulyan A. O. Obratnye koeffitsientnye zadachi dlya dissipativnykh operatorov i identifikatsiya svoystv vyazkoupругih materialov [The inverse coefficient problem for dissipative operators and identification of the properties of viscoelastic materials]. *Vladikavkazskiy matematicheskij zhurnal*, 2012, vol. 14, iss. 3, pp. 31–44 (in Russian).
9. Kalitkin N. N. *Chislennyye metody : ucheb. posobie* [Numerical methods. Tutorial]. St. Petersburg, BHV-Petersburg, 2011. 586 p. (in Russian).

Please cite this article in press as:

Vatulyan A. O., Vasilev L. V. Determination of Attaching Parameters of Inhomogeneous Beams in the Presence of Damping. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 4, pp. 449–456 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-449-456.

УДК 539.3

ИЗГИБ МНОГОСВЯЗНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ПЛИТ С КРИВОЛИНЕЙНЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ

С. А. Калоеров¹, А. И. Занько²

¹Калоеров Стефан Алексеевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории упругости и вычислительной математики, Донецкий национальный университет, kaloerov@mail.ru

²Занько Алена Игоревна, аспирант кафедры теории упругости и вычислительной математики, Донецкий национальный университет, all53700@mail.ru

Предложен приближенный метод определения напряженного состояния тонких плит с криволинейными отверстиями, заключающийся в использовании комплексных потенциалов теории изгиба анизотропных плит, аппроксимации контуров отверстий дугами эллипсов и берегами прямолинейных разрезов, конформных отображений, в представлении комплексных потенциалов рядами Лорана и определении неизвестных коэффициентов рядов обобщенным методом наименьших квадратов. Изотропные плиты рассматриваются как частный случай анизотропных плит. Численные исследования проведены для плиты с квадратными и треугольными отверстиями. Исследованиями установлена высокая степень точности получаемых результатов. Отмечены значительные отличия известных в литературе результатов от полученных данным подходом.

Ключевые слова: анизотропная пластинка, изотропная пластинка, криволинейное отверстие, комплексные потенциалы, обобщенный метод наименьших квадратов.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-456-464

ВВЕДЕНИЕ

Для плит с круговыми или эллиптическими контурами в свое время были разработаны методы решения задач определения напряженного состояния, основывающиеся на представлении исходных



комплексных потенциалов рядами Лорана и по полиномам Фабера и определении их коэффициентов методом рядов [1–3]. Эти методы с некоторой достоверностью давали значения искомым величин, правда, для достаточно неблизких расстояний между контурами. Для случаев же плит с криволинейными отверстиями имеются лишь отдельные исследования, результаты которых далеки от истинных.

Нашими исследованиями установлено, что в случае плоской задачи теории упругости для изотропной пластинки с отверстием в форме многоугольника из существующих методов наиболее точные результаты дает метод, использующий функции Колосова – Мусхелишвили с построением конформных отображений

$$\omega(\zeta) = R \left(\zeta + \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{\zeta^k} \right), \quad (1)$$

где R , c_k — постоянные, определяемые из геометрических характеристик контура отверстия. При этом для достижения достаточной точности в отображающей функции нужно оставлять довольно большое количество слагаемых, а комплексные потенциалы определять из граничных условий методом интегралов типа Коши [4]. Но для анизотропной пластинки с криволинейным отверстием точки при соответствующих аффинных преобразованиях и конформных отображениях переходят в различные точки, и метод интегралов типа Коши не применим. Эта тенденция сохраняется и в случае многосвязных плит. Существующие для указанных случаев методы решения задач, связанные с применением метода малого параметра для преобразования уравнений контуров и использованием метода рядов при удовлетворении граничным условиям, приводят к значительным погрешностям получаемых результатов и на сегодняшний день мало эффективны при решении современных задач инженерной практики. В наших работах [5, 6] предложено аппроксимировать криволинейные контуры дугами эллипсов и берегами прямолинейных разрезов, а для удовлетворения граничным условиям использовать дискретный метод наименьших квадратов [5] или обобщенный метод наименьших квадратов (ОМНК) [6]. Наиболее простым при численной реализации оказывается ОМНК. В данной статье последний подход использован для решения задач об изгибе анизотропных плит с произвольными криволинейными контурами. При этом изотропные плиты рассматривались как частный случай анизотропных плит. Численные исследования проведены для плит с квадратным и треугольным отверстиями. Исследовано влияние упругих характеристик материалов плит и геометрических характеристик отверстий на значения изгибающих моментов.

1. ПОСТАНОВКА И МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Рассмотрим занимающую многосвязную область, тонкую анизотропную плиту с эллиптическими отверстиями L_l ($l = \overline{1, L}$) с полуосями a_l , b_l центрами в точках (x_{0l}, y_{0l}) и углами φ_l между положительным направлением оси Ox и полуосями a_l (рис. 1).

Плита находится под действием распределенных поперечных усилий p_l и изгибающих моментов m_l на контурах L_l и моментов M_x^∞ , M_y^∞ , H_{xy}^∞ , действующих на бесконечности. В общем случае эллипсы L_l могут переходить в прямолинейные разрезы, располагаться произвольно относительно друг друга, в том числе касаться, пересекаться, образуя контуры сложной конфигурации, аппроксимируемые дугами эллипсов и берегами прямолинейных разрезов.

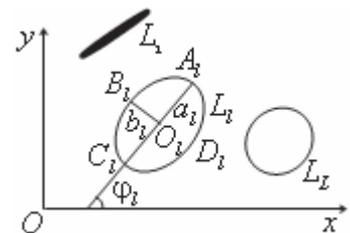


Рис. 1. Многосвязная плита

Определение напряженно-деформированного состояния рассматриваемой плиты при использовании комплексных потенциалов теории изгиба [1, 3, 7] сводится к нахождению комплексных потенциалов $W_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 2}$) из соответствующих граничных условий. Эти функции определены в многосвязных областях S_k , получаемых из заданной области S аффинными преобразованиями:

$$z_k = x + \mu_k y, \quad (2)$$

где μ_k — корни характеристического уравнения

$$D_{22}\mu^4 + 4D_{26}\mu^3 + 2(D_{12} + 2D_{66})\mu^2 + 4D_{16}\mu + D_{11} = 0, \quad (3)$$

$D_{ij} = b_{ij}D_0$ — жесткости материала плиты;

$$b_{11} = (a_{22}a_{66} - a_{26}^2)/\Delta, \quad b_{12} = (a_{16}a_{26} - a_{12}a_{66})/\Delta,$$



$$\begin{aligned} b_{16} &= (a_{12}a_{26} - a_{16}a_{22})/\Delta, & b_{22} &= (a_{11}a_{66} - a_{16}^2)/\Delta, \\ b_{26} &= (a_{12}a_{16} - a_{26}a_{11})/\Delta, & b_{66} &= (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)/\Delta, \\ \Delta &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{vmatrix}, \end{aligned} \tag{4}$$

a_{ij} — коэффициенты деформаций материала, $D_0 = 2h^3/3$, h — полутолщина плиты.

Многосвязные области S_k ограничены контурами L_{kl} , соответствующими контурам L_l области S при указанных аффинных преобразованиях. Используя методы конформных отображений и разложений функций в ряды Лорана для производных этих функций, получаем выражения вида [5, 7, 8]

$$W'_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^L (A_{kl} z_k + B_{kl}) \ln(z_k - z_{kl}) + \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{kln}}{\zeta_{kl}^n}, \tag{5}$$

в которых Γ_k — постоянные, определяемые из системы уравнений

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \Gamma_k &= C_{11} M_x^\infty + C_{21} M_y^\infty + C_{31} H_{xy}^\infty, & 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \mu_k \Gamma_k &= C_{12} M_x^\infty + C_{22} M_y^\infty + C_{32} H_{xy}^\infty, \\ 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \mu_k^2 \Gamma_k &= C_{13} M_x^\infty + C_{23} M_y^\infty + C_{33} H_{xy}^\infty, & 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \frac{1}{\mu_k} \Gamma_k &= 0, \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} C_{11} &= (2D_{22}D_{66} - 2D_{26}^2)/\Delta_1, & C_{21} &= (2D_{16}D_{26} - 2D_{12}D_{66})/\Delta_1, \\ C_{31} &= (2D_{12}D_{26} - 2D_{12}D_{22})/\Delta_1, & C_{12} &= (D_{12}D_{26} - D_{16}D_{22})/\Delta_1, \\ C_{22} &= (2D_{12}D_{16} - 2D_{11}D_{26})/\Delta_1, & C_{32} &= (D_{11}D_{22} - D_{12}^2)/\Delta_1, \\ C_{13} &= (2D_{16}D_{26} - 2D_{12}D_{66})/\Delta_1, & C_{23} &= (2D_{12}D_{66} - 2D_{16}^2)/\Delta_1, \end{aligned}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} D_{11} & 2D_{12} & 2D_{16} \\ D_{12} & 2D_{26} & 2D_{22} \\ D_{16} & 2D_{66} & D_{26} \end{vmatrix},$$

A_{kl}, B_{kl} — постоянные, определяемые из решения систем уравнений

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k}\right) iA_{kl} = \left(0, 0, 0, \frac{P_l}{2\pi D_{11}}\right), \tag{7}$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k}\right) iB_{kl} = \left(0, 0, -\frac{M_{xl}}{2\pi D_{22}}, -\frac{M_{yl}}{2\pi D_{11}}\right), \tag{8}$$

P_l и M_{xl}, M_{yl} — главный вектор и компоненты главного момента относительно начала координат усилий и моментов, приложенных к контуру L_l , ζ_{kl} — переменные, определяемые из конформных отображений

$$z_k = z_{kl} + R_{kl} \left(\zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}}\right) \tag{9}$$

внешности единичного круга $|\zeta_{kl}| \geq 1$ на внешности эллипсов L_{kl} ,

$$\begin{aligned} z_{kl} &= x_{0l} + \mu_k y_{0l}, \\ R_{kl} &= [a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + ib_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)]/2, \\ m_{kl} &= [a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - ib_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)]/2R_{kl}, \end{aligned} \tag{10}$$

a_{kln} — неизвестные постоянные, определяемые из граничных условий. В случае прямолинейного разреза в последних соотношениях нужно принять $b_l = 0$.

Конформные отображения можно построить и по координатам концов осей эллипсов $L_l (x_{A_l}, y_{A_l}, (x_{B_l}, y_{B_l}), (x_{C_l}, y_{C_l}), (x_{D_l}, y_{D_l})$. В этом случае в формулах (10) нужно принять

$$a_l = \frac{1}{2} \sqrt{(x_{A_l} - x_{C_l})^2 + (y_{A_l} - y_{C_l})^2}, \quad b_l = \frac{1}{2} \sqrt{(x_{B_l} - x_{D_l})^2 + (y_{B_l} - y_{D_l})^2},$$



$$x_{0l} = \frac{x_{A_l} + x_{C_l}}{2}, \quad y_{0l} = \frac{y_{A_l} + y_{C_l}}{2}, \quad \varphi_l = \arctg \left(\frac{y_{A_l} - y_{C_l}}{x_{A_l} - x_{C_l}} \right). \quad (11)$$

При решении задач возникает необходимость аппроксимации части криволинейного контура в виде сторон угла в окрестности его вершины $A_l (x_{A_l}, y_{A_l})$ дугой окружности L'_l , вписанной в этот угол с центром на биссектрисе угла (рис. 2).

Обозначим углы между положительным направлением оси Ox и сторонами угла A_l через φ_l и φ_{l+1} . Тогда угол A_l будет равен $\varphi_{l+1} - \varphi_l$. Поэтому угол наклона указанной биссектрисы к оси Ox $\varphi'_l = (\varphi_l + \varphi_{l+1}) / 2$. Выбрав на сторонах угла отрезки δ_l от вершины угла для радиуса вписанной окружности и координат ее центра, будем иметь

$$\begin{aligned} a'_l &= \delta_l \operatorname{tg} ((\varphi_{l+1} - \varphi_l) / 2), \quad |O'_l A_l| = \sqrt{\delta_l^2 + a'^2_l}, \\ x'_{0l} &= x_{A_l} - |O'_l A_l| \sin ((\varphi_l + \varphi_{l+1}) / 2), \\ y'_{0l} &= y_{A_l} - |O'_l A_l| \cos ((\varphi_l + \varphi_{l+1}) / 2). \end{aligned}$$

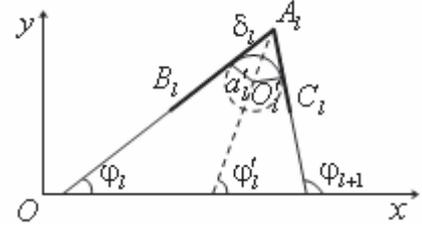


Рис. 2. Аппроксимация части криволинейного контура дугой окружности

Зная координаты x'_{0l}, y'_{0l} центра O'_l вписанной окружности L'_l , его радиус a'_l и угол φ'_l между осью Ox и биссектрисой угла A_l и принимая, что $a'_l = b'_l$, по формулам (9) и (10) найдем функцию, отображающую внешность единичного круга на внешность окружности L'_l , вписанной в угол A_l .

Неизвестные постоянные a_{kln} , входящие в функции (5), будем определять из граничных условий на контурах L_l [1, 3, 7]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 g_{kli} W'_k(z_k) = f_{li} \quad i = 1, 2, \quad (12)$$

в которых

$$\begin{aligned} g_{k11} &= p_k / \mu_k, \quad g_{k12} = q_k, \\ f_{l1} &= - \int_0^s f_l dx - \int_0^s m_l dy + c_{l1} dx + c_{l1}, \quad f_{l2} = - \int_0^s m_l dx - \int_0^s f_l dy + c_{l2} dy + c_{l2}, \\ p_k &= D_{11} + 2D_{16}\mu_k + D_{12}\mu_k^2, \quad q_k = D_{12} + 2D_{26}\mu_k + D_{22}\mu_k^2, \quad f_l(s) = - \int_0^s p_l(s) ds, \end{aligned}$$

c_l — вещественные, c_{il} — комплексные постоянные.

Граничным условиям (12) будем удовлетворять обобщенным методом наименьших квадратов [9]. Для многосвязных областей этим условиям удобнее удовлетворять в дифференциальной форме. Продифференцировав условия (12) по дуге контура, выбрав на контурах плиты набор точек $t_{lm} (x_{lm}, y_{lm})$ ($m = \overline{1, M_l}$) и удовлетворив в них этим условиям, получим

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^{\infty} g_{kli} \delta_k \varphi'_{kln}(t_{klm}) &= \frac{df_{li}(t_{lm})}{ds} - \\ - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \delta_k \left\{ g_{kli} \Gamma_k + \sum_{l=1}^L \left[A_{kl} l n (z_k - z_{kl}) + \frac{(A_{kl} z_k + B_{kl})}{z_k - z_{kl}} \right] \right\}, \\ l &= \overline{1, L}, \quad m = \overline{1, M_l}, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (13)$$

где $\delta_k = \frac{dz_k}{ds}$, $\varphi'_{kln} = - \frac{n}{\zeta_{kl}^{n-1} R_{kl} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl})}$, $t_{klm} = x_{lm} + \mu_k y_{lm}$.

Систему (13) дополним уравнениями однозначности прогиба [7] для каждого отверстия

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 i a_{kl1} R_{kl} = 0, \quad l = \overline{1, L}. \quad (14)$$



После нахождения псевдорешений дополненной системы уравнений (13) с использованием сингулярных разложений [6] постоянные a_{klm} , а следовательно, и функции $W'_k(z_k)$, будут известными и по ним можно вычислять изгибающие моменты и перерезывающие силы в любой точке плиты [1, 3, 7]

$$(M_x, M_y, H_{xy}) = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (p_k, q_k, r_k) W''_k(z_k), \quad (N_x, N_y) = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (\mu_k s_k, -s_k) W'''_k(z_k). \quad (15)$$

Здесь $r_k = D_{16} + 2D_{66}\mu_k + D_{26}\mu_k^2$, $s_k = -D_{16} - (D_{12} + 2D_{66})\mu_k - 3D_{26}\mu_k^2 - D_{22}\mu_k^3$.

2. РЕШЕНИЕ ЧАСТНЫХ ЗАДАЧ

Приведенный подход был использован для решения задач о напряженном состоянии плит с отверстиями различной конфигурации. Далее описаны некоторые из полученных результатов для плит с квадратными и треугольными отверстиями. При проведении расчетов количество членов в рядах (5) и точек на контурах M_l , для которых составлялись уравнения (13), увеличивалось до тех пор, пока граничные условия на контурах не удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности (пока значения моментов на площадках, касательных к контурам, не удовлетворяли условию $M_n < 10^{-3}$). Для такого удовлетворения граничным условиям, как показали численные исследования, необходимо было в указанных рядах оставлять от 40 до 50 членов, на каждом из контуров брать от 200 до 500 «коллокационных точек». Далее описаны некоторые из полученных результатов для плиты из КАСТ-В изотропный (материал М1) [10], стеклопластика косоугольной намотки (материал М2) [10], сосны (материал М3) [1]. Коэффициенты деформаций a_{ij} для этих материалов приведены в табл. 1.

Таблица 1

Постоянные материалов					
Материал	$a_{11} \cdot 10^{-4},$ МПа ⁻¹	$a_{22} \cdot 10^{-4},$ МПа ⁻¹	$a_{12} \cdot 10^{-4},$ МПа ⁻¹	$a_{66} \cdot 10^{-4},$ МПа ⁻¹	a_{11}/a_{22}
М1	72.100	72.100	-8.600	161.500	1.000
М2	10.000	2.800	-0.770	27.000	3.571
М3	2.381	0.100	-0.024	1.333	23.810

При этом для того, чтобы использовать приведенное выше решение для изотропной плиты коэффициент деформации материала a_{12} , равный $-8,600 \cdot 10^{-4}$, в расчетах заменялся на $-8,605 \cdot 10^{-4}$, т. е. на значение, незначительно отличающееся от табличного. В противном случае при решении задачи возникнет деление на ноль, так как корни характеристического уравнения (3) для изотропного материала будут двукратными и равными i и $-i$.

Пусть плита ослаблена квадратным отверстием со сторонами длиной $2a$, параллельными осям координат (рис. 3). Контур отверстия свободен от усилий. На бесконечности изгибающие моменты соответственно равны $M_y^\infty = m_y$, $M_x^\infty = H_{xy}^\infty = 0$. Стороны квадрата будем представлять внешними берегами разрезов L_1, L_2, L_3, L_4 вдоль сторон, с концами в точках A, B, C, D . В этом случае в приведенном решении нужно принять

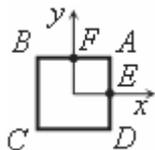


Рис. 3. Квадратное отверстие в плите

$$L = 4, \quad A(a, a), \quad B(-a, a), \quad C(-a, -a), \quad D(a, -a), \\ a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a.$$

Расчеты проводились без аппроксимации сторон вблизи вершины углов и с их аппроксимацией. При проведении расчетов вместо равных нулю полюсей b_l считалось, что $b_l/a_l = 10^{-4}$. Это уменьшает вычислительные погрешности. В рассматриваемом случае если обозначать через δ отрезки на сторонах от вершин углов до точек их закругления, будем иметь

$$a'_l = \delta, \quad |O'_l A_l| = \sqrt{2}\delta, \\ \begin{aligned} x'_{01} &= a - \delta, & y'_{01} &= a - \delta, & x'_{02} &= -a + \delta, & y'_{02} &= a - \delta, \\ x'_{03} &= -a + \delta, & y'_{03} &= -a + \delta, & x'_{04} &= a - \delta, & y'_{04} &= -a + \delta. \end{aligned}$$

В табл. 2 приведены значения изгибающих моментов M_s по контуру отверстия на площадках, перпендикулярных ему (M_y — для вертикальных сторон, M_x — для горизонтальных сторон) в точках с указанными координатами с точностью до интенсивности приложенных моментов m_y как множителя.



Таблица 2

Значения моментов по контуру квадратного отверстия в плите из различных материалов

ϑ°	Координаты точек	Без закругления в углах	С закруглением при δ		Без закругления в углах	С закруглением при δ	
			0.01	0.005		0.01	0.005
		Материал М1			Материал М2		
0	1.0001, 0.0000	1.3173	1.3159	1.3169	1.5115	1.5052	1.5159
15	1.0001, 0.2588	1.3301	1.3421	1.3394	1.5250	1.5598	1.5429
30	1.0001, 0.5736	1.4058	1.4117	1.4141	1.6238	1.6423	1.6459
44.9956	0.9998, 1.0000	13.4327	–	–	16.8064	–	–
45	0.9971, 0.9971	–	3.5483	–	–	2.2968	–
45	0.9985, 0.9985	–	–	4.3247	–	–	2.7517
45.0044	1.0000, 0.9998	–2.6345	–	–	–2.5382	–	–
60	0.5736, 1.0001	0.2633	0.2535	0.2531	0.2357	0.2286	0.2316
75	0.2588, 1.0001	0.2687	0.2639	0.2598	0.2452	0.2335	0.2331
90	0.0000, 1.0001	0.2681	0.2622	0.2673	0.2479	0.2488	0.2524

Окончание табл. 2

ϑ°	Координаты точек	Без закругления в углах	С закруглением при δ	
			0.01	0.005
		Материал М3		
0	1.0001, 0.0000	1.6034	1.6002	1.6085
15	1.0001, 0.2588	1.6379	1.6522	1.6475
30	1.0001, 0.5736	1.7621	1.7475	1.7498
44.9956	0.9998, 1.0000	21.3145	–	–
45	0.9971, 0.9971	–	2.7712	–
45	0.9985, 0.9985	–	–	3.0246
45.0044	1.0000, 0.9998	–0.7640	–	–
60	0.5736, 1.0001	0.0733	0.0709	0.0712
75	0.2588, 1.0001	0.0745	0.0702	0.0709
90	0.0000, 1.0001	0.0739	0.0759	0.0743

Рассматривались случаи квадрата с прямыми углами (без закруглений), а также квадрат с закругленными углами вблизи вершин с малыми значениями радиусов (равных в данном случае отрезкам от вершин углов) закруглений δ . В табл. 2 координаты точек и значения δ отнесены к полудлине a стороны квадрата.

На рис. 4 изображены графики распределения этих моментов для точек отрезков EA и AF на сторонах. Для остальных частей сторон квадрата значения моментов легко восстанавливаются по имеющейся симметрии. Кривые 1, 2, 3 соответствуют плите из материалов М1, М2, М3.

Из данных табл. 2 и рис. 4 видно, что при приближении к вершинам квадрата значения моментов стремятся к бесконечности, вдоль горизонтальных сторон к $-\infty$, вдоль вертикальных сторон — к $+\infty$, причем рост моментов вдоль вертикальных сторон больше, чем убывание вдоль горизонтальных сторон. Аппроксимация сторон углов вблизи вершин снимает особенность моментов в этих точках, причем чем меньше радиус закругления, тем больше значения моментов в вершинах (закругленных). Чем выше «степень анизотропии» (отличие a_{11}/a_{22} от 1), тем больше значения моментов вдоль вертикальной стороны и меньше вдоль горизонтальной стороны.

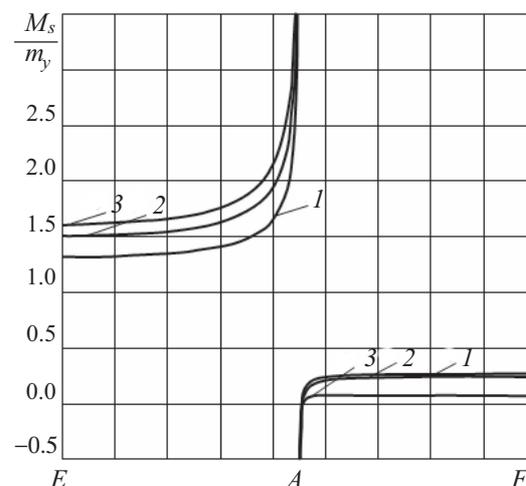


Рис. 4. Графики распределения изгибающих моментов в плите с одним квадратным отверстием



Заметим, что с целью сравнения результатов с известными из литературы для плиты из березовой фанеры с квадратным отверстием при всестороннем изгибе [11] исследования проводились и для этого случая. Значения изгибающих моментов, полученные в работе [11], оказались значительно отличными от наших вблизи вершин. Они достаточно близки к полученным нами лишь в точках, близких к серединам сторон квадрата.

Пусть бесконечная плита имеет два квадратных отверстия со сторонами длины $2a$, параллельными осям координат (рис. 5). Стороны квадратов будем представлять внешними берегами разрезов $L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6, L_7, L_8$ вдоль сторон, т.е. с концами A_1, B_1, C_1, D_1 и A_2, B_2, C_2, D_2 . Расстояние между отверстиями обозначим через c . В этом случае $L = 8$, $A_1(a, a)$, $B_1(-a, a)$, $C_1(-a, -a)$, $D_1(a, -a)$, $A_2(3a + c, a)$, $B_2(a + c, a)$, $C_2(a + c, -a)$, $D_2(3a + c, -a)$, $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = a_8 = a$.

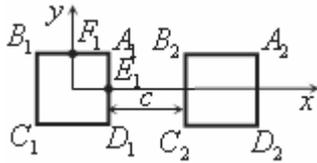


Рис. 5. Два квадратных отверстия в плите

Расчеты проводились без аппроксимации сторон вблизи вершин углов и с их аппроксимацией. При проведении расчетов вместо равных нулю полуосей b_l считалось, что $b_l/a_l = 10^{-4}$.

В рассматриваемом случае если обозначать через δ отрезки на сторонах от вершин углов до точек их закругления, будем иметь

$$a'_i = \delta, \quad |O'_i A_i| = \sqrt{2}\delta,$$

$$\begin{aligned} x'_{01} &= a - \delta, & y'_{01} &= a - \delta, & x'_{02} &= -a + \delta, & y'_{02} &= a - \delta, \\ x'_{03} &= -a + \delta, & y'_{03} &= -a + \delta, & x'_{04} &= a - \delta, & y'_{04} &= -a + \delta, \\ x'_{05} &= 3a + c - \delta, & y'_{05} &= a - \delta, & x'_{06} &= -a + c + \delta, & y'_{06} &= a - \delta, \\ x'_{07} &= a + c + \delta, & y'_{07} &= -a + \delta, & x'_{08} &= 3a + c - \delta, & y'_{08} &= -a + \delta. \end{aligned}$$

Численные исследования для плиты с двумя квадратными отверстиями были проведены для различных значений c/a , отношения расстояния между отверстиями c к полудлине их сторон a . Как показали расчеты, с уменьшением расстояния между отверстиями (отношения c/a) значения изгибающих моментов вблизи контуров и в точках перемычки растут.

Если расстояние между отверстиями более трех длин сторон ($c/a > 6$), то влияние одного отверстия на значения моментов около другого незначительно и им можно пренебречь. Для близких расстояний между контурами особенно большие значения моментов возникают в точках перемычки

вблизи контуров отверстий.

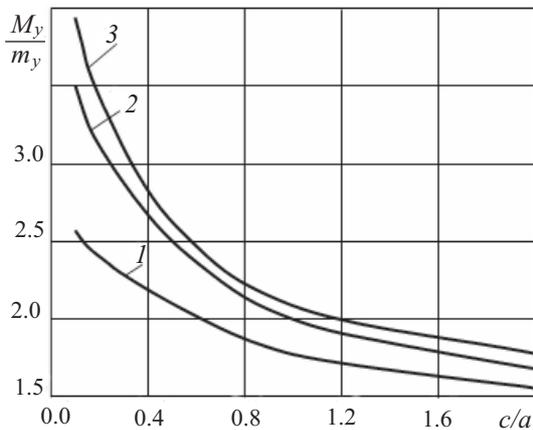


Рис. 6. Графики изменения моментов M_y в точке перемычки E_1 плиты с двумя квадратными отверстиями

На рис. 6 изображены графики изменения изгибающих моментов M_y/m_y вблизи точки перемычки $E_1(a, 0)$ на контуре левого отверстия в зависимости от c/a . Кривые 1, 2, 3 соответствуют плите из материалов М1, М2, М3. Видно, что с уменьшением c/a значения моментов резко растут, особенно в плите из материала с сильной «степенью анизотропии» М3.

Пусть теперь плита с треугольным отверстием в виде равнобедренного треугольника с высотой $2a$ по оси абсцисс и углом при вершине φ (рис. 7) изгибается моментами $M_y^\infty = m_y$. В этом случае вершины треугольника располагаются в точках $A(2a, 0)$, $B(0, 2a \operatorname{tg}(\varphi/2))$, $C(0, -2a \operatorname{tg}(\varphi/2))$.

Стороны треугольника будем представлять внешними берегами разрезов L_1, L_2, L_3 вдоль сторон, т.е. с концами A, B, C . В этом случае $L = 3$, $a_1 = a_3 = 2a/\cos(\varphi/2)$, $a_2 = 4a \operatorname{tg}(\varphi/2)$.

Численные исследования были проведены для различных значений угла φ при вершине треугольника. Как показали расчеты, с уменьшением угла φ значения изгибающих моментов вблизи боковых сторон треугольника уменьшаются, вблизи

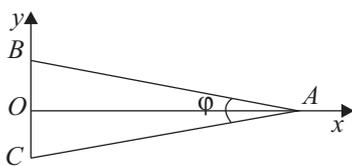


Рис. 7. Треугольное отверстие в плите



основания растут. Если угол φ равен нулю, то моменты в окрестности точки A получаются такими же, как в плите с одним эллиптическим отверстием-трещиной. Это видно из данных рис. 8, где приведены графики изменения M_y/m_y в точке оси Ox вблизи вершины A зависимости от угла φ .

Кривые 1, 2, 3 соответствуют плите из материалов М1, М2, М3. Видно, что с уменьшением угла φ значения моментов растут и при $\varphi = 0$ они получаются такими же, как в плите с одним эллиптическим отверстием-трещиной, причем это значение не зависит от анизотропии материала. Последнее согласуется с известным фактом для пластинки с трещиной в плоской задаче, когда σ_y вблизи вершины на продолжении трещины (и коэффициент интенсивности напряжений k_1), чему при изгибе плиты соответствует M_y , не зависит от анизотропии материала [5]. Как показали расчеты, в точках плиты на продолжении высоты, удаленных от вершины A на расстояние более высоты $2a$, значения моментов такие же, как в плите без отверстия, т. е. влиянием отверстия на напряженное состояние можно пренебречь.

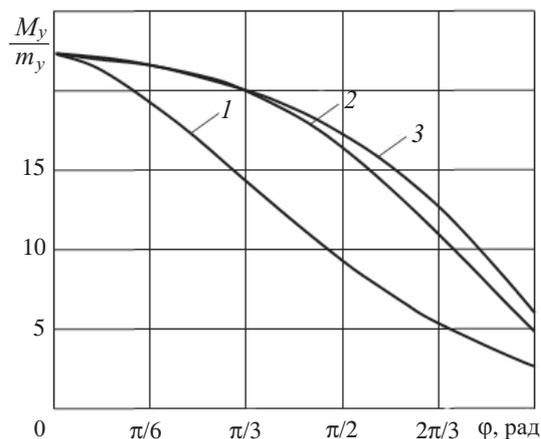


Рис. 8. График изменения изгибающих моментов вблизи вершины A треугольника

Библиографический список

1. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. М. : Гостехиздат, 1957. 463 с.
2. Космодамианский А. С. Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями или полостями. Киев ; Донецк : Вища шк., 1976. 200 с.
3. Меглинский В. В. Некоторые задачи изгиба тонких многосвязных анизотропных плит // Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1967. Вып. 3. С. 97–127.
4. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. Киев : Наук. думка, 1968. 887 с.
5. Калоеров С. А., Горянская Е. С. Двумерное напряженно-деформированное состояние многосвязного анизотропного тела // Концентрация напряжений. Механика композитов : в 12 т. Киев : А. С. К., 1998. Т. 7. С. 10–26.
6. Калоеров С. А., Добряк Д. А. Термоупругое состояние кусочно-однородной анизотропной пластинки // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А, Природ. науки. 2006. Вип. 2. С. 77–88.
7. Калоеров С. А. Комплексные потенциалы теории изгиба многосвязных анизотропных плит // Теорет. и прикладная механика. 2012. № 4 (50). С. 115–136.
8. Калоеров С. А., Авдюшина Е. В., Мироненко А. Б. Концентрация напряжений в многосвязных изотропных пластинках. Донецк : Изд-во ДонНУ, 2013. 440 с.
9. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. М. : Мир, 1969. 280 с.
10. Космодамианский А. С., Калоеров С. А. Температурные напряжения в многосвязных пластинках. Киев ; Донецк : Вища шк., 1983. 160 с.
11. Космодамианский А. С., Митраков В. А. Изгиб конечной анизотропной пластинки с криволинейным отверстием // Прикладная механика. 1976. Т. 12, № 12. С. 96–99.

Образец для цитирования:

Калоеров С. А., Занько А. И. Изгиб многосвязных анизотропных плит с криволинейными отверстиями // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 4. С. 456–464. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-456-464.



Bending of Multiconnected Anisotropic Plates with the Curvilinear Holes

S. A. Kaloerov¹, A. I. Zanko²

¹Stephen A. Kaloerov, Donetsk National University, 24, Universitetskaya str., 83055, Donetsk, Ukraine, kaloerov@mail.ru

²Alena I. Zanko, Donetsk National University, 24, Universitetskaya str., 83055, Donetsk, Ukraine, all53700@mail.ru

An approximate method for determination of the stress state of thin plates with curvilinear holes, consisting in the use of the complex potential theory of bending of anisotropic plates, approximating the contours of holes by ellipse arcs and straight sections, the use of conformal mapping, presentation of complex potentials by Laurent series and determining the unknown series coefficients of the generalized least squares method. Isotropic plates are considered as a special case of anisotropic plates. Numerical studies carried out for plates with square or triangular holes. Studies have established a high degree of accuracy of the results. Significant differences were noted in the literature known from the real results obtained by this approach.

Key words: anisotropic plate, isotropic plate, curved hole complex potentials, generalized least squares method.

References

1. Lekhnitskii S. G. *Anisotropic Plates*. New York, Springer-Verlag, 1984, 546 p.
2. Kosmodamianskii A. S. *Napriazhennoe sostoianie anizotropnykh sred s otverstiiami ili polostiami* [Stressed state of anisotropic media with holes or cavities]. Donetsk, Vishcha shk., 1976, 200 p. (in Russian).
3. Meglinskii V. V. *Nekotorye zadachi izgiba tonkikh mnogosviaznykh anizotropnykh plit* [Some problems of bending of thin multi-connected anisotropic plates]. *Nekotorye zadachi teorii uprugosti o kontsentratsii napriazhenii i deformatsii uprugikh tel: sb. nauch. tr.* [Some problems of elasticity theory about stress concentration and deformation of elastic bodies. Collection of Papers], Saratov, Saratov Univ. Press, 1967, iss. 3, pp. 97–127 (in Russian).
4. Savin G. N. *Raspredelenie napriazhenii okolo otverstii* [Stress distribution near the holes]. Kiev, Nauk. dumka, 1968, 887 p. (in Russian).
5. Kaloerov S. A., Goriaskaia E. S. *Dvumernoe napriazhenno-deformirovannoe sostoianie mnogosviaznogo anizotropnogo tela* [The two-dimensional stress-strain state of a multi-connected anisotropic body]. *Kontsentratsiia napriazhenii. Mekhanika kompozitov: v 12 t.* [The mechanics of composites. Stress concentration]. Kiev, A. S. K., 1998, vol. 7, pp. 10–26 (in Russian).
6. Kaloerov S. A., Dobriak D. A. *Termouprugoe sostoianie kusochno-odnorodnoi anizotropnoi plastinki* [Thermoelastic state of piecewise-homogeneous anisotropic plate]. *Visn. Donets. un-tu, Ser. A, Prirod. nauki* [Bulletin of Donetsk University, Series A, Natural Sciences], 2006, iss. 2, pp. 77–88 (in Russian).
7. Kaloerov S. A. *Kompleksnye potentsialy teorii izgiba mnogosviaznykh anizotropnykh plit* [Complex potentials the theory of bending of multi-connected anisotropic plates]. *Teoret. i prikladnaia mekhanika* [Theoretical and Applied Mechanics], 2012, no. 4 (50), pp. 115–136 (in Russian).
8. Kaloerov S. A., Avdiushina E. V., Mironenko A. B. *Kontsentratsiia napriazhenii v mnogosviaznykh izotropnykh plastinkakh* [Stress concentration in multi-connected anisotropic plates]. Donetsk, DonNU Press, 2013, 440 p. (in Russian).
9. Forsythe G. E., Malcolm M. A., Moler C. B. *Computer methods for mathematical computations*. New Jersey, Prentice-Hall, 1977, 280 p.
10. Kosmodamianskii A. S., Kaloerov S. A. *Temperaturnye napriazheniia v mnogosvi-aznykh plastinkakh* [Thermal stresses in multi-connected plates]. Kiev, Donetsk, Vishcha shk., 1983, 160 p. (in Russian).
11. Kosmodamianskii A. S., Mitrov V. A. *Izhib konechnoi anizotropnoi plastinki s krivolineinym otverstiem* [Bend of finite anisotropic plate with a curvilinear hole]. *Prikladnaia mekhanika* [Applied Mechanics], 1976, vol. 12, no. 12, pp. 96–99 (in Russian).

Please cite this article in press as:

Kaloerov S. A., Zanko A. I. Bending of Multiconnected Anisotropic Plates with the Curvilinear Holes. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 4, pp. 456–464 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-456-464.
