



4. Andreichenko D. K., Eroftiev A. A., Melnichuk D. V. Parallelization of parametric synthesis by “problems portfolio” scheme based on MPI technology. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2015, vol. 15, iss. 2, pp. 222–228 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-2-222-228.
5. Andreichenko D. K., Andreichenko K. P., Kononov V. V. Parallel algorithm of optimal parameters calculation for the single channel angular stabilization system. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2013, vol. 13, iss. 4, pt. 1, pp. 109–117 (in Russian).
6. Andreichenko D. K., Andreichenko K. P., Komarova M. S. Parameter Selection and Dynamic Analysis of Gas Jet Stabilization Systems with Elastic Rods. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2012, vol. 51, no. 4, pp. 573–586. DOI: 10.1134/S1064230712030021.
7. Nayfeh A. H. *Perturbation methods*. New York, Wiley, 1973. 425 p. (Russ. ed. : Nayfeh A. *Metody vozmushchenij*. Moscow, Mir, 1976. 456 p.)

Please cite this article in press as:

Andreichenko D. K., Andreichenko K. P., Melnichuk D. V., Portenko M. S. Adaptive Algorithm of Parametric Synthesis of Hybrid Dynamical Systems. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 4, pp. 465–475 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-465-475.

УДК 519.1

ИНДЕКСЫ СОСТОЯНИЙ В ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ ДВОИЧНЫХ ВЕКТОРОВ, АССОЦИИРОВАННЫХ С ОРИЕНТАЦИЯМИ ПАЛЬМ

А. В. Жаркова

Жаркова Анастасия Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, ZharkovaAV3@gmail.com

Рассматривается динамическая система двоичных векторов, ассоциированных с ориентациями пальм. Дерево называется пальмой, если оно является объединением цепей, имеющих общую концевую вершину, причём все эти цепи, за исключением, быть может, одной, имеют длину 1. Данная система в зависимости от размерности состояний разбивается на конечные подсистемы. Состояниями конечной динамической системы являются все возможные ориентации данной пальмы, которые естественным образом кодируются двоичными векторами, а эволюционная функция задаётся следующим образом: динамическим образом данной ориентации пальмы является ориентация, полученная из исходной путём переориентации всех дуг, входящих в стоки, других отличий между исходной ориентацией пальмы и её образом нет. Предлагается алгоритм вычисления индексов состояний системы, находится глубина бассейна системы заданной размерности.

Ключевые слова: двоичный вектор, глубина, индекс, конечная динамическая система, пальма, сверхстройное (звездобразное) дерево.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-475-484

ВВЕДЕНИЕ

Графовые модели, в которых отказы процессоров интерпретируются как удаление соответствующих вершин, а отказы сетевых каналов — как удаление дуг, занимают важное место в задачах, связанных с отказоустойчивостью компьютерных сетей. Здесь можно выделить следующие три основные конструкции, получившие самостоятельное значение в теории графов: минимальное расширение графа [1], T-неприводимое расширение графа [2], бесконтурный граф с заданной структурой источников и стоков [3]. В модели [3] в качестве механизма восстановления работоспособности сети предлагается так называемая SER-динамика бесконтурных связных ориентированных графов. Это позволяет использовать при изучении модельных графов идеи и методы теории конечных динамических систем, и, в частности, динамических систем двоичных векторов (см., например, [4, 5]) — когда имеется естественная двоичная кодировка графов рассматриваемого класса. В указанных выше работах по отказоустойчивости графовых систем основные результаты получены для систем, в основе которых лежат цепи, циклы и частные типы деревьев. К числу деревьев, для которых найдено описание как минимальных, так и T-неприводимых расширений, относятся пальмы [1, 2]. Дерево



называется *пальмой*, если оно является объединением цепей, имеющих общую концевую вершину, причём все эти цепи, за исключением, быть может, одной, имеют длину 1. Пальма является частным случаем *сверхстройного (звездообразного) дерева* (дерево, в котором в точности одна вершина имеет степень больше 2). В настоящей работе пальмы изучаются с точки зрения динамического подхода к отказоустойчивости графовых систем.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Под *конечной динамической системой* понимается пара (S, δ) , где S — конечное непустое множество, элементы которого называются *состояниями системы*, $\delta: S \rightarrow S$ — отображение множества состояний в себя, называемое *эволюционной функцией системы*. Таким образом, каждой конечной динамической системе сопоставляется карта, представляющая собой орграф с множеством вершин S и дугами, проведенными из каждой вершины $s \in S$ в вершину $\delta(s)$. Компоненты связности графа, задающего динамическую систему, называются её *бассейнами*. Получается, что каждый бассейн представляет собой контур с входящими в него деревьями. Контур, в свою очередь, называется предельными циклами, или *аттракторами*.

Основными проблемами теории конечных динамических систем являются задачи отыскания эволюционных параметров без проведения динамики. К их числу относятся *индекс* состояния (его расстояние до аттрактора того бассейна, которому оно принадлежит) и *глубина бассейна* (наибольший из индексов состояний). Автором составлены программы для ЭВМ, позволяющие вычислять различные параметры динамических систем двоичных векторов, ассоциированных с некоторыми типами графов, в частности [6]. Автором предложены алгоритмы вычисления индексов состояний в конечных динамических системах двоичных векторов, ассоциированных с ориентациями таких типов графов, как цепи [7] и циклы [8].

В данной работе предлагается алгоритм вычисления индексов состояний в конечных динамических системах двоичных векторов, ассоциированных с ориентациями пальм, находится глубина бассейна системы заданной размерности.

2. ОПИСАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Пусть пальма p образована объединением цепей p_0, p_1, \dots, p_c , имеющих общую концевую вершину. Будем считать, что p_0 имеет среди этих цепей максимальную длину $s > 0$. Назовём p_0 *стволом пальмы* p , а цепи p_1, p_2, \dots, p_c , имеющие длину 1, — её *листьями*, а их совокупность — *кроной*. Будем говорить, что p является пальмой типа (s, c) . Пальма с точностью до изоморфизма определяется своим типом. При $c = 1$ пальма вырождается в цепь (см., например, [5–7]), поэтому далее не будем рассматривать этот случай, считая $c > 1$.

Пусть имеется пальма p типа (s, c) , $s + c = n$. Зафиксируем расположение её цепей и перенумеруем рёбра пальмы p , начиная от корня (начальной вершины ствола), двигаясь к кроне (рёбра с номерами от 1 по s), а далее — рёбра кроны слева направо (рёбра с номерами от $s + 1$ по $s + c$).

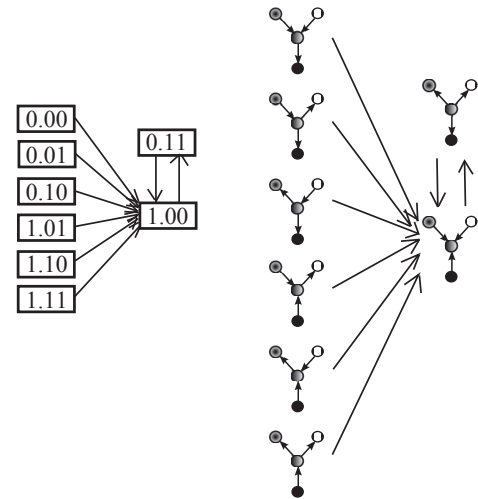
Придадим каждому ребру пальмы произвольную ориентацию и сопоставим полученному ориентированному графу p n -мерный двоичный вектор $v(p)$, полагая его i -ю компоненту равной 1, если i -е ребро пальмы p ориентировано от корня (начальной вершины ствола), и 0 — в противном случае. Теперь можно последовательно выписать получившуюся последовательность из нулей и единиц: $v = v_1 \dots v_s \cdot v_{s+1} \dots v_{s+c}$, где v_i , $0 < i \leq s + c$, принимает значение 0 или 1 в зависимости от ориентации i -го ребра пальмы. Таким образом, каждой ориентации пальмы сопоставляется n -мерный двоичный вектор, причём $n = s + c$. В свою очередь, каждый такой вектор $v = v_1 \dots v_s \cdot v_{s+1} \dots v_{s+c}$ однозначно определяет некоторую ориентацию пальмы $p(v)$ типа (s, c) . Таким образом, между множеством P_{s+c} , $s > 0, c > 1$, всевозможных ориентированных пальм типа (s, c) указанного вида и множеством B^{s+c} , $s > 0, c > 1$, всех двоичных векторов размерности $n = s + c$ указанного вида устанавливается взаимно однозначное соответствие. В дальнейшем ориентации пальмы для простоты также будем называть пальмами, часть $v_1 \dots v_s$ вектора v будем называть *стволом вектора* v , а $v_{s+1} \dots v_{s+c}$ — его *кроной*.

Опишем конечную динамическую систему ориентаций (s, c) -пальмы p на языке двоичных векторов. Пусть $B = \bigcup_{s>0, c>1} B^{s+c}$. Пусть состоянием динамической системы в данный момент времени является вектор $v = v_1 \dots v_s \cdot v_{s+1} \dots v_{s+c} \in B$. Тогда в следующий момент времени она окажется



в состоянии $\gamma(v) = v'$, полученном путем одновременного применения следующих правил: I) если $v_1 = 0$, то $v'_1 = 1$; II) если $v_i = 1$ и $v_{i+1} = 0$ для некоторого $0 < i < s$, то $v'_i = 0$ и $v'_{i+1} = 1$; III) если $v_i = 1$ для некоторого $s < i \leq s + c$, то $v'_i = 0$; IV) если $v_s = 1$ и $v_i = 0$ для всех $s < i \leq s + c$, то $v'_s = 0$ и $v'_i = 1$ для всех $s < i \leq s + c$; V) других отличий между v и $\gamma(v)$ нет. Например, эволюция состояния 011.11 в динамической системе (B^{3+2}, γ) выглядит следующим образом: $011.11 \xrightarrow{1} 111.00 \xrightarrow{2} 110.11 \xrightarrow{3} 101.00 \xrightarrow{\text{аттрактор}} 010.11$. Каждое состояние размерности $n = s + c$ при динамике переходит в состояние также размерности $n = s + c$. Таким образом, система (B, γ) в зависимости от s и c разбивается на конечные подсистемы (B^{s+c}, γ) , $s > 0, c > 1$.

Пусть теперь имеется n -реберная (s, c) -пальма. На языке ориентаций пальм эволюция динамической системы вводится следующим образом: если дана некоторая ориентированная пальма $p \in P_{s+c}$, то её динамическим образом $\gamma(p)$ является пальма, получаемая из p одновременным превращением всех стоков в источники. Напомним, что *стоком* в ориентированном графе называется вершина с нулевой степенью исхода, а *источником* — вершина с нулевой степенью захода. Это частный случай динамики бесконтурных связанных ориентированных графов, введенной в [3]. Преобразования ориентаций пальм в динамической системе (P_{s+c}, γ) , $s > 0, c > 1$, соответствуют эволюционным преобразованиям соотносимых им двоичных векторов в динамической системе (B^{s+c}, γ) , $s > 0, c > 1$, и обратно, а именно $v(\gamma(p)) = \gamma(v(p))$ [9]. Таким образом, конечные динамические системы (B^{s+c}, γ) и (P_{s+c}, γ) , $s > 0, c > 1$, изоморфны. Например, на рисунке изображены карты изоморфных динамических систем (B^{1+2}, γ) и (P_{1+2}, γ) .



Карты конечных динамических систем (B^{1+2}, γ) и (P_{1+2}, γ)

3. ИНДЕКСЫ СОСТОЯНИЙ

Через $p_{st}(v)$ обозначим количество пар совпадающих соседних компонент в стволе вектора v , назовём данную величину *плотностью ствола вектора v* ; по аналогии через $p_{cr}(v)$ обозначим *плотность кроны вектора v* . Под *блоком* будем понимать максимальное по включению множество подряд стоящих нулей (0-блок) или единиц (1-блок) в количестве > 1 . *Длина блока* — число нулей (единиц) в блоке, уменьшенное на 1. Обозначим через $p_{st}^0(v)$ ($p_{cr}^0(v)$), $p_{st}^1(v)$ ($p_{cr}^1(v)$) суммы длин 0- и 1-блоков соответственно в стволе (кроне) вектора v .

Введём необходимые обозначения:

$i(v)$ — индекс состояния v ;

x^k — в состоянии компонента x повторяется $k \geq 0$ раз;

$(x)^k$ — в состоянии совокупность компонент x повторяется $k \geq 0$ раз;

$\{01\}^k$ — произвольный набор из 0 и 1 размерности $k \geq 0$;

$\{0[x]1\}^k$ — произвольный набор из 0 и 1 размерности $k > 0$, содержащий в себе обязательный элемент x ;

p_{st}^0, p_{st}^1 — суммы длин рассматриваемых 0-блоков и 1-блоков соответственно;

$v \rightarrow \gamma(v)$ — один шаг выполнения динамики системы;

f — порядковый номер первой компоненты первого 0-блока в стволе рассматриваемого состояния;

l — порядковый номер последней компоненты последнего 1-блока в стволе рассматриваемого состояния;

УНГ — указатель начала группы;

УРС — указатель рассмотрения состояния.



Алгоритм вычисления индекса состояния системы (B^{s+c}, γ) , $s > 0, c > 1$

Индекс $i(v)$ состояния v системы (B^{s+c}, γ) , $s > 0, c > 1$, вычисляется исходя из вида состояния как вектора по следующему алгоритму. Изначально $i(v) := 0$.

I. Если $p_{st}(v) = 0$, то

1) если v есть одно из следующих состояний: $(01)^{\frac{s-1}{2}} 0.1^c$ или $(10)^{\frac{s-1}{2}} 1.0^c$ при нечётном s , $(01)^{\frac{s}{2}} 0.0^c$ или $(10)^{\frac{s}{2}} 1.1^c$ при чётном s , то $i(v) := 0$, конец алгоритма;

2) если v есть $(01)^{\frac{s-1}{2}} 0.\{0[0]1\}^c$ при нечётном s или $(10)^{\frac{s}{2}}.\{0[0]1\}^c$ при чётном s , то $i(v) := 1$, конец алгоритма;

3) если v есть $(10)^{\frac{s-1}{2}} 1.\{0[1]1\}^c$ при нечётном s или $(01)^{\frac{s}{2}}.\{0[1]1\}^c$ при чётном s , то $i(v) := s$, конец алгоритма.

II. Если $v = \{01\}^{l-1} 1^{s-1}.\{0[1]1\}^c$, то $i(v) := s$, конец алгоритма.

III. Если $v = \{01\}^t 10^{1^{s-t-2}}.\{0[1]1\}^c$, $t \geq 0, s - t > 2$, то $i(v) := 1$, $v := \gamma(v)$ и перейти на соответствующий шаг алгоритма IV, VII или VIII с новым v .

IV. Если $p_{st}^0(v) = 0$ и $p_{st}^1(v) > 0$, то $i(v) := i(v) + l - 1$, конец алгоритма.

V. Если $p_{st}^0(v) > 0$ и $p_{st}^1(v) = 0$, то $i(v) := s - f + 1$, конец алгоритма.

VI. Если в стволе состояния v присутствуют 1-блоки, после которых идут 0-блоки, то $i(v) := \max(s - f + 1, l - 1)$, конец алгоритма.

VII. Если в стволе состояния v присутствуют 0-блоки, после которых идут 1-блоки, то

$$i(v) := i(v) + \begin{cases} l - 1, & \text{если } p_{st}^0 < p_{st}^1; \\ \frac{l-f+1}{2} - 1, & \text{если } p_{st}^0 = p_{st}^1; \\ s - f + 1, & \text{если } p_{st}^0 > p_{st}^1. \end{cases}$$

Конец алгоритма.

VIII. Просматривая ствол состояния v слева направо, выполняем следующие действия.

1. УНГ и УРС ставятся в начале вектора. Если в стволе до первого 0-блока есть 1-блоки, то первой группой будет являться отрезок ствола вектора от начальной компоненты до последней компоненты того 1-блока, который стоит перед первым 0-блоком включительно; УНГ и УРС ставятся между последней компонентой того 1-блока, который стоит перед первым 0-блоком, и следующей компонентой.

2. Если ствол состояния уже полностью разбит на группы или если в стволе 1-блоков больше нет, то группа заканчивается на последней компоненте ствола вектора и переходим в пункт 6, иначе $p_{st}^{0'} := 0, p_{st}^{1'} := 0$.

3. $p_{st}^{0'} := p_{st}^{0'} +$ (сумма длин 0-блоков до первого (следующего) 1-блока от УРС); УРС ставится между последним из таких 0-блоков и следующей компонентой.

4. $p_{st}^{1'} := p_{st}^{1'} +$ (сумма длин 1-блоков до первого (следующего) 0-блока от УРС); УРС ставится между последним из таких 1-блоков и следующей компонентой.

5. При $p_{st}^{0'} \leq p_{st}^{1'}$, если в стволе остались ещё 0-блоки после УРС, то группа заканчивается на компоненте, стоящей перед УРС, УНГ ставится туда же, где стоит УРС, и перейти в пункт 2; а если 0-блоков больше нет, то группа заканчивается на последней компоненте ствола состояния и перейти в пункт 6. Если $p_{st}^{0'} > p_{st}^{1'}$ и ещё остались 1-блоки, то перейти в пункт 3, а если 1-блоков больше нет, то группа заканчивается на последней компоненте ствола состояния и перейти в пункт 6.

6. В каждой группе подсчитываем $p_{st}^{0'}$ и $p_{st}^{1'}$, и помечаем группы знаками «-», «=», «+», если в них $p_{st}^{0'} > p_{st}^{1'}$, $p_{st}^{0'} = p_{st}^{1'}$, $p_{st}^{0'} < p_{st}^{1'}$, соответственно. Объединяем рядом стоящие группы с одинаковыми пометками «-» или «+» в одну, при этом если между «+»-группами встречаются «=»-группы, то их также объединяем в «+»-группу. Пусть h — общее количество групп. Считаем групповые индексы i_j , $0 < j \leq h$, согласно следующим правилам:

$$i_j := \begin{cases} s - f_j + 1, & \text{в «-»-группе;} \\ \frac{l_j - f_j + 1}{2} - 1, & \text{в «=»-группе;} \\ l_j - 1, & \text{в «+»-группе.} \end{cases}$$

7. $i(v) := i(v) + \max_{0 < j \leq h} i_j$, конец алгоритма.



Теорема 1. Предложенный алгоритм вычисления индекса состояния конечной динамической системы (B^{s+c}, γ) , $s > 0$, $c > 1$, корректен.

Доказательство. Рассмотрим состояния динамической системы (B^{s+c}, γ) , $n = s + c$, $s > 0$, $c > 1$, в зависимости от наличия и количества 0- и 1-блоков в стволе соответствующего вектора v .

I. Рассмотрим состояния, в стволе которых нет ни 0-, ни 1-блоков, т. е. $p_{st}(v) = 0$.

1) s — нечётное. Тогда имеем:

а) $(01)^{\frac{s-1}{2}} 0.1^c \rightarrow (10)^{\frac{s-1}{2}} 1.0^c$, при этом $(10)^{\frac{s-1}{2}} 1.0^c \rightarrow (01)^{\frac{s-1}{2}} 0.1^c$. Таким образом, данные состояния образуют аттрактор длины 2 [10, теорема 2], что означает, что $i((01)^{\frac{s-1}{2}} 0.1^c) = i((10)^{\frac{s-1}{2}} 1.0^c) = 0$. Для дальнейшего доказательства заметим, что предшественников состояния $(01)^{\frac{s-1}{2}} 0.1^c$ согласно [11, следствие 2] в самом общем случае можно записать как $\{01\}^{s-1} 1.\{01\}^c$.

б) $(01)^{\frac{s-1}{2}} 0.\{0[0]1\}^c \rightarrow (10)^{\frac{s-1}{2}} 1.0^c$, т. е. приходит в состояние из пункта I (1, а), которое принадлежит аттрактору. Таким образом, $i((01)^{\frac{s-1}{2}} 0.\{0[0]1\}^c) = 1$. Для дальнейшего доказательства заметим, что предшественников данного состояния согласно [11, следствие 2] в самом общем случае можно записать как $\{01\}^{s-2} 00.\{01\}^c$.

в) $(10)^{\frac{s-1}{2}} 1.\{0[1]1\}^c \xrightarrow{1} (01)^{\frac{s-1}{2}} 1.0^c \xrightarrow{2} (10)^{\frac{s-3}{2}} 110.1^c \xrightarrow{3} \dots \xrightarrow{s-2} 011(01)^{\frac{s-3}{2}} .0^c \xrightarrow{s-1} 110(10)^{\frac{s-3}{2}} .1^c \xrightarrow{s} (10)^{\frac{s-1}{2}} 1.0^c$, т. е. в итоге приходит в состояние из пункта I (1, а), которое принадлежит аттрактору. Таким образом, $i((10)^{\frac{s-1}{2}} 1.\{0[1]1\}^c) = s$. Для дальнейшего доказательства заметим, что согласно [10, следствие 1] данное состояние является недостижимым.

2) s — чётное. Тогда имеем:

а) $(01)^{\frac{s}{2}} .0^c \rightarrow (10)^{\frac{s}{2}} .1^c$, при этом $(10)^{\frac{s}{2}} .1^c \rightarrow (01)^{\frac{s}{2}} .0^c$. Таким образом, данные состояния образуют аттрактор длины 2 [10, теорема 2], что означает, что $i((01)^{\frac{s}{2}} .0^c) = i((10)^{\frac{s}{2}} .1^c) = 0$. Для дальнейшего доказательства заметим, что предшественников состояния $(10)^{\frac{s}{2}} .1^c$ согласно [11, следствие 2] в самом общем случае можно записать как $\{01\}^{s-1} 1.\{01\}^c$.

б) $(01)^{\frac{s}{2}} .\{0[1]1\}^c \xrightarrow{1} 1(01)^{\frac{s-2}{2}} 1.0^c \xrightarrow{2} (01)^{\frac{s-2}{2}} 10.1^c \xrightarrow{3} \dots \xrightarrow{s-2} 01(10)^{\frac{s-2}{2}} .1^c \xrightarrow{s-1} 11(01)^{\frac{s-2}{2}} .0^c \xrightarrow{s} (10)^{\frac{s}{2}} .1^c$, т. е. в итоге приходит в состояние из пункта I (2, а), которое принадлежит аттрактору. Таким образом, $i((01)^{\frac{s}{2}} .\{0[1]1\}^c) = s$. Для дальнейшего доказательства заметим, что согласно [10, следствие 1] данное состояние является недостижимым.

в) $(10)^{\frac{s}{2}} .\{0[0]1\}^c \rightarrow (01)^{\frac{s}{2}} .0^c$, т. е. приходит в состояние из пункта I (2, а), которое принадлежит аттрактору. Таким образом, $i((10)^{\frac{s}{2}} .\{0[0]1\}^c) = 1$. Для дальнейшего доказательства заметим, что предшественников данного состояния согласно [11, следствие 2] в самом общем случае можно записать как $\{01\}^{s-2} 00.\{01\}^c$.

Получаем, что пункт I предложенного алгоритма является корректным.

Теперь рассмотрим состояния, в стволе которых присутствуют 0- или 1-блоки. Исключим пока из рассмотрения состояния вида $\{01\}^1 1^{s-1} .\{0[1]1\}^c$ и $\{01\}^t 101^{s-t-2} .\{0[1]1\}^c$, где $s > 1$, $t \geq 0$, $s - t > 2$, $p_{st} > 0$, и рассмотрим их в самом конце доказательства (пункт VII). Согласно [10, следствие 1] данные состояния являются недостижимыми, значит, не могут получиться из какого-либо другого состояния в процессе эволюции, поэтому данное ограничение не повлияет на дальнейшее рассмотрение пунктов II–VI. Заметим, что в предложенном алгоритме данные состояния рассматриваются на шаге II и III соответственно, что означает, что на шагах IV–VIII алгоритма они также исключаются.

II. Рассмотрим состояния, в стволе которых нет 0-блоков и есть хотя бы один 1-блок, т. е. $p_{st}^0(v) = 0$, $p_{st}^1(v) > 0$.

1) $p_{st}^1(v) = s - 1$.

Тогда эволюция состояния будет выглядеть следующим образом:

$$1^s .0^c \xrightarrow{1} 1^{s-1} 0.1^c \xrightarrow{2} 1^{s-2} 01.0^c \xrightarrow{3} \dots$$

а) s — нечётное: $\dots \xrightarrow{s-2} 11(01)^{\frac{s-3}{2}} 0.1^c \xrightarrow{s-1} (10)^{\frac{s-1}{2}} 1.0^c$, т. е. в итоге приходит в состояние из пункта I (1, а), которое принадлежит аттрактору.

б) s — чётное: $\dots \xrightarrow{s-2} 11(01)^{\frac{s-2}{2}} .0^c \xrightarrow{s-1} (10)^{\frac{s}{2}} .1^c$, т. е. в итоге приходит в состояние из пункта I (2, а), которое принадлежит аттрактору.

Таким образом, для данного состояния $i(v) = s - 1$; заметим, что в данном случае $l = s$.

Заметим, что длина 1-блока в стволе на каждом очередном шаге уменьшается на единицу за счёт поглощения самой левой компоненты и за ним следуют чередующиеся нули и единицы (самая левая



компонента 1-блока на каждом очередном шаге переходит в ноль по правилу II или IV, тем самым длина блока уменьшается на единицу), что продолжается до тех пор, пока все его компоненты кроме последней не поглотятся. Тем самым состояние в итоге приходит в состояние, в стволе которого нет ни 0-, ни 1-блоков, т. е. в состояние из пункта I.

$$2) p_{st}^1(v) < s - 1.$$

При эволюции в стволе каждый 1-блок на каждом очередном шаге смещается влево на одну компоненту (с каждым очередным шагом эволюции ноль, стоящий перед 1-блоком, переходит в единицу по правилу I или II, а последняя единица 1-блока переходит в ноль по правилу II или IV, тем самым длина 1-блока сохраняется), пока не встает в начало состояния, затем длина 1-блока на каждом очередном шаге уменьшается на единицу за счёт поглощения самой левой компоненты и за ним следуют чередующиеся нули и единицы, что продолжается до тех пор, пока все его компоненты кроме последней не поглотятся (см. пункт II (1)). Таким образом, в данном случае последними поглотятся все компоненты кроме последней самого правого 1-блока, т. е. такое состояние в итоге приходит в состояние, в стволе которого нет ни 0-, ни 1-блоков, т. е. в состояние из пункта I, причём в состояние $(10)^{\frac{s-1}{2}} 1.0^c$ при нечётном s или в состояние $(10)^{\frac{s}{2}} 1^c$ при чётном s , которые принадлежат аттрактору. Таким образом, для данного состояния $i(v) = l - 1$.

Таким образом, заключаем, что пункт IV предложенного алгоритма корректен.

III. Рассмотрим состояния, в стволе которых нет 1-блоков и есть хотя бы один 0-блок, т. е. $p_{st}^0(v) > 0, p_{st}^1(v) = 0$.

$$1) p_{st}^0(v) = s - 1.$$

Тогда эволюция состояния будет выглядеть следующим образом:

$$0^s . \{01\}^c \xrightarrow{1} 10^{s-1} . 0^c \xrightarrow{2} 010^{s-2} . 0^c \xrightarrow{3} \dots$$

а) s — нечётное: $\dots \xrightarrow{s-2} (10)^{\frac{s-1}{2}} 0.0^c \xrightarrow{s-1} (01)^{\frac{s-1}{2}} 0.0^c$, т. е. приходит в состояние из пункта I (1, б).

б) s — чётное: $\dots \xrightarrow{s-2} (01)^{\frac{s-2}{2}} 00.0^c \xrightarrow{s-1} (10)^{\frac{s}{2}} . 0^c$, т. е. приходит в состояние из пункта I (2, в).

Таким образом, для данного состояния $i(v) = s$; заметим, что в данном случае $f = 1$.

Заметим, что в стволе длина 0-блока на каждом очередном шаге эволюции уменьшается на единицу за счёт поглощения самой правой компоненты и перед ним идут чередующиеся нули и единицы (на каждом очередном шаге эволюции самая первая компонента 0-блока переходит в единицу по правилу I или II, тем самым длина 0-блока уменьшается на единицу), что продолжается до тех пор, пока все его компоненты кроме первой не поглотятся. Тем самым состояние в итоге приходит в состояние, в стволе которого нет ни 0-, ни 1-блоков, т. е. в состояние из пункта I.

$$2) p_{st}^0(v) < s - 1.$$

При эволюции в стволе каждый 0-блок на каждом очередном шаге смещается вправо на одну компоненту (с каждым очередным шагом эволюции первый ноль 0-блока переходит в единицу по правилу I или II, единица, стоящая после 0-блока переходит в ноль по правилу II или IV, тем самым длина 0-блока сохраняется), пока не встает в конец ствола состояния, затем длина 0-блока на каждом очередном шаге уменьшается на единицу за счёт поглощения самой правой компоненты, и перед ним идут чередующиеся нули и единицы, что продолжается до тех пор, пока все его компоненты не поглотятся (см. пункт III (1)). Таким образом, в данном случае последними поглотятся все компоненты, кроме первой самого левого 0-блока, т. е. такое состояние в итоге приходит в состояние, в стволе которого нет ни 0-, ни 1-блоков, т. е. в состояние из пункта I, причём в состояние из I (1, б) при нечётном s или в состояние I (2, в) при чётном s . Таким образом, для данного состояния $i(v) = s - f + 1$.

Таким образом, заключаем, что пункт V предложенного алгоритма корректен.

IV. Ствол вектора содержит в себе 1-блоки, после которых идут 0-блоки.

Из предыдущих пунктов имеем, что в данном случае на каждом шаге эволюции одновременно 0- и 1-блоки начнут движение вправо и влево соответственно, пока не достигнут своих концов ствола вектора и не начнут поглощаться, в результате чего останется вектор, не содержащий в своём стволе ни 0-, ни 1-блоков, т. е. данное состояние на очередном шаге эволюции приходит в состояние из пункта I. При этом самым последним поглотится тот блок (кроме одной компоненты), который будет стоять дальше от соответствующего края, поэтому согласно пунктам II и III доказательства имеем,



что если $l-1 < s-f+1$ (т. е. последним поглотится 0-блок), то для данного состояния $i(v) = s-f+1$, иначе (т. е. последним поглотится 1-блок или 0- и 1-блоки поглотятся одновременно) $i(v) = l-1$. Таким образом, заключаем, что пункт VI предложенного алгоритма корректен.

V. В стволе вектора присутствуют 0-блоки, после которых идут 1-блоки.

В стволе таких состояний на каждом шаге эволюции 0-блоки начинают двигаться вправо, 1-блоки — влево за счет поглощения компонент, стоящих между блоками (первая компонента 0-блока при эволюции заменится на единицу по правилу I или IV, единица, следующая за 0-блоком, при эволюции заменится на ноль по правилу II, таким образом, длина 0-блока сохранится, аналогичное происходит и с 1-блоком); когда они оказываются стоящими рядом, то блоки начинают уменьшаться на единицу каждый за счет поглощения компонент друг друга (у 0-блока первая компонента перейдет в единицу по правилу эволюции I или II, а у 1-блока последняя компонента перейдет в 0 по правилу эволюции II или IV, тем самым длины 0- и 1-блоков уменьшаются на единицу), пока один из блоков полностью не поглотится, после чего опять продолжают сдвиги блоков навстречу друг другу.

1. Если у исходного состояния $p_{st}^0(v) < p_{st}^1(v)$, то самым последним из 0-блоков поглотится самый левый 0-блок (кроме его первой компоненты), в результате чего в состоянии останутся только 1-блоки и чередующиеся 0 и 1, дальнейшая эволюция которого описана в пункте II доказательства. Таким образом, получается, что в процессе эволюции для подсчета индекса состояния имеет значение только последний (правый) 1-блок в стволе, а точнее порядковый номер его последней компоненты, так как при эволюции его последняя компонента просто смещается влево на каждом шаге эволюции, пока из всего этого 1-блока не останется она одна, что означает, что $i(v) = l-1$.

2. Если у исходного состояния $p_{st}^0(v) = p_{st}^1(v)$, то в процессе эволюции левый 0-блок и правый 1-блок поглотятся последними и одновременно (от них останется по одной компоненте), причем это уже будет вектор, ствол которого не содержит ни 0-, ни 1-блоков, эволюция которого описана в пункте I, причём это будет состояние из пункта I (1, а) при нечётном s или состояние из пункта I (2, а) при чётном s , которое принадлежит аттрактору. Таким образом, для данного состояния $i(v) = \frac{l-f+1}{2} - 1$ (чётность количества компонент от первой компоненты первого 0-блока до последней компоненты последнего 1-блока, т. е. числа $l-f+1$, показана в [7]).

3. Если у исходного состояния $p_{st}^0(v) > p_{st}^1(v)$, то здесь ситуация будет аналогична пункту V (1), только в состоянии в итоге остаются одни 0-блоки и чередующиеся 0 и 1, дальнейшая эволюция которого описана в пункте III доказательства, т. е. $i(v) = s-f+1$.

Таким образом, получаем, что пункт VII предложенного алгоритма является корректным.

VI. Ствол вектора содержит в своём составе 0-блоки и 1-блоки в произвольном порядке, отличном от предыдущих пунктов IV–V.

Из рассуждений предыдущих пунктов получаем, что при эволюции такого состояния в его стволе 0-блоки будут сдвигаться вправо, при этом если они будут встречаться с 1-блоками, то длина этого 0-блока будет уменьшаться с очередным шагом эволюции, т. е. если есть подряд стоящие 0-блоки, то они или все поглотятся, если следующие за ними подряд стоящие 1-блоки в сумме имеют равную или большую длину, или поглотят сами следующие за ними подряд стоящие 1-блоки, и продолжат сдвиг вправо, встречая очередные 1-блоки, если сумма длин 0-блоков будет больше суммы длин 1-блоков. В итоге получим состояние, имеющее только 0-блоки, только 1-блоки или состояние, не имеющее ни 0-, ни 1-блоков, чья эволюция описана в пунктах I–III. С точки зрения 1-блоков ситуация получается аналогичная, но так как на очередном шаге эволюции движение 0- и 1-блоков в стволе происходит одновременно, то, не теряя общности, будем рассматривать этот случай с точки зрения движения 0-блоков, т. е. ситуаций, когда 0-блоки будут полностью поглощаться 1-блоками, что возможно, когда суммы длин 1-блоков больше или равны сумме длин 0-блоков, или 0-блоки поглотят 1-блоки, что возможно, когда суммы длин 1-блоков меньше суммы длин 0-блоков. В пункте VIII (1–5) предложенного алгоритма как раз описывается процедура деления ствола состояния на группы, в которых суммы длин 0-блоков или меньше сумм длин 1-блоков, или равны, или больше (в этом случае это может быть только крайняя справа группа). В итоге получаем вектор, ствол которого разделён на группы, причём в результате возможного объединения, описанного в пункте VIII (6) алгоритма, слева будет «+»-группа, справа «-»-группа, а между ними могут быть ещё «=»-группы. Так как при эволюции эти группы (блоки) начинают своё движение одновременно, то индекс будет равен максимальному из групповых индексов, а это описано в пункте VIII (6, 7) предложенного алгоритма. Получаем, что VIII пункт предложенного алгоритма является корректным.



VII. Теперь рассмотрим состояния вида $\{01\}^1 1^{s-1} \cdot \{0[1]1\}^c$ и $\{01\}^t 101^{s-t-2} \cdot \{0[1]1\}^c$, где $s > 1$, $t \geq 0$, $s - t > 2$, $p_{st} > 0$.

1) $\{01\}^1 1^{s-1} \cdot \{0[1]1\}^c \rightarrow 1^s \cdot 0^c$, т.е. данное состояние при эволюции переходит в состояние из пункта II (1), таким образом $i(\{01\}^1 1^{s-1} \cdot \{0[1]1\}^c) = s$, что означает, что пункт II предложенного алгоритма является корректным.

2) $\{01\}^t 101^{s-t-2} \cdot \{0[1]1\}^c \rightarrow \{01\}^t 01^{s-t-1} \cdot 0^c$, таким образом, далее нужно рассматривать соответствующее получившееся состояние, эволюция которого описана в пункте II, V или VI. Получаем, что индекс состояния будет равен величине, полученной согласно соответствующему пункту, увеличенной на 1, т.е. пункт III предложенного алгоритма является корректным.

Таким образом, рассмотрев все возможные ситуации, заключаем, что предложенный алгоритм вычисления индекса состояния системы (B^{s+c}, γ) , $s > 0$, $c > 1$, является корректным. \square

Сложность алгоритма равна $O(n)$, где $n = s + c$.

Пример 1. Вычислим индекс состояния $v = 11101000101101100010101.010$ системы (B^{23+3}, γ) . $i(v) := 0$. Сначала выполняется III шаг алгоритма:

III. $i(v) := 1$, $v := \gamma(v) = 11010100011011010001011.000$ и переход на VIII шаг алгоритма.

VIII. Сначала получаем деление ствола состояния на группы (в результате выполнения переходов $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6$): $[11][010100011011][010001011].000$. Подсчитываем групповые индексы: $i_1 = l_1 - 1 = 2 - 1 = 1$ («+»-группа); $i_2 = \frac{l_2 - f_2 + 1}{2} - 1 = \frac{14 - 7 + 1}{2} - 1 = 3$ («-»-группа); $i_3 = s - f_3 + 1 = 23 - 17 + 1 = 7$ («-»-группа). Таким образом, $i(v) := i(v) + \max_{0 < j \leq 3} i_j = 1 + 7 = 8$.

Эволюция состояния:

$$\begin{aligned} & 11101000101101100010101.010 \xrightarrow{1} 11010100011011010001011.000 \xrightarrow{2} \\ & 10101010010110101000110.111 \xrightarrow{3} 01010101001101010100101.000 \xrightarrow{4} \\ & 101010101010101010010.111 \xrightarrow{5} 0101010101010101001.000 \xrightarrow{6} \\ & 1010101010101010100.111 \xrightarrow{7} 0101010101010101010.000 \xrightarrow{8} \\ & 1010101010101010101.000 \text{ (аттрактор), т.е. } i(v) = 8. \end{aligned}$$

Пример 2. Вычислим индекс состояния $v = 1^{50} \cdot (01)^{25}$ системы (B^{50+50}, γ) . $i(v) := 0$. Выполняется II шаг алгоритма, т.е. $i(v) := s = 50$.

Одним из параметров конечной динамической системы является наибольший из индексов состояний. В случае конечной динамической системы (B^{s+c}, γ) , которая имеет единственный бассейн при любых $s > 0$ и $c > 1$ [10, теорема 2], речь идет о глубине бассейна.

Теорема 2. Конечная динамическая система (B^{s+c}, γ) , $s > 0$, $c > 1$, имеет глубину бассейна, равную s .

Доказательство. Рассмотрим формулы вычисления индекса состояния в каждом пункте предложенного алгоритма при непосредственном выполнении каждого из них.

I, II, V–VIII. Максимальное значение индекса равно s .

III. Максимальное значение индекса будет равно s , так как максимальное значение индекса при переходе в пункты IV (при $l = s$), VII (при $l = s$, $f = 2$) и VIII (при $l = s$, $f = 2$) будет равно $s - 1$.

IV. Максимальное значение индекса равно $s - 1$ при $l = s$.

Таким образом, глубина бассейна системы (B^{s+c}, γ) , $s > 0$, $c > 1$, равна s . \square

Библиографический список

1. Абрисимов М. Б. Графовые модели отказоустойчивости. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2012. 192 с.
2. Курносова С. Г. Т-неприводимые расширения для некоторых классов графов // Теоретические проблемы информатики и ее приложений : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2004. Вып. 6. С. 113–125.
3. Barbosa V. C. An atlas of edge-reversal dynamics. Boca Raton : Chapman&Hall/CRC, 2001. 385 p.
4. Colon-Reyes O., Laubenbacher R., Pareigis B. Boolean monomial dynamical systems // Annals of Combinatorics. 2004. Vol. 8. P. 425–439. DOI: 10.1007/s00026-004-0230-6.



5. Салий В. Н. Об одном классе конечных динамических систем // Вестн. Том. гос. ун-та. Приложение. 2005. № 14. С. 23–26.
6. Исследование эволюционных параметров в динамических системах двоичных векторов : свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2009614409, Рос. Федерация / Власова А. В.; выданное Роспатентом. Зарегистрировано 20.08.2009, Реестр программ для ЭВМ.
7. Власова А. В. Индексы в динамической системе (B, δ) двоичных векторов // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2011. Т. 11, вып. 3, ч. 1. С. 116–122.
8. Жаркова А. В. Индексы в динамической системе двоичных векторов, ассоциированных с ориентациями циклов // Прикладная дискретная математика. 2012. № 2 (16). С. 79–85.
9. Власова А. В. Динамические системы, определяемые пальмами // Компьютерные науки и информационные технологии : материалы междунар. науч. конф. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2009. С. 57–60.
10. Жаркова А. В. Аттракторы в конечных динамических системах двоичных векторов, ассоциированных с ориентациями пальм // Прикладная дискретная математика. 2014. № 3 (25). С. 58–67.
11. Жаркова А. В. О ветвлении и непосредственных предшественниках состояний в конечной динамической системе всех возможных ориентаций графа // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2013. № 6. С. 76–78.

Образец для цитирования:

Жаркова А. В. Индексы состояний в динамической системе двоичных векторов, ассоциированных с ориентациями пальм // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 4. С. 475–484. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-475-484.

Indices of States in Dynamical System of Binary Vectors Associated with Palms Orientations

A. V. Zharkova

Anastasiia V. Zharkova, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., 410012, Saratov, Russia, ZharkovaAV3@gmail.com

Dynamical system of binary vectors associated with palms orientations is considered. A tree is called a palm with $s + c$ edges if it is a union of $c + 1$ paths with common end vertex and all of these paths except perhaps one (with s edges) have a length 1. The system splits into finite subsystems according to the dimension of states. States of a finite dynamical system (B^{s+c}, γ) are all possible orientations of a given palm with $s + c$ edges. They are naturally encoded by binary vectors and the evolutionary function γ transforms a given palm orientation by reversing all arcs that enter sinks and there is no other difference between the given state and the next one. An algorithm to calculate indices of states in this dynamical system is proposed and it is proved that the depth of the basin of the finite dynamical system (B^{s+c}, γ) , $s > 0, c > 1$, is equal to s .

Key words: binary vector, depth, finite dynamical system, index, palm, starlike tree.

References

1. Abrosimov M. B. *Grafovye modeli otkazoustojchivosti* [Graph models of fault tolerance]. Saratov, Saratov Univ. Press, 2012, 192 p. (in Russian).
2. Kurnosova S. G. T-irreducible extensions for some classes of graphs. *Teoreticheskie problemy informatiki i ee prilozhenii : sb. nauch. tr.* [Theoretical Problems of computer science and its applications : collection of scientific works]. Saratov, Saratov Univ. Press, 2004, vol. 6, pp. 113–125 (in Russian).
3. Barbosa V. C. *An atlas of edge-reversal dynamics*. Boca Raton, Chapman&Hall/CRC, 2001. 385 p.
4. Colon-Reyes O., Laubenbacher R., Pareigis B. Boolean monomial dynamical systems. *Ann. Combinatorics*, 2004, vol. 8, pp. 425–439. DOI: 10.1007/s00026-004-0230-6.
5. Saliy V. N. A class of finite dynamical systems. *Tomsk State University Journal. Supplement*, 2005, no. 14, pp. 23–26 (in Russian).
6. *Issledovanie jevoljucionnyh parametrov v dinamicheskikh sistemah dvoichnyh vektorov* [The investigation of evolutionary parameters in dynamical systems of binary vectors] : Certificate of state registration for comput. programs № 2009614409 / Vlasova A. V.; issued by Rospatent. Registered in August 20, 2009 (in Russian).
7. Vlasova A. V. Indices in dynamical system (B, δ) of binary vectors. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2011, vol. 11, iss. 3, pt. 1, pp. 116–122 (in Russian).
8. Zharkova A. V. Indices in dynamic system of binary vectors associated with cycles orientations. *Appl. Discrete Math.*, 2012, no. 2 (16), pp. 79–85 (in Russian).



9. Vlasova A. V. Dynamical systems defined by palm trees. *Komp'yuternye nauki i informacionnye tehnologii : Materialy Mezhdunar. nauch. konf.* [Computer Science and Information Technology : Proc. Intern. Sci. Conf.]. Saratov, Sararov Univ. Press, 2009, pp. 57–60 (in Russian).
10. Zharkova A. V. Attractors in finite dynamic systems of binary vectors associated with palms orientations. *Appl. Discrete Math.*, 2014, no. 3 (25). pp. 58–67 (in Russian).
11. Zharkova A. V. On branching and immediate predecessors of the states in finite dynamic system of all possible orientations of a graph. *Appl. Discrete Math. Supplement*, 2013, no. 6, pp. 76–78 (in Russian).

Please cite this article in press as:

Zharkova A. V. Indices of States in Dynamical System of Binary Vectors Associated with Palms Orientations. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 4, pp. 475–484 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-475-484.
