

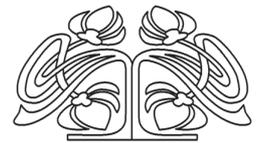


Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»

ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Новая серия

Серия Математика. Механика. Информатика, выпуск 4



Научный журнал
2016 Том 16

ISSN 1814-733X

ISSN 1816-9791

Издается с 2001 года

Продолжение «Известий Императорского Николаевского Университета» 1910–1918 и «Ученых записок СГУ» 1923–1962

СОДЕРЖАНИЕ

Научный отдел

Математика

Агафонова Н. Ю. Об L^1 -сходимости рядов по мультипликативным системам 371

Бердников Г. С. Графы с контурами в кратномасштабном анализе на группах Виленкина 377

Гаджимирзаев Р. М. Ряды Фурье по полиномам Мейкснера, ортогональным по Соболеву 388

Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б. Спектральный анализ одного класса разностных операторов с растущим потенциалом 395

Корнев В. В., Хромов А. П. Резольвентный подход к методу Фурье в смешанной задаче для неоднородного волнового уравнения 403

Можей Н. П. Трехмерные однородные пространства, не допускающие инвариантных связностей 413

Султанов С. Р. О фактортопологиях в топологических полугруппах и группах 422

Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А. Полиномы Бернштейна для стандартного модуля на симметричном отрезке 425

Щербаков В. И. Признак Дини – Липшица для обобщённых систем Хаара 435

Механика

Ватульян А. О., Васильев Л. В. Об определении параметров закрепления неоднородной балки при наличии затухания 449

Калоеров С. А., Занько А. И. Изгиб многосвязных анизотропных плит с криволинейными отверстиями 456

Информатика

Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П., Мельничук Д. В., Портенко М. С. Адаптивный алгоритм параметрического синтеза комбинированных динамических систем 465

Жаркова А. В. Индексы состояний в динамической системе двоичных векторов, ассоциированных с ориентациями пальм 475

Приложения

Хроника научной жизни

Голубов Б. И., Кашин Б. С., Коссович Л. Ю., Сидоров С. П., Хромов А. П., Чумаченко А. Н. 18-я международная Саратовская зимняя школа «Современные проблемы теории функций и их приложения» 485

Журнал включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (журнал входит в международную базу данных zbMATH)

Зарегистрировано в Министерстве Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций.

Свидетельство о регистрации СМИ ПИ № 77-7185 от 30 января 2001 года. Зарегистрировано в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Свидетельство о регистрации СМИ ПИ № ФС77-56162 от 15 ноября 2013 года

Индекс издания в объединенном каталоге «Пресса России» 36017, раздел 30 «Научно-технические издания». Известия РАН. Известия вузов». Журнал выходит 4 раза в год

Заведующий редакцией
Бучко Ирина Юрьевна

Редактор
Митенёва Елена Анатольевна

Художник
Соколов Дмитрий Валерьевич

Редактор-стилист
Степанова Наталья Ивановна

Верстка
Багаева Ольга Львовна

Технический редактор
Ковалева Наталья Владимировна

Корректор
Юдина Инна Геннадиевна

Адрес учредителя и редакции:
410012, Саратов, ул. Астраханская, 83
Тел.: (845-2) 51-45-49, 52-26-89
E-mail: izvestiya@sgu.ru

Подписано в печать 14.11.16.
Формат 60x84 1/8.
Усл. печ. л. 14,21(15,25).
Тираж 500 экз. Заказ 173-Т.

Отпечатано в типографии
Саратовского университета.
Адрес типографии:
410012, Саратов, Б. Казачья, 112А

© Саратовский университет, 2016



ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал публикует научные статьи по всем основным разделам математики, механики и информатики (математический анализ, дифференциальные уравнения, математическая физика, геометрия и топология, теория вероятностей и математическая статистика, математическая логика, алгебра и теория чисел, вычислительная математика, дискретная математика и математическая кибернетика, теоретическая механика, механика деформируемого твердого тела, механика жидкости, газа и плазмы, динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры, биомеханика, машиностроение, информатика, вычислительная техника и управление и др.).

Объем публикуемой статьи не должен превышать 12 страниц, оформленных в LaTeX согласно стилевому файлу, размещенному по адресу: <http://mmi.sgu.ru>. Статьи большего объема принимаются только по согласованию с редколлегией журнала.

Статья должна быть аккуратно оформлена и тщательно отредактирована.

Последовательность предоставления материала:

– на русском языке: индекс УДК, название работы, инициалы и фамилии авторов, сведения об авторах (ученая степень, должность и место работы, e-mail), аннотация, ключевые слова, текст статьи, ссылки на гранты и благодарности (если есть), библиографический список;

– на английском языке: название работы, инициалы и фамилии авторов, место работы (вуз, почтовый адрес), e-mail, аннотация, ключевые слова, References.

Отдельным файлом приводятся сведения о статье: раздел журнала, УДК, авторы и название статьи (на русском и английском языках); сведения об авторах: фамилия, имя и отчество (полностью), e-mail, телефон (для ответственного за переписку обязательно указать сотовый или домашний). Если название статьи слишком длинное, для колонтитула следует привести его краткий вариант.

Требования к аннотациям и библиографическим спискам:

– аннотация не должна содержать сложных формул, ссылок на библиографический список, по содержанию повторять название статьи, быть насыщена общими словами, не излагающими сути исследования. Оптимальный объем: 500–600 знаков;

– в библиографическом списке должны быть указаны только процитированные в статье работы. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Образцы оформления различных источников приведены вместе со стилевым файлом по адресу: <http://mmi.sgu.ru>.

Датой поступления статьи считается дата поступления ее окончательного варианта. Возвращенная на доработку статья должна быть прислана в редакцию не позднее чем через 3 месяца. Возвращение статьи на доработку не означает, что статья будет опубликована, после переработки она вновь будет рецензироваться.

Материалы, отклоненные редколлегией, не возвращаются.

Адрес для переписки с редколлегией серии: mmi@sgu.ru.

CONTENTS

Scientific Part

Mathematics

- Agafonova N. Yu.** On the L^1 -convergence of Series in Multiplicative Systems 371
- Berdnikov G. S.** Graphs with Contours in Multiresolution Analysis on Vilenkin Groups 377
- Gadzhimirzaev R. M.** The Fourier Series of the Meixner Polynomials Orthogonal with Respect to the Sobolev-type Inner Product 388
- Garkavenko G. V., Uskova N. B.** Spectral Analysis of a Class of Difference Operators with Growing Potential 395
- Kornev V. V., Khromov A. P.** Resolvent Approach to Fourier Method in a Mixed Problem for Non-homogeneous Wave Equation 403
- Mozhey N. P.** Three-dimensional Homogeneous Spaces, Not Admitting Invariant Connections 413
- Sultanov S. R.** On a Quotient Topology in Topological Semigroups and Groups 422
- Tikhonov I. V., Sherstyukov V. B., Petrosova M. A.** Bernstein Polynomials for a Standard Module Function on the Symmetric Interval 425
- Shcherbakov V. I.** Dini – Lipschitz Test on the Generalized Haar Systems 435

Mechanics

- Vatulyan A. O., Vasilev L. V.** Determination of Attaching Parameters of Inhomogeneous Beams in the Presence of Damping 449
- Kaloerov S. A., Zanko A. I.** Bending of Multiconnected Anisotropic Plates with the Curvilinear Holes 456

Computer Sciences

- Andreichenko D. K., Andreichenko K. P., Melnichuk D. V., Portenko M. S.** Adaptive Algorithm of Parametric Synthesis of Hybrid Dynamical Systems 465
- Zharkova A. V.** Indices of States in Dynamical System of Binary Vectors Associated with Palms Orientations 475

Appendices

Scientific Life Chronicles

- Golubov B. I., Kashin B. S., Kossovich L. Yu., Sidorov S. P., Khromov A. P., Chumachenko A. N.** 18th International Saratov Winter School “Contemporary Problems of Function Theory and Their Applications” 485



РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛОВ «ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. НОВАЯ СЕРИЯ»

Главный редактор

Чумаченко Алексей Николаевич, доктор геогр. наук, профессор (Саратов, Россия)

Заместитель главного редактора

Короновский Алексей Александрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Ответственный секретарь

Халова Виктория Анатольевна, кандидат физ.-мат. наук, доцент (Саратов, Россия)

Члены редакционного совета:

Балаш Ольга Сергеевна, кандидат экон. наук, доцент (Саратов, Россия)

Бучко Ирина Юрьевна, директор Издательства Саратовского университета (Саратов, Россия)

Данилов Виктор Николаевич, доктор ист. наук, профессор (Саратов, Россия)

Ивченков Сергей Григорьевич, доктор соц. наук, профессор (Саратов, Россия)

Коссович Леонид Юрьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Макаров Владимир Зиновьевич, доктор геогр. наук, профессор (Саратов, Россия)

Прозоров Валерий Владимирович, доктор филол. наук, профессор (Саратов, Россия)

Усанов Дмитрий Александрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Устьянцев Владимир Борисович, доктор филос. наук, профессор (Саратов, Россия)

Шамионов Раиль Мунирович, доктор психол. наук, профессор (Саратов, Россия)

Шляхтин Геннадий Викторович, доктор биол. наук, профессор (Саратов, Россия)

EDITORIAL COUNCIL OF THE JOURNALS «IZVESTIYA OF SARATOV UNIVERSITY. NEW SERIES»

Editor-in-Chief – Chumachenko A. N. (Saratov, Russia)

Deputy Editor-in-Chief – Koronovskii A. A. (Saratov, Russia)

Executive Secretary – Khalova V. A. (Saratov, Russia)

Members of the Editorial Council:

Balash O. S. (Saratov, Russia)

Buchko I. Yu. (Saratov, Russia)

Danilov V. N. (Saratov, Russia)

Ivchenkov S. G. (Saratov, Russia)

Kossovich L. Yu. (Saratov, Russia)

Makarov V. Z. (Saratov, Russia)

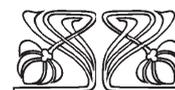
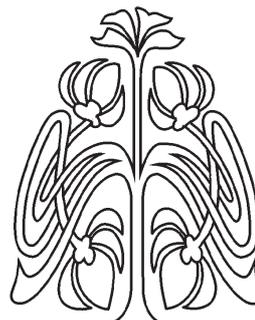
Prozorov V. V. (Saratov, Russia)

Usanov D. A. (Saratov, Russia)

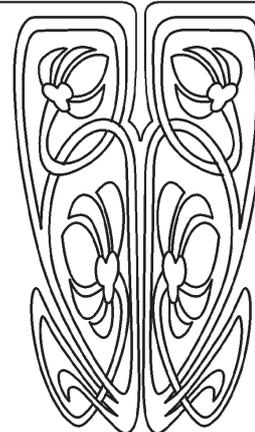
Ustiantsev V. B. (Saratov, Russia)

Shamionov R. M. (Saratov, Russia)

Shlyakhtin G. V. (Saratov, Russia)



РЕДАКЦИОННЫЙ
СОВЕТ





**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА
«ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. НОВАЯ СЕРИЯ.
СЕРИЯ: МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ИНФОРМАТИКА»**

Главный редактор

Коссович Леонид Юрьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Заместитель главного редактора

Прохоров Дмитрий Валентинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Ответственный секретарь

Халова Виктория Анатольевна, кандидат физ.-мат. наук, доцент (Саратов, Россия)

Члены редакционной коллегии:

Андрейченко Дмитрий Константинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Васильев Александр Юрьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Берген, Норвегия)

Ватульян Александр Ованесович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Ростов-на-Дону, Россия)

Индейцев Дмитрий Анатольевич, чл.-корр. РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор

(Санкт-Петербург, Россия)

Каплунов Юлий Давидович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Киль, Великобритания)

Ковалёв Владимир Александрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Ломакин Евгений Викторович, чл.-корр. РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор

(Москва, Россия)

Манжиров Александр Владимирович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Матвеев Валерий Павлович, акад. РАН, доктор техн. наук, профессор (Пермь, Россия)

Морозов Никита Фёдорович, акад. РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор

(Санкт-Петербург, Россия)

Насыров Семён Рафаилович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Казань, Россия)

Пархоменко Павел Павлович, чл.-корр. РАН, доктор техн. наук, профессор (Москва, Россия)

Радаев Юрий Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Резчиков Александр Федорович, чл.-корр. РАН, доктор техн. наук, профессор

(Саратов, Россия)

Роджерсон Грэм, Ph.D., профессор (Киль, Великобритания)

Сперанский Дмитрий Васильевич, доктор техн. наук, профессор (Москва, Россия)

Субботин Юрий Николаевич, чл.-корр. РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор

(Екатеринбург, Россия)

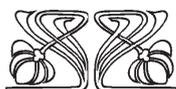
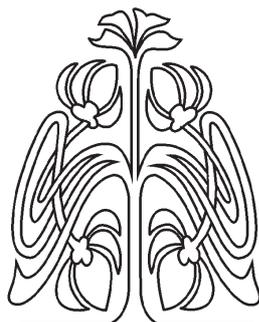
Харченко Вячеслав Сергеевич, доктор техн. наук, профессор (Харьков, Украина)

Хромов Август Петрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

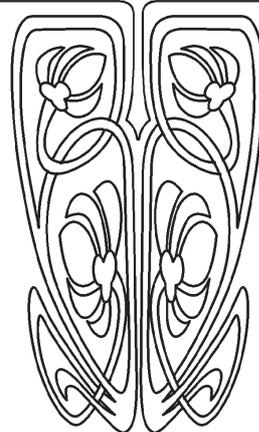
Шальто Анатолий Абрамович, доктор техн. наук, профессор (Санкт-Петербург, Россия)

Шашкин Александр Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Воронеж, Россия)

Юрко Вячеслав Анатольевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)



**РЕДАКЦИОННАЯ
КОЛЛЕГИЯ**



**EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL
«IZVESTIYA OF SARATOV UNIVERSITY. NEW SERIES.
SERIES: MATHEMATICS. MECHANICS. INFORMATICS»**

Editor-in-Chief – Kossovich L. Yu. (Saratov, Russia)

Deputy Editor-in-Chief – Prokhorov D. V. (Saratov, Russia)

Executive Secretary – Khalova V. A. (Saratov, Russia)

Members of the Editorial Board:

Andreichenko D. K. (Saratov, Russia)

Vasiliev A. Yu. (Bergen, Norway)

Vatulyan A. O. (Rostov-on-Don, Russia)

Indeitsev D. A. (St. Petersburg, Russia)

Kaplunov J. D. (Keele, United Kingdom)

Kovalev V. A. (Moscow, Russia)

Lomakin E. V. (Moscow, Russia)

Manzhirou A. V. (Moscow, Russia)

Matveenko V. P. (Perm, Russia)

Morozov N. F. (St. Petersburg, Russia)

Nasyrov S. R. (Kazan', Russia)

Parkhomenko P. P. (Moscow, Russia)

Radaev Yu. N. (Moscow, Russia)

Rezchikov A. F. (Saratov, Russia)

Rogerson Graham (Keele, United Kingdom)

Speranskii D. V. (Moscow, Russia)

Subbotin Yu. N. (Ekaterinburg, Russia)

Kharchenko V. S. (Kharkiv, Ukraine)

Khromov A. P. (Saratov, Russia)

Shalyto A. A. (St. Petersburg, Russia)

Shashkin A. I. (Voronezh, Russia)

Yurko V. A. (Saratov, Russia)

МАТЕМАТИКА

УДК 517.51

ОБ L^1 -СХОДИМОСТИ
РЯДОВ ПО МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ СИСТЕМАМ

Н. Ю. Агафонова

Агафонова Нина Юрьевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций и стохастического анализа, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, AgafonovaNYu@gmail.com

В статье устанавливаются два аналога тригонометрических результатов Гарретта – Станоевича для мультипликативных систем $\{\chi_n\}_{n=0}^{\infty}$ ограниченного типа. Во-первых, модифицированные частные суммы ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \chi_k$ с коэффициентами ограниченной вариации сходятся в $L^1[0, 1)$ к сумме ряда тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое что

$$\int_0^{\delta} \left| \sum_{k=n}^{\infty} (a_k - a_{k+1}) D_{k+1}(x) \right| dx < \varepsilon, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

где $D_{k+1}(x) = \sum_{i=0}^k \chi_i(x)$. Во-вторых, если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \ln(n+1) = 0$ и $\sum_{k=n}^{\infty} |a_k - a_{k+1}| \leq C a_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi_n(x)$ сходится к своей сумме $f(x)$ в $L^1[0, 1)$ тогда и только тогда, когда $f \in L^1[0, 1)$.

Ключевые слова: мультипликативные системы, ряд Фурье – Виленкина, мультипликаторы, L^1 -сходимость.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-371-377

ВВЕДЕНИЕ

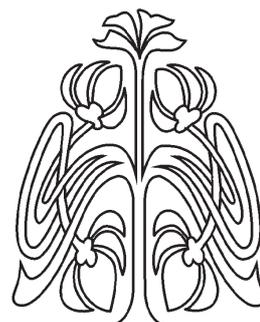
Пусть $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел, такая что $2 \leq p_n \leq N$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Положим по определению $m_0 = 1$, $m_n = p_1 \dots p_n$, при $n \in \mathbb{N}$. Каждое число $x \in [0, 1)$ имеет разложение

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{m_n}, \quad x_n \in \mathbb{Z} \cap [0, p_n). \quad (1)$$

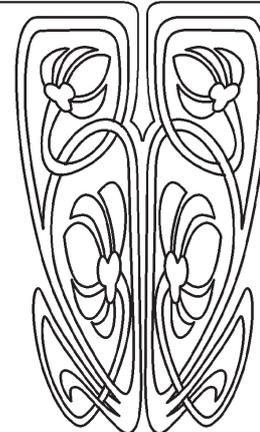
Представление (1) единственно, если для $x = k/m_j$, $k, j \in \mathbb{N}$, $0 < k < m_j$, брать разложение с конечным числом $x_n \neq 0$. Если $k \in \mathbb{Z}_+$ записано в виде $k = \sum_{j=1}^{\infty} k_j m_{j-1}$, $k_j \in \mathbb{Z} \cap [0, p_j)$, а $x \in [0, 1)$ имеет разложение (1), то по определению

$$\chi_k(x) = \exp \left(2\pi i \sum_{j=1}^{\infty} x_j k_j / p_j \right).$$

Система $\{\chi_k\}_{k=0}^{\infty}$ является ортонормированной и полной в $L^1[0, 1)$ [1, § 1.5].



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





Далее мы изучаем L^1 -интегрируемость рядов вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \chi_k(x). \tag{2}$$

Для ряда (2) пусть $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \chi_k(x)$, $\sigma_n(x) = \sum_{k=1}^n S_k(x)/n$. Для $f \in L^1[0, 1)$ определим коэффициенты Фурье, частные суммы ряда Фурье и средние Фейера равенствами

$$\hat{f}(n) = \int_0^1 f(t) \overline{\chi_n(t)} dt, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad S_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k) \chi_k(x), \quad \sigma_n(f)(x) = \sum_{k=1}^n S_k(f)(x)/n.$$

Важную роль далее будут играть ядра Дирихле и Фейера для системы $\{\chi_k\}_{k=0}^{\infty}$:

$$D_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \chi_k(x), \quad F_n(x) = \sum_{k=1}^n D_k(x)/n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Для последовательности $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ пусть $\Delta a_k = \Delta^1 a_k = a_k - a_{k+1}$, $\Delta^2 a_k = a_k - 2a_{k+1} + a_{k+2}$. Как обычно $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$.

Хорошо известно, что из $f \in L^1[0, 1)$ не следует, что $\|S_n(f) - f\|_1 \rightarrow 0$. Более того, К. Оневир (Oppenweeg) [2] установил существование такой функции в классе функций, L^1 -модуль непрерывности которых есть $O((\ln 1/\delta)^{-1})$.

Поэтому большое внимание уделялось условиям L^1 -сходимости рядов (2) в терминах коэффициентов $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$. Так, Ш. Яно (Yano) [3] установил следующий аналог результата А. Н. Колмогорова [4] для тригонометрических рядов.

Теорема А. Пусть $p_i \equiv 2$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ и $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ квазивыпукла, т. е. $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) |\Delta^2 a_n| < \infty$. Тогда ряд (2) сходится при $x \neq 0$ к функции $f \in L^1[0, 1)$ и является ее рядом Фурье по системе $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$.

Из теоремы А легко получить утверждение: в условиях теоремы А норма $\|S_n(x) - f\|_1$ стремится к нулю тогда и только тогда, когда $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k \|D_k\|_1 = 0$.

Мы получим более общий критерий, аналогичный теореме Гаррета – Станоевича [5], из которого будет следовать утверждение выше и его обобщение для ограниченной последовательности $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$.

В [6] Дж. В. Гарретт (Garrett) и Ч. В. Станоевич (Stanojević) установили связь между поведением производной сопряженной суммы Фурье и сходимостью тригонометрического ряда Фурье в пространстве $L^1_{2\pi}$ интегрируемых по Лебегу на периоде 2π -периодических функций. Как следствие, ими была получена

Теорема В. Пусть $a_n \log n = o(1)$, $b_n \log n = o(1)$, $\Delta a_n \geq 0$, $\Delta b_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда сумма $f(x)$ ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ принадлежит $L^1_{2\pi}$ в том и только том случае, когда

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \text{ сходится к } f \text{ в } L^1_{2\pi}.$$

Будем писать $\{a_k\}_{k=0}^{\infty} \in RBVS$, если $\sum_{k=n}^{\infty} |\Delta a_n| \leq C a_n$ для всех $n \in \mathbb{Z}_+$. В работе получен аналог теоремы В и предшествующего ей результата для ряда (2), где $\{a_k\}_{k=0}^{\infty} \in RBVS$. Приведем необходимые нам вспомогательные результаты.

Лемма 1. 1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0, 1)$. Тогда $|D_n(x)| \leq N x^{-1}$, где $2 \leq p_i \leq N$ для всех $i \in \mathbb{N}$.
2. Справедливо неравенство $\|D_n\|_1 \leq C \ln(n+1)$, $n \in \mathbb{N}$.

Доказательства обоих утверждений леммы 1 можно найти в [7, гл. 4, § 3, 4].



Лемма 2. Если $\sum_{k=0}^{\infty} |\Delta a_k| \leq \infty$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$, то ряд (2) сходится на $(0, 1)$ и

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \chi_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta a_k D_{k+1}(x), \quad x \in (0, 1). \quad (3)$$

Доказательство. С помощью преобразования Абеля получаем

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k \chi_k(x) = \sum_{k=0}^{n-2} (a_k - a_{k+1}) D_{k+1}(x) + a_{n-1} D_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta a_k D_{k+1}(x) + a_n D_n(x). \quad (4)$$

По лемме 1 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{k-1} D_k(x) = 0$ при $x \in (0, 1)$, откуда следует формула (3) и сходимость ряда в левой части (4). \square

Лемма 3. 1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0, 1)$. Тогда $|nF_n(x)| \leq Cx^{-2}$, где C не зависит от n и x .
2. Справедливо неравенство $\|F_n\|_1 \leq C$.

Утверждение 1 леммы 3 установлена в [8], доказательство утверждения 2 можно найти в [7, гл. 4, § 10].

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим модифицированные частные суммы ряда (2)

$$S_n^*(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=k}^{n-1} \Delta a_j \right) \chi_k(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \chi_k(x) - a_n D_n(x).$$

Если $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ и $\sum_{k=0}^{\infty} |\Delta a_k| < \infty$ (будем писать $\{a_k\}_{k=0}^{\infty} \in bV_0$), то $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \chi(k)$ существует при всех $x \in (0, 1)$. Из леммы 1 следует, что в этом случае также $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^*(x) = f(x)$, $x \in (0, 1)$.

Теорема 1. Пусть $\{a_k\}_{k=0}^{\infty} \in bV_0$ и $f(x)$ — сумма ряда (2). Тогда $S_n^*(x) \rightarrow f(x)$ в $L^1[0, 1)$ в том и только том случае, когда $\{a_k\}$ удовлетворяет условию (A): для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое что для всех $n \in \mathbb{Z}_+$ верно неравенство

$$\int_0^{\delta} \left| \sum_{k=n}^{\infty} \Delta a_k D_{k+1}(x) \right| dx < \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ и $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ удовлетворяет условию (A). Тогда существует $\delta > 0$ со свойством

$$\int_0^{\delta} \left| \sum_{k=n}^{\infty} \Delta a_k D_{k+1}(x) \right| dx < \varepsilon/2, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

В силу леммы 2, (4) и леммы 1 имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f(x) - S_n^*(x)| dx &= \int_0^1 \left| \sum_{k=0}^{\infty} \Delta a_k D_{k+1}(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \Delta a_k D_{k+1}(x) + a_n D_n(x) - a_n D_n(x) \right| dx = \\ &= \int_0^1 \left| \sum_{k=n}^{\infty} \Delta a_k D_{k+1}(x) \right| dx = \left(\int_0^{\delta} + \int_{\delta}^1 \right) \left| \sum_{k=n}^{\infty} \Delta a_k D_{k+1}(x) \right| dx < \\ &< \varepsilon/2 + \sum_{k=n}^{\infty} |\Delta a_k| \int_{\delta}^1 N x^{-1} dx \leq \varepsilon/2 + N \ln 1/\delta \sum_{k=n}^{\infty} \Delta a_k < \varepsilon \end{aligned} \quad (5)$$

при достаточно больших n .



Обратно, пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n^* - f\|_1 = 0$ и $\varepsilon > 0$. Найдем $M \in \mathbb{N}$, такое что $\int_0^1 |f(x) - S_n^*(x)| dx < \varepsilon/2$ при $n \geq M$. В силу (5) получаем

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=n}^{\infty} \Delta a_k D_{k+1}(x) \right| dx < \varepsilon/2, \quad n \geq M. \tag{6}$$

Если $\Delta a_k = 0$ при $0 \leq k \leq M$, то (6) верно при всех $n \in \mathbb{N}$. Если же $\sum_{k=0}^M |\Delta a_k| \neq 0$, то пусть $\delta = \varepsilon \left(2M \sum_{k=0}^M |\Delta a_k| \right)^{-1}$. При $n \geq M$ в силу (6) имеем

$$\int_0^{\delta} \left| \sum_{k=n}^{\infty} \Delta a_k D_{k+1}(x) \right| dx \leq \int_0^1 \left| \sum_{k=n}^{\infty} \Delta a_k D_{k+1}(x) \right| dx < \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

При $0 \leq n < M$ находим, что

$$\begin{aligned} \int_0^{\delta} \left| \sum_{k=n}^{\infty} \Delta a_k D_{k+1}(x) \right| dx &\leq \int_0^{\delta} \left| \sum_{k=n}^{M-1} \Delta a_k D_{k+1}(x) \right| dx + \int_0^{\delta} \left| \sum_{k=M}^{\infty} \Delta a_k D_{k+1}(x) \right| dx \leq \\ &\leq \int_0^{\delta} \sum_{k=0}^{M-1} (k+1) |\Delta a_k| dx + \int_0^1 \left| \sum_{k=M}^{\infty} \Delta a_k D_{k+1}(x) \right| dx \leq \delta M \sum_{k=0}^{M-1} |\Delta a_k| + \varepsilon/2 < \varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

Следствие 1. Пусть $\{a_k\}_{k=0}^{\infty} \in bV_0$ удовлетворяет условию (A) и $f(x)$ — сумма ряда (2). Тогда соотношения $\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n - f\|_1 = 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \|D_n\|_1 = 0$ равносильны.

Доказательство. Так как $S_n(x) = S_n^*(x) + a_n D_n(x)$ и по теореме 1 имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n^* - f\|_1 = 0$, то из неравенств

$$\begin{aligned} |a_n| \cdot \|D_n\|_1 &= \|S_n(x) - S_n^*(x)\|_1 \leq \|f - S_n\|_1 + \|f - S_n^*\|_1, \\ \|S_n - f\|_1 &\leq \|S_n^* - f\|_1 + |a_n| \cdot \|D_n\|_1 \end{aligned}$$

вытекает справедливость следствия. □

Следствие 2. Пусть $\{a_k\}_{k=0}^{\infty} \in bV_0$ удовлетворяет условиям теоремы A. Тогда $S_n^*(x) \rightarrow f(x)$ в $L^1[0, 1]$ в том и только том случае, когда $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \|D_n\|_1 = 0$.

Доказательство. Сходимость ряда (2) и интегрируемость его суммы f установлены в [9] вместе с равенством $f(x) - S_n(x) = \sum_{i=n}^{\infty} \Delta^2 a_i (i+1) F_{i+1}(x) - n \Delta a_n F_n(x) - a_n D_n(x)$. Пусть $\|F_n\|_1 \leq C_1$ (см. лемму 3). Так как $n |\Delta a_n| \leq (n+1) \left| \sum_{k=n}^{\infty} \Delta^2 a_k \right| \leq \sum_{k=n}^{\infty} (k+1) |\Delta^2 a_k|$, $n \in \mathbb{N}$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} n |\Delta a_n| = 0$. Пусть при $n \geq n_0$ верны неравенства $\sum_{k=n}^{\infty} (k+1) |\Delta^2 a_k| < \varepsilon/4C_1$ и $|n \Delta a_n| < \varepsilon/4C_1$. Тогда для любых $\delta \in [0, 1]$ и $n \geq n_0$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \int_0^{\delta} \left| \sum_{k=n}^{\infty} \Delta a_k D_{k+1}(x) \right| dx &\leq \int_0^1 \left| \sum_{k=n}^{\infty} (k+1) \Delta^2 a_k F_{k+1}(x) - n \Delta a_n F_n(x) \right| dx \leq \\ &\leq \sum_{k=n_0}^{\infty} |\Delta^2 (k+1) a_k| \cdot \|F_{k+1}\|_1 + |n \Delta a_n| \cdot \|F_n\|_1 \leq \varepsilon/2. \tag{7} \end{aligned}$$

При $n < n_0$ аналогично (7) получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{\delta} \left| \sum_{k=n}^{\infty} \Delta a_k D_{k+1}(x) \right| dx &\leq \int_0^{\delta} \left(\sum_{k=n}^{\infty} (k+1) |\Delta^2 a_k| \cdot |F_{k+1}(x)| + n |\Delta a_n| \cdot |F_n(x)| \right) dx \leq \\ &\leq \int_0^{\delta} \left(\sum_{k=n}^{n_0-1} (k+1) |\Delta^2 a_k| \cdot |F_{k+1}(x)| + n |\Delta a_n| \cdot |F_n(x)| \right) dx + \varepsilon/2 = I_1 + \varepsilon/2. \tag{8} \end{aligned}$$



Но по определению $|F_k(x)| \leq (1 + 2 + \dots + k)/k = (k + 1)/2 \leq (n_0 + 1)/2$ при $k \leq n_0$. Поэтому при $\delta < \varepsilon/(2M(n_0 + 1))$, где $M = \max\left(\sum_{k=0}^{\infty} (k + 1)|\Delta^2 a_k|, \sup_n |n\Delta a_n|\right)$, имеем

$$I_1 \leq \delta M(n_0 + 1)/2 + \delta M(n_0 + 1)/2 < \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = \varepsilon/2$$

и левая часть (8) меньше ε . Таким образом, выполнено условие (A) из теоремы 1, и следствие 2 вытекает из следствия 1. \square

Для $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \chi_k(x)$ пусть $S_n^{[1]}(x) = \sum_{k=1}^{n-1} k a_k \chi_k(x)$ — обобщенная производная первого порядка. Подробнее об этом понятии см. [10].

Теорема 2. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \ln(n + 1) = 0$ и $\{a_k\}_{k=0}^{\infty} \in RBVS$. Тогда $\|S_n^{[1]}\|_1 = o(n)$, при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. По определению и лемме 1 имеем

$$\begin{aligned} \|S_{n+1}^{[1]}\|_1 &= \left\| \sum_{k=1}^n k a_k \chi_k \right\|_1 = \left\| \sum_{k=1}^{n-1} k a_k (D_{k+1} - D_1 - (D_k - D_1)) \right\|_1 = \\ &= \left\| \sum_{k=1}^{n-1} (k \Delta a_k - a_{k+1})(D_{k+1} - D_1) + n a_n (D_{n+1} - D_1) \right\|_1 \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{n-1} k |\Delta a_k| \cdot \|D_{k+1} - D_1\|_1 + \sum_{k=1}^{n-1} |a_{k+1}| \cdot \|D_{k+1} - D_1\|_1 + n a_n \|D_{n+1} - D_1\|_1 \leq \\ &\leq C_1 \left(\sum_{k=1}^{n-1} k |\Delta a_k| \ln(k + 1) + \sum_{k=1}^{n-1} |a_{k+1}| \ln(n + 1) + n a_n \ln(n + 1) \right) =: C_1(I_1 + I_2 + I_3). \end{aligned}$$

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \ln(n + 1) = 0$, то $I_3 = o(n)$, $n \rightarrow \infty$, а в силу регулярности метода Чезаро верно, что $I_2 = o(n)$. Чтобы оценить I_1 рассмотрим $P_k = \sum_{i=k}^{\infty} |\Delta a_i|$, которые не превосходят $C_2 a_k$ согласно условию. Сначала запишем

$$I_1 = \sum_{k=1}^{n-1} k |\Delta a_k| \ln k + \sum_{k=1}^{n-1} k |\Delta a_k| \ln(1 + 1/k) = I_{11} + I_{12}.$$

Так как $\ln(1 + 1/k) < 1/k$, то $I_{12} \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta a_k| \leq C_2 a_1$ и

$$0 \leq I_{11} = \sum_{k=1}^{n-1} k \ln k (P_k - P_{k+1}) = \sum_{k=2}^{n-1} P_k (k \ln k - (k - 1) \ln(k - 1)) - P_n (n - 1) \ln(n - 1).$$

Так как $(x \ln x)' = \ln x - 1$, то при $k \geq 4$ по теореме Лагранжа $(k \ln k - (k - 1) \ln(k - 1)) \leq \ln k$, а при $k = 2, 3$ верно $(k \ln k - (k - 1) \ln(k - 1)) \leq C_3 \ln k$, где $C_3 > 1$. Поэтому $I_{11} \leq \sum_{k=2}^{n-1} C_3 C_2 a_k \ln k$. Правая часть последнего неравенства есть $o(n)$ также в силу регулярности $(C, 1)$ метода Чезаро. Объединяя полученные оценки, получаем $\|S_n^{[1]}\|_1 = o(n)$. \square

Следствие 3. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \ln(n + 1) = 0$ и $\{a_k\}_{k=0}^{\infty} \in RBVS$, $f(x)$ — сумма ряда (2). Для сходимости $S_n(x)$ к $f(x)$ в $L^1[0, 1)$ необходимо и достаточно, чтобы $f(x) \in L^1[0, 1)$.

Доказательство. Необходимость условия $f(x) \in L^1[0, 1)$ для равенства $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - S_n\|_1 = 0$ очевидна.

Достаточность. Пусть $f(x) \in L^1[0, 1)$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \sigma_n\|_1 = 0$ (см. [7, гл. 4, § 10]). В то же время по теореме 2

$$\|\sigma_n(f) - S_n(f)\|_1 = n^{-1} \left\| \sum_{k=1}^{n-1} k a_k \chi_k \right\|_1 = o(1).$$



Поэтому $\|f - S_n\|_1 \leq \|f - \sigma_n\|_1 + \|\sigma_n - S_n\|_1$, где правая и, как следствие, левая части последнего неравенства стремятся к нулю. \square

Следствие 3 является аналогом и обобщением теоремы В.

Библиографический список

1. Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А. Ряды и преобразования Уолша : Теория и применения. М. : Наука, 1987. 344 с.
2. Onneweer C. W. On Moduli of Continuity and Divergence of Fourier Series on Groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1971. Vol. 29, № 1. P. 109–112. DOI: 10.2307/2037681.
3. Yano Sh. On Walsh–Fourier series // Tohoku Math. J. 1951. Vol. 3, № 2. P. 223–242. DOI: 10.2748/tmj/1178245527.
4. Kolmogoroff A. Sur l'ordre de grandeur des coefficient de la serie de Fourier – Lebesgue // Bull. Acad. Polon. 1923. Iss. A. P. 83–86.
5. Garrett J. W., Stanojević Č. V. On L^1 convergence of certain cosine sums // Proc. Amer. Math. Soc. 1976. Vol. 54, № 1. P. 101–105. DOI: 10.1090/S0002-9939-1976-0394002-8.
6. Garrett J. W., Stanojević Č. V. Necessary and sufficient conditions for L^1 convergence of trigonometric series // Proc. Amer. Math. Soc. 1976. Vol. 60, № 1. P. 68–71. DOI: 10.1090/S0002-9939-1976-0425480-3.
7. Агаев Г. Н., Виленкин Н. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И. Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нульмерных группах. Баку : ЭЛМ, 1981. 180 с.
8. Iofina T. V., Volosivets S. S. On the degree of approximation by means of Fourier – Vilenkin series in Holder and L_p norm // East J. Approx. 2009. Vol. 15, № 3. P. 143–158.
9. Volosivets S. S., Fadeev R. N. Estimates of best approximations in integral metrics and Fourier coefficients with respect to multiplicative systems // Analysis Mathematica. 2011. Vol. 37, № 3. P. 215–238. DOI: 10.1007/s10476-011-0304-8.
10. Zelin H. The derivatives and integrals of fractional order in Walsh–Fourier analysis, with applications to approximation theory // J. of Approx. Theory. 1983. Vol. 39, iss. 4. P. 361–373. DOI: 10.1016/0021-9045(83)90079-5.

Образец для цитирования:

Агафонова Н. Ю. Об L^1 -сходимости рядов по мультипликативным системам // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 4. С. 371–377. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-371-377.

On the L^1 -convergence of Series in Multiplicative Systems

N. Yu. Agafonova

Nina Yu. Agafonova, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., 410012, Saratov, Russia, AgafonovaNYu@gmail.com

In the paper two analogs of Garrett–Stanojević trigonometric results are established for multiplicative systems $\{\chi_n\}_{n=0}^{\infty}$ of bounded type. First, the modified partial sums of a series $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \chi_k$ with coefficients of bounded variation converge in $L^1[0, 1)$

to its sum if and only if for all $\varepsilon > 0$ there exists $\delta > 0$ such that $\int_0^{\delta} \left| \sum_{k=n}^{\infty} (a_k - a_{k+1}) D_{k+1}(x) \right| dx < \varepsilon$, $n \in \mathbb{Z}_+$,

where $D_{k+1}(x) = \sum_{i=0}^k \chi_i(x)$. Secondly, if $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \ln(n+1) = 0$ and $\sum_{k=n}^{\infty} |a_k - a_{k+1}| \leq C a_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, then the series

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi_n(x)$ converges to its sum $f(x)$ in $L^1[0, 1)$ if and only if $f \in L^1[0, 1)$.

Key words: multiplicative systems, Fourier – Vilenkin series, multipliers, L^1 -convergence.

References

1. Golubov B. I., Efimov A. V., Skvortsov V. A. *Walsh series and transforms. Theory and applications*. Dordrecht, Kluwer Academic Publ., 1991. 380 p.
2. Onneweer C. W. On Moduli of Continuity and Divergence of Fourier Series on Groups. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1971, vol. 29, no. 1, pp. 109–112. DOI: 10.2307/2037681.
3. Yano Sh. On Walsh – Fourier series. *Tohoku Math. J.*, 1951, vol. 3, no. 2, pp. 223–242. DOI: 10.2748/tmj/1178245527.
4. Kolmogoroff A. Sur l'ordre de grandeur des coefficient de la serie de Fourier – Lebesgue. *Bull. Acad. Polon.*, 1923, iss. A, pp. 83–86.
5. Garrett J. W., Stanojević Č. V. On L^1 conver-



- gence of certain cosine sums. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1976, vol. 54, no. 1, pp. 101–105. DOI: 10.1090/S0002-9939-1976-0394002-8.
6. Garrett J. W., Stanojević Č. V. Necessary and sufficient conditions for L^1 convergence of trigonometric series. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1976, vol. 60, no. 1, pp. 68–71. DOI: 10.1090/S0002-9939-1976-0425480-3.
 7. Agaev G. N., Vilenkin N. Ya., Dzafarli G. M., Rubinstein A. I. *Mul'tiplikativnye sistemy funktsij i garmonicheskij analiz na nul'mernyh gruppah* [Multiplicative Systems of Functions and Harmonic Analysis on Zero-dimensional Groups]. Baku, ELM, 1981. 180 p. (in Russian).
 8. Iofina T. V., Volosivets S. S. On the degree of approximation by means of Fourier – Vilenkin series in Holder and L_p norm. *East J. Approx.*, 2009, vol. 15, no. 3, pp. 143–158.
 9. Volosivets S. S., Fadeev R. N. Estimates of best approximations in integral metrics and Fourier coefficients with respect to multiplicative systems. *Analysis Mathematica*, 2011, vol. 37, no. 3, pp. 215–238. DOI: 10.1007/s10476-011-0304-8.
 10. Zelin H. The derivatives and integrals of fractional order in Walsh – Fourier analysis, with applications to approximation theory. *J. of Approx. Theory*, 1983, vol. 39, iss. 4, pp. 361–373. DOI: 10.1016/0021-9045(83)90079-5.

Please cite this article in press as:

Agafonova N. Yu. On the L^1 -convergence of Series in Multiplicative Systems. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 4, pp. 371–377 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-371-377.

УДК 517.986.62

ГРАФЫ С КОНТУРАМИ В КРАТНОМАСШТАБНОМ АНАЛИЗЕ НА ГРУППАХ ВИЛЕНКИНА

Г. С. Бердников

Бердников Глеб Сергеевич, ассистент кафедры математического анализа, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, evointelligent@gmail.com

В данной статье исследуется вопрос построения ортогонального кратномасштабного анализа на группах Виленкина. В предыдущих работах С. Ф. Лукомского, Ю. С. Крусс и автора обсуждается алгоритм построения масштабирующей функции φ с компактным носителем, преобразование Фурье которой также имеет компактный носитель. Реализация данного алгоритма тесно связана с определенного типа ориентированными графами, строящимися по так называемым N -валидным деревьям. Особенностью этих графов является отсутствие ориентированных циклов — контуров, что позволяет строить функции с ограниченным носителем преобразования Фурье. Такой подход обладает рядом преимуществ. Во-первых, он не является переборным, в отличие от алгоритма, связанного с использованием заблокированных множеств, описанного в работах Ю. А. Фаркова. Во-вторых, он удобен для обобщения на локальные поля положительной характеристики, что было сделано Ю. С. Крусс. Данная работа является первым шагом в использовании графов с контурами для аналогичных целей. Развивая идеи из предыдущих работ, по 1-валидному дереву мы строим граф с единственным простым контуром. Удастся доказать, что такой граф также порождает ортогональную масштабирующую функцию. Однако из-за появления контура преобразование Фурье масштабирующей функции уже не будет иметь компактный носитель.

Ключевые слова: кратномасштабный анализ, группа Виленкина, графы, масштабирующая функция, вейвлет-анализ.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-377-388

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $(G, \dot{+})$ — локально компактная группа Виленкина, элементами которой являются бесконечные в обе стороны последовательности

$$x = (\dots, 0_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \dots), \quad x_j = \overline{0, p-1},$$

где p — любое простое число; $g_n = (\dots, 0_{n-1}, 1_n, 0_{n+1}, \dots)$ — базисные элементы в G . Операция сложения $\dot{+}$ определяется как покоординатное сложение по модулю p , т.е. $x \dot{+} y = (x_j \dot{+} y_j) = (x_j + y_j \bmod p)$.

Пусть $G_n = \{x \in G : x = (\dots, 0_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \dots)\}$, $n \in \mathbb{Z}$, — основная цепочка подгрупп, G_n^\perp — совокупность аннуляторов, X — группа всех характеров, $r_n \in G_{n+1}^\perp \setminus G_n^\perp$ — функции Радемахера на



группе G . Оператор растяжения \mathcal{A} в группе G определяется равенством $\mathcal{A}x := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g_{n-1}$, где $x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g_n \in G$, в группе характеров — равенством $(\chi \mathcal{A}, x) = (\chi, \mathcal{A}x)$. Определим множества

$$H_0^{(s)} = \{h \in G : h = a_{-1}g_{-1} + a_{-2}g_{-2} + \dots + a_{-s}g_{-s}\}, \quad s \in \mathbb{N},$$

$$H_0 = \{x \in G : x = a_{-1}g_{-1} + a_{-2}g_{-2} + \dots + a_{-s}g_{-s}, s \in \mathbb{N}\}.$$

Множество H_0 есть множество сдвигов в G . Оно есть аналог множества целых неотрицательных чисел.

В. Протасов, Ю. Фарков в работах [1–3] охарактеризовали все двоичные финитные всплески на \mathbb{R}_+ и указали алгоритм их построения. Ю. Фарков в работах [4, 5], рассматривая масштабирующие функции $\varphi(x)$ с компактным носителем G_{-N} , получил необходимые и достаточные условия на маску $m_0(\chi)$, которая порождает ортогональный кратномасштабный анализ (КМА). Эти условия были даны при дополнительном предположении

$$\sum_{\alpha_0=0}^{p-1} |m_0(G_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha_0} r_{-N+1}^{\alpha_0} \dots r_{-1}^{\alpha_0} r_0^{\alpha_0})|^2 = 1,$$

которое является необходимым для ортогональности системы сдвигов соответствующей масштабирующей функции φ . Ю. Фарков доказал, что в этом случае масштабирующая функция φ порождает ортогональный КМА тогда и только тогда, когда маска m_0 не имеет блокированных множеств. Задача нахождения блокированных множеств является переборной и требует перебора примерно 2^p различных вариантов, что реально только при достаточно малых p и N .

Поэтому возникла необходимость найти алгоритм построения ортогональной масштабирующей функции, не требующий перебора, что дало начало новому подходу, связанному с использованием различного типа графов. В работах [6, 7] был найден непереборный алгоритм для нахождения φ , но этот метод работает только в случае, когда функция $|\hat{\varphi}(\chi)|$ постоянна на смежных классах по подгруппе G_{-1}^\perp и принимает только два значения: 0 или 1. Впервые деревья появились в работах [8, 9] и были использованы для построения КМА Рисса. В [10] удалось избавиться от условия $\text{supp } \varphi(x) \subset G_{-1}$, для этого было введено понятие N -валидного дерева и было доказано, что ступенчатая функция $\varphi(x)$ с носителем $\text{supp } \varphi(x) \subset G_{-1}$ и условием $|\hat{\varphi}(\chi)| = 0$ или 1 порождает ортогональный КМА тогда и только тогда, когда $\varphi(x)$ порождена N -валидным деревом.

В работе [11] удалось избавиться от условия $|\hat{\varphi}(\chi)| = 0$ или 1 и указан алгоритм построения ортогональной масштабирующей функции с единственным ограничением: $\hat{\varphi}(\chi)$ — ступенчатая функция. Полученный алгоритм не требует перебора.

Задача построения такой функции сводится к построению некоторого графа, который, в свою очередь, строится по произвольному N -валидному дереву. Результатом является ортогональная масштабирующая функция с компактным носителем, преобразование Фурье которой также имеет компактный носитель, или, можно сказать, что функция имеет компактный носитель и ограниченную частотную полосу.

В данной работе идеи из работы [11] будут развиты с целью нахождения некоторых ортогональных масштабирующих функций с компактным носителем и неограниченной частотной полосой.

Построение работы следующее. В параграфе 1 описаны основные понятия, связанные с масштабирующей функцией, у которой преобразование Фурье имеет ограниченный носитель. В параграфе 2 описан алгоритм построения таких масштабирующих функций. Параграф 3 содержит новые результаты, касающиеся построения масштабирующей функции с неограниченной частотной полосой.

1. МАСШТАБИРУЮЩАЯ ФУНКЦИЯ С ОГРАНИЧЕННОЙ ЧАСТОТНОЙ ПОЛОСОЙ

Сначала обсудим случай, когда масштабирующая функция φ , порождающая ортогональный КМА, является ступенчатой. Множество ступенчатых функций, постоянных на смежных классах по подгруппе G_M с носителем $\text{supp}(\varphi) \subset G_{-N}$, обозначим через $\mathfrak{D}_M(G_{-N})$, $M, N \in \mathbb{N}$. Аналогично $\mathfrak{D}_{-N}(G_M^\perp)$ есть множество ступенчатых функций, постоянных на смежных классах по подгруппе G_{-N}^\perp с носителем $\text{supp}(\varphi) \subset G_M^\perp$. Если функция $\varphi \in \mathfrak{D}_M(G_{-N})$ порождает ортогональный КМА, то она



удовлетворяет масштабирующему уравнению $\varphi(x) = \sum_{h \in H_0^{(N+1)}} \beta_h \varphi(\mathcal{A}x \dot{-} h)$, которое можно записать в частотном виде (см. [7]):

$$\hat{\varphi}(\chi) = m_0(\chi) \hat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-1}), \quad (1)$$

где

$$m_0(\chi) = \frac{1}{p} \sum_{h \in H_0^{(N+1)}} \beta_h \overline{\chi \mathcal{A}^{-1}, h} \quad (2)$$

— маска уравнения (1). В [7] были доказаны следующие утверждения.

1. Если $\hat{\varphi}(\chi) \in \mathfrak{D}_{-N}(G_M^\perp)$ есть решение масштабирующего уравнения (1) и система сдвигов $(\varphi(x \dot{-} h))_{h \in H_0}$ есть ортонормированная система, то φ порождает ортогональный КМА.

2. Если $\hat{\varphi}(\chi) \in \mathfrak{D}_{-N}(G_M^\perp)$, то система сдвигов $(\varphi(x \dot{-} h))_{h \in H_0}$ будет ортонормированной системой тогда и только тогда, когда для любых $\alpha_{-N}, \alpha_{-N+1}, \dots, \alpha_{-1} = \overline{(0, p-1)}$

$$\sum_{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{M-1}=0}^{p-1} |\hat{\varphi}(G_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha_{-N}} \dots r_0^{\alpha_0} \dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}})|^2 = 1. \quad (3)$$

Таким образом, для построения ортогонального КМА нужно построить функцию $\hat{\varphi}(\chi) \in \mathfrak{D}_{-N}(G_M^\perp)$, которая является решением масштабирующего уравнения (1) и для которой выполнены условия (3).

2. ПОСТРОЕНИЕ ОРТОГОНАЛЬНОЙ МАСШТАБИРУЮЩЕЙ ФУНКЦИИ С ОГРАНИЧЕННОЙ ЧАСТОТНОЙ ПОЛОСОЙ

Определение 1. Пусть N — натуральное число, p — простое. Под N -валидным деревом мы будем понимать дерево, ориентированное от листа к корню и удовлетворяющее следующим условиям:

1) корень и все вершины вплоть до $(N-1)$ -го уровня имеют значение, равное нулю;

2) любой путь $(\alpha_k \rightarrow \alpha_{k+1} \rightarrow \dots \rightarrow \alpha_{k+N-1})$ длины $N-1$ присутствует в дереве ровно один раз.

Здесь $\alpha_i = \overline{0, p-1}$.

Выберем N -валидное дерево T и будем строить по нему масштабирующую функцию.

Алгоритм 1.

1. По дереву T строим новое дерево \tilde{T} следующим образом. Заменяем последовательность из N нулей, заканчивающуюся корнем дерева на одну вершину со значением $(0_N, 0_{N-1}, \dots, 0_1)$. Все вершины $(N+1)$ -го уровня дерева T теперь связаны с этой вершиной в дереве \tilde{T} . Она является корнем дерева \tilde{T} . Без изменения связей переобозначаем остальные вершины. Если в дереве T с вершины α_N начинался путь из N элементов в направлении к корню $\alpha_N \rightarrow \alpha_{N-1} \rightarrow \dots \rightarrow \alpha_1$, то в новом дереве \tilde{T} данная вершина будет иметь значение, равное N -мерному вектору $(\alpha_N, \alpha_{N-1}, \dots, \alpha_1)$. В силу условия N -валидности дерева T каждому такому вектору в дереве \tilde{T} соответствует единственная вершина. Так, если мы обозначим $height(T) = H$, $height(\tilde{T}) = \tilde{H}$, то, очевидно, $\tilde{H} = H - N + 1$.

Такое дерево будем называть N -валидным деревом в развернутой форме записи.

2. Теперь по дереву \tilde{T} строим граф Γ . Каждую вершину $\bar{\alpha}_N = (\alpha_N, \alpha_{N-1}, \dots, \alpha_1)$ дерева \tilde{T} свяжем со всеми вершинами нижнего уровня, имеющими вид $(\alpha_{N-1}, \dots, \alpha_1, \alpha_0)$, т. е. первые $(N-1)$ элементов этой вершины совпадают с последними $(N-1)$ элементами вершины $\bar{\alpha}_N$. Вершины, с которыми вершина $\bar{\alpha}_N$ связана, мы будем обозначать $(\alpha_{N-1}, \dots, \alpha_1, \tilde{\alpha}_0)$, т. е. $\alpha_0 \in \{\tilde{\alpha}_0\}$ тогда и только тогда, когда вершина $\bar{\alpha}_N$ связана с вершиной $(\alpha_{N-1}, \dots, \alpha_1, \alpha_0)$ в графе Γ .

3. Обозначим

$$\lambda_{\alpha_{-N}, \alpha_{-N+1}, \dots, \alpha_{-1}, \alpha_0} = |m_0(G_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha_{-N}} r_{-N+1}^{\alpha_{-N+1}} \dots r_{-1}^{\alpha_{-1}} r_0^{\alpha_0})|^2.$$

Если вершина $(\alpha_{-N}, \alpha_{-N+1}, \dots, \alpha_{-1})$ в графе Γ связана с вершинами $(\alpha_{-N+1}, \alpha_{-N+2}, \dots, \alpha_{-1}, \tilde{\alpha}_0)$, то значения маски определяем так, чтобы

$$\sum_{\tilde{\alpha}_0} \lambda_{\alpha_{-N}, \alpha_{-N+1}, \dots, \alpha_{-1}, \tilde{\alpha}_0} = 1, \quad \lambda_{\alpha_{-N}, \alpha_{-N+1}, \dots, \alpha_{-1}, \alpha_0} = 0, \quad \alpha_0 \notin \{\tilde{\alpha}_0\}. \quad (4)$$

Определим $m_0(G_{-N}^\perp) = 1$, откуда следует, что $\lambda_{0,0,\dots,0} = 1$.

4. Пользуясь равенством (1), по маске можно восстановить преобразование Фурье масштабирующей функции $\hat{\varphi}$. Затем при помощи обратного преобразования Фурье можно получить саму функцию φ .



В работе [11] был использован следующий подход. Можно заметить, что условие (3) ортонормированности системы сдвигов масштабирующей функции $\varphi(x)$ можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \forall \alpha_{-N}, \alpha_{-N+1}, \dots, \alpha_{-1} = \overline{0, p-1}, \\ 1 &= \sum_{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{M-1}=0}^{p-1} |\hat{\varphi}(G_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha_{-N}} \dots r_{-1}^{\alpha_{-1}} r_0^{\alpha_0} \dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}})|^2 = \\ &= \sum_{\alpha_0=0}^{p-1} \lambda_{\alpha_{-N}, \alpha_{-N+1}, \dots, \alpha_0} \sum_{\alpha_1=0}^{p-1} \lambda_{\alpha_{-N+1}, \alpha_{-N+2}, \dots, \alpha_1} \dots \sum_{\alpha_{M-2}=0}^{p-1} \lambda_{\alpha_{M-N-2}, \alpha_{M-N-1}, \dots, \alpha_{M-2}}, \\ & \sum_{\alpha_{M-1}=0}^{p-1} \lambda_{\alpha_{M-N-1}, \alpha_{M-N}, \dots, \alpha_{M-1}} \lambda_{\alpha_{M-N}, \alpha_{M-N+1}, \dots, \alpha_{M-1}, 0} \lambda_{\alpha_{M-N+1}, \alpha_{M-N+2}, \dots, \alpha_{M-1}, 0, 0} \dots \lambda_{\alpha_{M-1}, 0, \dots, 0}. \end{aligned} \quad (5)$$

Задаётся последовательность N -мерных массивов $A^{(n)} = (a_{i_1, i_2, \dots, i_N}^{(n)})_{i_1, i_2, \dots, i_N=0}^{p-1}$ рекуррентно через их элементы:

$$a_{i_1, i_2, \dots, i_N}^{(0)} = \lambda_{i_1, i_2, \dots, i_N, 0} \lambda_{i_2, i_3, \dots, i_N, 0, 0} \dots \lambda_{i_N, 0, \dots, 0}, \quad (6)$$

$$a_{i_1, i_2, \dots, i_N}^{(n)} = \sum_{j=0}^{p-1} \lambda_{i_1, i_2, \dots, i_N, j} a_{i_2, i_3, \dots, i_N, j}^{(n-1)}. \quad (7)$$

Мы будем говорить, что элемент массива $a_{i_1, i_2, \dots, i_N}^{(s)}$ соответствует вершине (i_1, i_2, \dots, i_N) . Пользуясь новыми обозначениями, условие ортонормированности (5) можно переформулировать в следующем виде.

Система сдвигов масштабирующей функции $\varphi(x) \in \mathfrak{D}_M(G_{-N})$ будет ортонормированной тогда и только тогда, когда для любых i_1, i_2, \dots, i_N $a_{i_1, i_2, \dots, i_N}^{(M)} = 1$, иными словами, когда массив $A^{(M)}$ состоит только из единиц.

В работе [11] были доказаны следующие три утверждения.

Лемма 1. В массиве $A^{(0)}$ на местах, соответствующих вершинам уровня $s \leq N$ в дереве \tilde{T} , стоят единицы.

Лемма 2. Пусть по N -валидному дереву T построены дерево \tilde{T} , граф Γ и определены значения маски $m_0(\chi)$ так, как указано в равенствах (4). Пусть $(A^{(n)})_{n=0}^\infty$ — последовательность массивов, определяемая равенствами (6) и (7). Тогда в массиве $A^{(n)}$ элементы, соответствующие вершинам уровня $s \leq N + n$ в дереве \tilde{T} , равны единице.

Теорема 1. Пусть по N -валидному дереву T построены дерево \tilde{T} , граф Γ и определены значения маски $m_0(\chi)$ так, как указано в равенствах (4). Пусть $\tilde{H} = \text{height}(\tilde{T})$. Тогда равенство

$$\hat{\varphi}(\chi) = \prod_{k=0}^\infty m_0(\chi \mathcal{A}^{-k}) \in \mathfrak{D}_{-N}(G_M^\perp)$$

определяет ортогональную масштабирующую функцию $\varphi(x) \in \mathfrak{D}_M(G_{-N})$, причем $M = \tilde{H} - N$.

Таким образом, была решена задача о поиске алгоритма построения масштабирующей функции с компактным носителем и ограниченной частотной полосой. В следующем параграфе будет представлен алгоритм для нахождения масштабирующей функции с неограниченной частотной полосой для случая $N = 1$. Этот алгоритм также будет представлен в терминах графов определенного типа.

3. МАСШТАБИРУЮЩИЕ ФУНКЦИИ С НЕОГРАНИЧЕННОЙ ЧАСТОТНОЙ ПОЛОСОЙ

В этом параграфе мы будем рассматривать такие функции φ , что промежутки постоянства их преобразования Фурье $\hat{\varphi}$ — смежные классы по G_{-1}^\perp , а носитель неограничен. По аналогии с предыдущими обозначениями будем говорить, что $\hat{\varphi} \in \mathfrak{D}_{-1}(G_\infty^\perp)$ и $\varphi(x) \in \mathfrak{D}_\infty(G_{-1})$.



Критерий ортонормированности системы сдвигов по функциям такого класса можно записать как:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{M-1}=0}^{p-1} |\hat{\varphi}(G_{-1}^\perp r_{-1}^{\alpha_{-1}} r_0^{\alpha_0} \dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}})|^2 = 1, \quad \forall \alpha_{-1} = \overline{0, p-1}. \quad (8)$$

Рассмотрим 1-валидное дерево T . Корнем его является 0, а остальные вершины принимают различные значения от 1 до $p-1$.

Например, при $p = 2$ существует только одно 1-валидное дерево (рис. 1, а), а при $p = 3$ — три различных дерева (рис. 1, б).

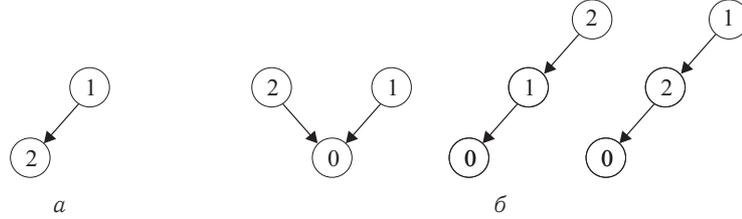


Рис. 1. 1-валидные деревья

При увеличении p их количество быстро возрастает.

Найдем в 1-валидном дереве путь, удовлетворяющий следующим условиям:

T1. Он не содержит вершину 0.

T2. Полустепень захода всех вершин пути не более чем 1, т. е. в каждую вершину «входит» не более чем одна дуга.

T3. Путь содержит лист.

Такой путь будем называть путем T_h , где $h \geq 0$ — длина пути. В случае $h = 0$ будем считать, что путь состоит только из листа.

Имея путь T_h , соединим последнюю вершину пути со входящим в него листом. Получим граф Γ_h , содержащий простой контур, который мы также будем обозначать T_h .

Построить по такому контуру функцию $\hat{\varphi}$ можно, воспользовавшись третьим пунктом алгоритма 1.

Для удобства доказательства последующей теоремы мы введем некоторые обозначения по аналогии с работой [11] (см. формулу (5)). Сначала заметим: условие (8) о том, что система сдвигов по функции $\varphi(x) \in \mathcal{D}_\infty(G_{-1})$ является ортонормированной, можно переписать в следующем виде:

$$1 = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{M-1}=0}^{p-1} |\hat{\varphi}(G_{-1}^\perp r_{-1}^{\alpha_{-1}} r_0^{\alpha_0} \dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}})|^2 = \\ = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{\alpha_0=0}^{p-1} \lambda_{\alpha_{-1}, \alpha_0} \sum_{\alpha_1=0}^{p-1} \lambda_{\alpha_0, \alpha_1} \dots \sum_{\alpha_{M-2}=0}^{p-1} \lambda_{\alpha_{M-3}, \alpha_{M-2}} \sum_{\alpha_{M-1}=0}^{p-1} \lambda_{\alpha_{M-2}, \alpha_{M-1}} \lambda_{\alpha_{M-1}, 0}, \quad \forall \alpha_{-1} = \overline{0, p-1}.$$

Теперь зададим последовательность одномерных массивов $A^{(n)} = (a_i^{(n)})_{i=0}^{p-1}$ рекуррентно через их элементы:

$$a_i^{(0)} = \lambda_{i,0}, \quad (9)$$

$$a_i^{(n)} = \sum_{j=0}^{p-1} \lambda_{i,j} a_j^{(n-1)}. \quad (10)$$

Мы будем говорить, что элемент массива $a_i^{(s)}$ соответствует вершине i .

Если представить массивы $A^{(n)}$ в виде столбцов, то можно заметить, что в данном случае при $N = 1$ рекуррентные соотношения (10) соответствуют умножению матрицы $\Lambda = (\lambda_{i_1, i_2})_{i_1, i_2=0}^{p-1}$ на столбец $A^{(n-1)}$ и могут быть переписаны в виде $A^{(n)} = \Lambda A^{(n-1)}$.

Пользуясь новыми обозначениями, условие ортонормированности (8) можно переформулировать в следующем виде.

Система сдвигов функции $\varphi(x) \in \mathcal{D}_\infty(G_{-1})$ будет ортонормированной тогда и только тогда, когда $\lim_{M \rightarrow \infty} a_i^{(M)} = 1$ для всех i , иными словами, когда предел каждой компоненты массива $A^{(M)}$ равен единице.



Лемма 3. Предел каждой компоненты массива $A^{(M)}$, построенного вышеописанным образом, равен единице.

Доказательство. Пусть дано 1-валидное дерево T . Выберем путь T_h , удовлетворяющий условиям Т1–Т3 и построим граф Γ_h , связав последнюю вершину этого пути с первой. Теперь перенумеруем вершины, пользуясь обходом в ширину поддерева графа Γ_h , которое получается исключением из него вершин и дуг контура T_h . Таким образом, сначала будем иметь корень — вершину 0, затем — вершины первого уровня, затем — вершины, связанные с первой из вершин первого уровня, затем — вершины, связанные со второй из вершин второго уровня, и т. д. После этого нумеруем вершины пути T_h в порядке от вершины меньшего уровня до листа. Они будут иметь номера от $p - h - 1$ до $p - 1$. Полученная по алгоритму 1 матрица значений маски будет иметь вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \tilde{\Lambda} & 0 \\ \tilde{B}^1 & \tilde{B}^2 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\tilde{\Lambda}$ — матрица размерности $(p - h - 1) \times (p - h - 1)$, состоящая из нулей и единиц, причем в каждой строке ровно одна единица:

$$\tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Она описывает связи в поддереве графа Γ_h , которое получается исключением из него контура T_h .

Матрица \tilde{B}^1 имеет размерность $(h + 1) \times (p - h - 1)$ и описывает связь контура с остальной частью графа. В ней только один ненулевой элемент. Если i — это номер (в новой нумерации) той вершины, с которой связан путь T_h , то $\tilde{b}_{0,i}^1 = \beta_1$, а остальные элементы — нули.

Матрица \tilde{B}^2 имеет размерность $(h + 1) \times (h + 1)$ и следующий вид:

$$\tilde{B}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_2 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Она описывает связи между элементами внутри контура. Заметим, что исходя из пункта 3 алгоритма 1 $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$, $\beta_1 + \beta_2 = 1$.

Нулевой столбец Λ_0 матрицы Λ будет являться вектором $A^{(0)} = \Lambda_0$.

Представим столбец $A^{(M)}$ в виде

$$A^{(M)} = \begin{pmatrix} \tilde{A}^{(M)} \\ \tilde{B}^{(M)} \end{pmatrix}.$$

Здесь длины $\tilde{A}^{(M)}$ и $\tilde{B}^{(M)}$ равны $p - h - 1$ и $h + 1$ соответственно. Тогда

$$A^{(M+1)} = \Lambda A^{(M)} = \begin{pmatrix} \tilde{\Lambda} & 0 \\ \tilde{B}^1 & \tilde{B}^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{A}^{(M)} \\ \tilde{B}^{(M)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\Lambda} \cdot \tilde{A}^{(M)} \\ \tilde{B}^1 \cdot \tilde{A}^{(M)} + \tilde{B}^2 \cdot \tilde{B}^{(M)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A}^{(M+1)} \\ \tilde{B}^{(M+1)} \end{pmatrix}.$$



Матрица \tilde{A} и столбец $\tilde{A}^{(0)}$, а также все столбцы $\tilde{A}^{(M)}$ соответствуют той части графа, в которой контура нет, и видно, что ни матрицы, ни столбцы \tilde{B} на них никак не влияют. Значит, применима лемма 2 — на каждом месте i столбца $\tilde{A}^{(M)}$ единица появится на шаге $M = l - 1$, где l — уровень вершины i . Следовательно, при $M \rightarrow \infty$ единица появится на всех местах этого столбца.

Рассмотрим теперь столбец $\tilde{B}^{(M)}$. Пусть вершина низшего уровня в пути $T_h = ((p - 1) \rightarrow (p - 2) \rightarrow \dots \rightarrow (p - h - 1))$ имела уровень $s + 1$, а вершина $p - h - 1$ связана с вершиной i , очевидно, уровня s . Пусть $s \geq 2$. Тогда $a_i^{(s-1)} = 1$ по лемме 2, т. е. на $(s - 1)$ -м шаге, на i -м месте в массиве $A^{(s-1)}$ стоит единица. Во время предыдущих шагов на этом месте стоит ноль, следовательно, и подстолбец $\tilde{B}^{(s-1)}$ состоит только из нулей.

Докажем, что на шаге $s - 1 + n = s - 1 + k_1(h + 1) + k_2$, $k_1 \in \mathbb{Z}$, $k_2 = \overline{0, h}$ столбец $\tilde{B}^{(n+s)}$ имеет вид

$$\tilde{B}^{(n+s)} = \underbrace{(a_{k_1+1}, a_{k_1+1}, \dots, a_{k_1+1})}_{k_2 \text{ раз}}, a_{k_1}, \dots, a_{k_1})^T, \tag{11}$$

где последовательность a_k определяется формулами:

$$a_0 = 0, \quad a_{k+1} = \beta_1 + \beta_2 a_k. \tag{12}$$

Доказательство проведем по индукции.

1. Сначала пусть $n = 1$, что означает $k_1 = 0$, $k_2 = 1$. Уже было замечено, что, с одной стороны, $a_i^{(s)} = 1$, а с другой, $\tilde{b}_{0,i}^1 = \beta_1$, а остальные элементы \tilde{B}^1 равны нулю, следовательно,

$$\tilde{B}^1 \cdot \tilde{A}^{(s)} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \beta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0^{(s)} \\ \vdots \\ a_{i-1}^{(s)} \\ 1 \\ a_{i+1}^{(s)} \\ \vdots \\ a_{p-h}^{(s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Более того, этот же результат, очевидно, будет верен и для любого шага $s - 1 + n$, где s определено ранее, а n — произвольное натуральное число, так как единица останется на том же месте, а остальные элементы свой вклад не вносят.

Столбец $\tilde{B}^{(s)}$ состоит только из нулей, следовательно, $\tilde{B}^2 \cdot \tilde{B}^{(s)}$ — также нулевая матрица. Имеем

$$\tilde{B}^{(s+1)} = \tilde{B}^1 \tilde{A}^{(s)} + \tilde{B}^2 \tilde{B}^{(s)} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \\ \vdots \\ a_0 \end{pmatrix},$$

что доказывает базу индукции.

2. Пусть теперь равенство (11) выполняется для $n = k$. Докажем, что оно верно для $n = k + 1$.

Рассмотрим два случая.

2.1. Пусть $k = k_1(h + 1)$, $k_2 = 0$. Значит, на шаге k имеем

$$\tilde{B}^{(s+k)} = \begin{pmatrix} a_{k_1} \\ a_{k_1} \\ \vdots \\ a_{k_1} \end{pmatrix}; \quad \tilde{B}^1 \cdot \tilde{A}^{(s+k)} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$



Можно заметить, что при умножении на вектор матрицы

$$\tilde{B}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_2 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

происходит циклическая перестановка элементов вектора с последующим умножением первой компоненты на β_2 . Тогда получаем

$$\tilde{B}^{(s+k+1)} = \tilde{B}^1 \tilde{A}^{(s+k)} + \tilde{B}^2 \tilde{B}^{(s+k)} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_2 a_{k_1} \\ a_{k_1} \\ \vdots \\ a_{k_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{k_1+1} \\ a_{k_1} \\ \vdots \\ a_{k_1} \end{pmatrix}.$$

2.2. Пусть теперь $k = k_1(h + 1) + k_2$, $k_2 = \overline{1, h}$. Имеем

$$\tilde{B}^{(k+s)} = \underbrace{(a_{k_1+1}, a_{k_1+1}, \dots, a_{k_1+1})}_{k_2 \text{ раз}}, a_{k_1}, \dots, a_{k_1}^T.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{B}^{(k+s+1)} = \tilde{B}^1 \tilde{A}^{(s+k)} + \tilde{B}^2 \tilde{B}^{(s+k)} &= \begin{pmatrix} \beta_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_2 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{k_1+1} \\ a_{k_1+1} \\ \vdots \\ a_{k_1+1} \\ a_{k_1} \\ a_{k_1} \\ \vdots \\ a_{k_1} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \beta_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_2 a_{k_1} \\ a_{k_1+1} \\ \vdots \\ a_{k_1+1} \\ a_{k_1} \\ a_{k_1} \\ \vdots \\ a_{k_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{k_1+1} \\ a_{k_1+1} \\ \vdots \\ a_{k_1+1} \\ a_{k_1} \\ a_{k_1} \\ \vdots \\ a_{k_1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Индукция доказана, представление (11) верно.

Исследуем теперь последовательность (12). Нетрудно проверить, что последовательность $a_{k+1} = \beta_1 + \beta_2 a_k$ является монотонно возрастающей и ограниченной сверху при $\beta_1 + \beta_2 = 1$, $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$, следовательно, имеет конечный предел. Обозначим его a . Для нахождения предела положим в (12) $k \rightarrow \infty$. Получим

$$a = \beta_1 + (1 - \beta_1)a, \quad a = 1.$$

Отсюда имеем

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \tilde{B}^{(M)} = (1, 1, \dots, 1)^T.$$



Учитывая, что также по лемме $2 \lim_{M \rightarrow \infty} \tilde{A}^{(M)} = (1, 1, \dots, 1)^T$, получаем

$$\lim_{M \rightarrow \infty} A^{(M)} = (1, 1, \dots, 1)^T.$$

Таким образом, утверждение леммы справедливо при $s \geq 2$.

Напомним, что вершина низшего уровня в пути $T_h = ((p-1) \rightarrow (p-2) \rightarrow \dots \rightarrow (p-h-1))$ имела уровень $s+1$, а вершина $p-h-1$ связана с вершиной i , очевидно, уровня s . Пусть теперь $s=0$ или $s=1$. В этом случае уже на нулевом шаге в столбце $A^{(0)}$ на i -м месте стоит 1, что упрощает доказательство. Результат, аналогичный результату при $s \geq 2$, можно получить, проведя подобную индукцию для шагов вида $n = k_1(h+1) + k_2$, т. е. в сравнении со случаем $s \geq 2$ пропадает слагаемое $s-1$. В остальном доказательство абсолютно идентичное. Лемма доказана полностью. \square

Замечание. Стоит заметить, что перенумерация вершин, использованная для удобства построения матрицы Λ и реализации блочного матричного умножения, не делает доказательство менее общим. Перенумерация влечет за собой перестановку элементов в матрице, соответствующей графу Γ_h , и аналогичную перестановку элементов в столбцах $A^{(n)}$. Соответственно элементы будут появляться на других местах, но сам вид элементов не изменится.

Для иллюстрации этого процесса рассмотрим следующий пример.

Пример. Рассмотрим дерево $p=7$ (рис. 2, а). Выберем путь $T_1 = (6 \rightarrow 1)$ и соединим последнюю вершину с первой. Получим граф Γ_1 (рис. 2, б).

Следуя схеме доказательства теоремы, необходимо перенумеровать вершины. Сначала рассмотрим поддереву графа Γ_1 , получающуюся исключением из него контура T_1 . Перенумеруем вершины соответственно обходу в ширину, как показано на рис. 2, в.

После этого занумеруем вершины, входящие в контур, и получим граф, изображенный на рис. 2, г.

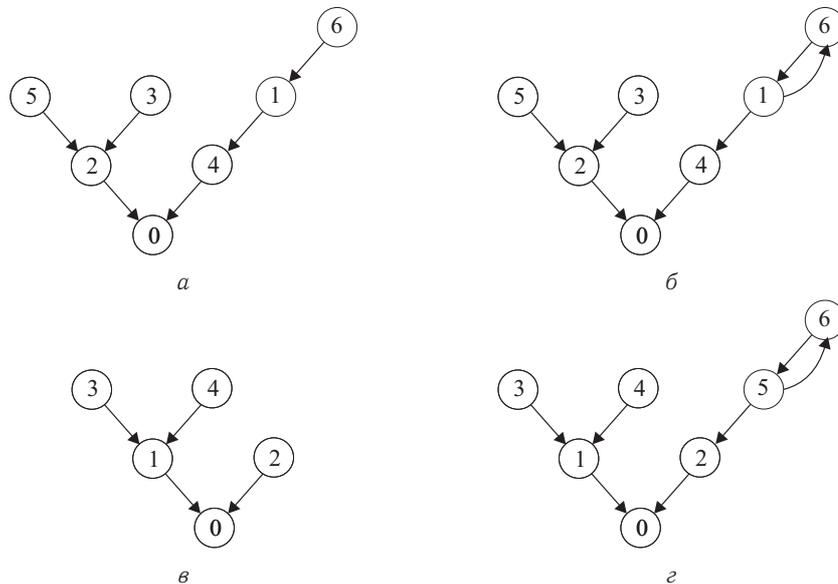


Рис. 2. Построение графа Γ_1 и перенумерация его вершин

Его матрица Λ имеет вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_1 & 0 & 0 & 0 & \beta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$



В этом случае

$$\tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}^2 = \begin{pmatrix} 0 & \beta_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Далее выпишем несколько первых элементов последовательности столбцов $A^{(n)}$, определяемых по формулам (9), (10). Иными словами, $A^{(0)} = \Lambda_0$, где Λ_0 — нулевой столбец матрицы Λ , а $A^{(n)} = \Lambda A^{(n-1)}$. Последовательность получается следующая:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \beta_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \beta_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \beta_1 + \beta_1\beta_2 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \beta_1 + \beta_1\beta_2 \\ \beta_1 + \beta_1\beta_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \beta_1 + \beta_2(\beta_1 + \beta_1\beta_2) \\ \beta_1 + \beta_1\beta_2 \end{pmatrix}, \dots \quad (13)$$

Так как s — уровень вершины, с которой связан контур, — равен 1, то уже на первом шаге в массиве появляются элементы последовательности a_n , причем появляются они на последних местах.

Если же рассмотреть граф Γ_h до перенумерации и построить его матрицу Λ , то получим

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_1 & 0 & \beta_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Построенная по такой матрице последовательность $A^{(n)}$ будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \beta_1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \beta_1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \beta_1 + \beta_2\beta_1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \beta_1 + \beta_2\beta_1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \beta_1 + \beta_2\beta_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \beta_1 + \beta_2(\beta_1 + \beta_2\beta_1) \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \beta_1 + \beta_2\beta_1 \end{pmatrix}, \dots \quad (14)$$

Можно заметить, что в этом случае не изменился вид элементов, а изменился только их порядок. Следовательно, и в случае (13), и в случае (14) в пределе получим столбец из единиц. На этом мы заканчиваем пример.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 2. Пусть по 1-валидному дереву T построен граф Γ_h и определены значения маски $m_0(\chi)$ так, как указано в пункте 3 алгоритма 1. Тогда равенство

$$\hat{\varphi}(\chi) = \prod_{k=0}^{\infty} m_0(\chi \mathcal{A}^{-k}) \in \mathfrak{D}_{-1}(G_{\infty}^{\perp})$$

определяет ортогональную масштабирующую функцию $\varphi(x) \in \mathfrak{D}_{\infty}(G_{-1})$.

Доказательство этого факта очевидным образом вытекает из леммы 3.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00152-а).



Библиографический список

1. Протасов В. Ю., Фарков Ю. А. Диадические вейвлеты и масштабирующие функции на полупрямой // Матем. сб. 2006. Т. 197, № 10. С. 129–160. DOI: 10.4213/sm1126.
2. Фарков Ю. А. Биортогональные диадические вейвлеты на полупрямой // УМН. 2007. Т. 62, № 6(378). С. 189–190. DOI: 10.4213/rm8541.
3. Протасов В. Ю. Аппроксимация диадическими всплесками // Матем. сб. 2007. Т. 198, № 11. С. 135–152. DOI: 10.4213/sm1981.
4. Фарков Ю. А. Ортогональные вейвлеты с компактными носителями на локально компактных Абелевых группах // Изв. РАН. Сер. матем. 2005. Т. 69, вып. 3. С. 193–220. DOI: 10.4213/im644.
5. Фарков Ю. А. Ортогональные вейвлеты на прямых произведениях циклических групп // Матем. заметки. 2007. Т. 82, вып. 6. С. 934–952. DOI: 10.4213/mzm4181.
6. Лукомский С. Ф. Кратномасштабный анализ на нульмерных группах и всплесковые базисы // Матем. сб. 2010. Т. 201, № 5. С. 41–65. DOI: 10.4213/sm7580.
7. Lukomskii S. F. Step Refinable Functions and Orthogonal MRA on Vilenkin Groups // J. Fourier Anal. Appl. 2014. Vol. 20, iss. 1. P. 42–65. DOI: 10.1007/s00041-013-9301-6.
8. Лукомский С. Ф. Кратномасштабный анализ Рисса на группах Виленкина // Докл. АН. 2014. Т. 457, № 1. С. 24–27. DOI: 10.7868/S0869565214190086.
9. Лукомский С. Ф. Кратномасштабный анализ Рисса на нульмерных группах // Изв. РАН. Сер. матем. 2015. Т. 79, вып. 1. С. 153–184. DOI: 10.4213/im8181.
10. Lukomskii S. F., Berdnikov G. S. N-Valid trees in wavelet theory on Vilenkin groups // Int. J. Wavelets Multiresolut Inf. Process. 2015. Vol. 13, iss. 5, 1550037. 23 p. DOI: 10.1142/S021969131550037X.
11. Бердников Г. С., Лукомский С. Ф., Крусс Ю. С. Об ортогональности системы сдвигов масштабирующей функции на группах Виленкина // Матем. заметки. 2015. Т. 98, № 2. С. 310–313. DOI: 10.4213/mzm10664.

Образец для цитирования:

Бердников Г. С. Графы с контурами в кратномасштабном анализе на группах Виленкина // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 4. С. 377–388. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-377-388.

Graphs with Contours in Multiresolution Analysis on Vilenkin Groups

G. S. Berdnikov

Gleb S. Berdnikov, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., 410012, Saratov, Russia, evrintelligent@gmail.com

The aim of this article is to study the problem of constructing multiresolution analysis on Vilenkin group. Previous papers by S. F. Lukomskii, Iu. S. Kruss and the author present an algorithm for constructing scaling functions φ with compact support, Fourier transform of which also has compact support. The description of such algorithm is tightly connected with directed graphs of special structure, which are constructed with the help of so-called N -valid trees. One of the special properties of these graphs is the absence of directed cycles — contours. This property allows admits the construction of scaling functions φ , Fourier transform of which has compact support. This approach has a number of advantages. Firstly, this algorithm does not include exhaustive search in contrast to algorithm using the notion of "blocked sets", which is described in the papers by Yu. A. Farkov. Secondly, such approach is conveniently generalized to the case of local fields of positive characteristic, which was done in the papers by Kruss Iu. S. The contents of the current paper represents the first step of using digraphs with contours for similar purpose. Taking further the ideas of previous research we construct digraph with only one simple contour using 1-valid tree. It appears that such graph also generates a scaling function φ . However, since the contour appears, such scaling function's Fourier transform does not have compact support.

Key words: multiresolution analysis, Vilenkin group, scaling function, graphs, wavelet analysis.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 16-01-00152-a).

References

1. Protasov V. Yu., Farkov Yu. A. Dyadic wavelets and refinable functions on a half-line. *Sb. Math.*, 2006, vol. 197, no. 10, pp. 1529–1558. DOI: 10.1070/SM2006v197n10ABEH003811.
2. Farkov Yu. A. Biorthogonal dyadic wavelets on a half-line. *Russian Math. Surveys*, 2007, vol. 62, no. 6, pp. 1197–1198. DOI: 10.1070/RM2007v062n06ABEH004494.
3. Protasov V. Yu. Approximation by dyadic wavelets. *Sb. Math.*, 2007, vol. 198, no. 11, pp. 1665–1681. DOI: 10.1070/SM2007v198n11ABEH003900.
4. Farkov Yu. A. Orthogonal wavelets with compact



- support on locally compact Abelian groups. *Izv. Math.*, 2005, vol. 69, iss. 3, pp. 623–650. DOI: 10.1070/IM2005v069n03ABEH000540.
5. Farkov Yu. A. Orthogonal wavelets on direct products of cyclic groups. *Math. Notes*, 2007, vol. 82, iss. 5–6, pp. 843–859. DOI: 10.1134/S0001434607110296.
 6. Lukomskii S. F. Multiresolution analysis on zero-dimensional Abelian groups and wavelets bases. *Sb. Math.*, 2010, vol. 201, no. 5, pp. 669–691. DOI: 10.1070/SM2010v201n05ABEH004088.
 7. Lukomskii S. F. Step Refinable Functions and Orthogonal MRA on Vilenkin Groups. *J. Fourier Anal. Appl.*, 2014, vol. 20, iss. 1, pp. 42–65. DOI: 10.1007/s00041-013-9301-6.
 8. Lukomskii S. F. Riesz Multiresolution Analysis on Vilenkin Groups. *Doklady Math.*, 2014, vol. 90, no. 1, pp. 412–415. DOI: 10.1134/S1064562414040061
 9. Lukomskii S. F. Riesz multiresolution analysis on zero-dimensional groups. *Izv. Math.*, 2015, vol. 79, iss. 1, pp. 145–176. DOI: 10.1070/IM2015v079n01ABEH002737.
 10. Lukomskii S. F., Berdnikov G. S. N-Valid trees in wavelet theory on Vilenkin groups. *Int. J. Wavelets Multiresolut Inf. Process.*, 2015, vol. 13, iss. 5, 1550037. 23 p. DOI: 10.1142/S021969131550037X.
 11. Berdnikov G. S., Lukomskii S. F., Kruss Yu. S. On orthogonal systems of shifts of scaling function on local fields of positive characteristic. *Math. Notes*, 2015, vol. 98, iss. 2, pp. 339–342. DOI: 10.1134/S000143461507038X.

Please cite this article in press as:

Berdnikov G. S. Graphs with Contours in Multiresolution Analysis on Vilenkin Groups. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 4, pp. 377–388 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-377-388.

УДК 517.52

РЯДЫ ФУРЬЕ ПО ПОЛИНОМАМ МЕЙКСНЕРА, ОРТОГОНАЛЬНЫМ ПО СОБОЛЕВУ

Р. М. Гаджимирзаев

Гаджимирзаев Рамис Махмудович, младший научный сотрудник отдела математики и информатики, Дагестанский научный центр РАН, Махачкала, ramis3004@gmail.com

В настоящей статье рассматривается система дискретных функций $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$, которая является ортонормированной относительно скалярного произведения типа Соболева следующего вида:

$$\langle f, g \rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} \Delta^{\nu} f(-r) \Delta^{\nu} g(-r) + \sum_{t \in \Omega_r} \Delta^r f(t) \Delta^r g(t) \mu(t),$$

где $\mu(t) = q^t(1-q)$, $\Omega_r = \{-r, -r+1, \dots, 0, 1, \dots\}$, $0 < q < 1$. Показано, что сдвинутые классические полиномы Мейкснера $\{M_k^{-r}(x+r)\}_{k=r}^{\infty}$ вместе с функциями вида $\left\{\frac{(x+r)^{[k]}}{k!}\right\}_{k=0}^{r-1}$ образуют полную ортогональную систему в пространстве $l_{2,\mu}(\Omega_r)$, в котором введено указанное скалярное произведение $\langle f, g \rangle$. Установлено, что ряд Фурье по полиномам Мейкснера $\{a_k M_k^{-r}(x+r)\}_{k=r}^{\infty}$ (a_k — нормирующие множители), ортонормированным в смысле Соболева, является частным случаем смешанных рядов по полиномам Мейкснера. Кроме того, введен новый специальный ряд по ортогональным полиномам Мейкснера $M_k^{\alpha}(x)$ с $\alpha > -1$, который в случае $\alpha = r$ совпадает с соответствующим смешанным рядом по полиномам Мейкснера $M_k^0(x)$ и рядом Фурье по системе полиномов Мейкснера $\{a_k M_k^{-r}(x+r)\}_{k=r}^{\infty}$, ортонормированным в смысле Соболева.

Ключевые слова: полиномы Мейкснера, смешанный ряд, специальный ряд, скалярное произведение типа Соболева, полиномы, ортогональные по Соболеву.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-388-395

ВВЕДЕНИЕ

Теория полиномов, ортогональных относительно скалярных произведений типа Соболева (полиномы, ортогональные по Соболеву), получила развитие в работах многих авторов (см. [1–5] и цитированную там литературу). Были достаточно подробно исследованы различные особенности полиномов,



ортогональных по Соболеву, которыми не обладают обычные полиномы, ортогональные на интервале (или на сетке) относительно положительных весов. В частности, может случиться так, что полиномы, ортогональные по Соболеву на заданном интервале (a, b) , могут иметь нули, совпадающие с одним или обоими концами этого интервала. Это свойство полиномов, ортогональных по Соболеву имеет важное значение для некоторых приложений, для которых требуется, чтобы значения частичных сумм ряда Фурье функции $f(x)$ по рассматриваемой системе ортогональных полиномов совпали на одном из концов (или на обоих концах) отрезка $[a, b]$ со значениями функции $f(x)$ в указанных точках. Заметим, что обычные ортогональные с положительным на (a, b) весом полиномы этим важным свойством не обладают. При этом вопросы, связанные с поточечной и равномерной сходимостью рядов Фурье по полиномам, ортогональным по Соболеву, остаются мало изученными. Это, в первую очередь, связано с тем, что асимптотические свойства полиномов, ортогональных по Соболеву, исследованы только в отдельных частных случаях. В связи с этой проблемой отметим работу [6], в которой, используя идеи и технику А. А. Гончара [7], исследована задача о сравнительной асимптотике полиномов, ортогональных относительно скалярного произведения типа Соболева с дискретными массами.

С другой стороны, отметим, что в работах И. И. Шарапудинова [8–12] были введены так называемые смешанные ряды по классическим ортогональным полиномам, частичные суммы которых также обладают свойством совпадения их значений на границе области ортогональности со значениями исходной функции. В работах [8–12] были подробно исследованы аппроксимативные свойства смешанных рядов для функций из различных пространств. В частности, было показано, что частичные суммы смешанных рядов по классическим ортогональным полиномам, в отличие от сумм Фурье по этим же полиномам, успешно могут быть использованы в задачах, в которых требуется одновременно приближать исходную функцию и ее несколько разностных производных.

В настоящей статье показано, что если $r \geq 0$, то сдвинутые классические полиномы Мейкснера $\{a_k M_k^{-r}(x+r)\}_{k=r}^{\infty}$ образуют ортонормированную систему в пространстве $l_{2,\mu}(\Omega_r)$, состоящем из дискретных функций f, g, \dots , заданных на сетке $\Omega_r = \{-r, -r+1, \dots, 0, 1, \dots\}$, в котором введено скалярное произведение типа Соболева следующего вида:

$$\langle f, g \rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} \Delta^{\nu} f(-r) \Delta^{\nu} g(-r) + \sum_{t \in \Omega_r} \Delta^r f(t) \Delta^r g(t) \mu(t), \quad (1)$$

где $\mu(t) = q^t(1-q)$ — весовая функция, $0 < q < 1$. Кроме того, показано, что если к системе $\{a_k M_k^{-r}(x+r)\}_{k=r}^{\infty}$ присоединить конечный набор степеней $\left\{ \frac{(x+r)^{[k]}}{k!} \right\}_{k=0}^{r-1}$, то мы получим полную в $l_{2,\mu}(\Omega_r)$, ортонормированную относительно скалярного произведения (1) систему полиномов $\Psi = \left\{ \frac{(x+r)^{[k]}}{k!} \right\}_{k=0}^{r-1} \cup \{a_k M_k^{-r}(x+r)\}_{k=r}^{\infty}$. Показано, что ряд Фурье по системе Ψ представляет собой смешанный ряд по полиномам Мейкснера $M_k^{\alpha}(x)$ с $\alpha = 0$, в котором присутствуют только классические полиномы Мейкснера. Это, в свою очередь, позволяет использовать при исследовании аппроксимативных свойств ряда Фурье по системе Ψ методы, разработанные в работах [8, 13] при решении аналогичной задачи для смешанных рядов по полиномам Мейкснера. Кроме того, в параграфе 3 введен новый специальный ряд по ортогональным полиномам Мейкснера $M_k^{\alpha}(x)$ с $\alpha > -1$, который в случае $\alpha = r$ совпадает с рядом Фурье по системе Ψ и смешанным рядом по полиномам Мейкснера $M_k^0(x)$.

Прежде чем перейти к формулировке основных результатов, приведем некоторые сведения о полиномах Мейкснера $M_k^{\alpha}(x)$.

1. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О ПОЛИНОМАХ МЕЙКСНЕРА

Для $q \neq 0$ и произвольного α полином Мейкснера порядка n можно определить с помощью равенства

$$M_n^{\alpha}(x) = M_n^{\alpha}(x, q) = \frac{q^{-n}}{n! \rho(x)} \Delta^n \left\{ \rho(x) x^{[n]} \right\}, \quad (2)$$

где

$$\rho = \rho(x) = \rho(x; \alpha, q) = q^x \frac{\Gamma(x + \alpha + 1)}{\Gamma(x + 1)} (1 - q)^{\alpha + 1}, \quad x^{[n]} = x(x - 1) \dots (x - n + 1).$$



Хорошо известны следующие свойства полиномов Мейкснера [8]:

1° *Ортогональность*:

$$\sum_{x \in \Omega_0} M_k^\alpha(x) M_n^\alpha(x) \rho(x) = \delta_{nk} h_n^\alpha(q) = \delta_{nk} \binom{n+\alpha}{n} q^{-n} \Gamma(\alpha+1), 0 < q < 1, \alpha > -1, \quad (3)$$

где δ_{nk} — символ Кронекера. Из (3) следует, что ортонормированные полиномы Мейкснера имеют вид

$$m_n^\alpha(x) = \{h_n^\alpha(q)\}^{-\frac{1}{2}} M_n^\alpha(x).$$

В частности, при $\alpha = 0$

$$\sum_{x \in \Omega_0} M_k^0(x) M_n^0(x) \rho(x; 0, q) = \delta_{nk} h_n^0(q); \quad (4)$$

2° *Явный вид*:

$$M_n^\alpha(x, q) = \binom{n+\alpha}{n} \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (-x)_k}{(\alpha+1)_k k!} \left(1 - \frac{1}{q}\right)^k;$$

3° *Конечные разности*:

$$\begin{aligned} \Delta M_n^\alpha(x) &= M_n^\alpha(x+1) - M_n^\alpha(x) = \frac{q-1}{q} M_{n-1}^{\alpha+1}(x), \\ \Delta^r M_n^\alpha(x) &= \left(\frac{q-1}{q}\right)^r M_{n-r}^{\alpha+r}(x); \end{aligned} \quad (5)$$

4° *Формула Кристоффеля – Дарбу*:

$$\mathcal{H}_{q,n}^\alpha(x, y) = \sum_{k=0}^n \frac{q^k k!}{\Gamma(k+\alpha+1)} M_k^\alpha(x) M_k^\alpha(y) = \frac{(n+1)! q^{n+1}}{\Gamma(n+\alpha+1)(q-1)} \frac{M_{n+1}^\alpha(x) M_n^\alpha(y) - M_n^\alpha(x) M_{n+1}^\alpha(y)}{x-y};$$

5° *Рекуррентные соотношения*:

$$\begin{aligned} M_{n+1}^\alpha(x) - M_n^\alpha(x) &= M_{n+1}^{\alpha-1}(x), \\ (n+1)q M_{n+1}^\alpha(x) &= [n(q+1) + q(\alpha+1) + (q-1)x] M_n^\alpha(x) - (n+\alpha) M_{n-1}^\alpha(x), \end{aligned} \quad (6)$$

$$M_{n-r}^{-r}(x) = \frac{(n-r)!}{n!} \left(\frac{1}{q} - 1\right)^r (-x)_r M_{n-r}^r(x-r), \quad r - \text{целое}, \quad 1 \leq r \leq n. \quad (7)$$

2. СМЕШАННЫЕ РЯДЫ ПО ПОЛИНОМАМ МЕЙКСНЕРА

Смешанные ряды по полиномам Мейкснера впервые были введены в работах [8, 13] как альтернативный рядам Фурье по тем же полиномам аппарат для одновременного приближения функций и их разностных производных. Напомним определение этих рядов, следуя работе [8]. Пусть $0 < q < 1$, $\alpha > -1$, $0 \leq r$ — целое, $l_{2,\rho}(\Omega_r)$ — пространство дискретных функций $g(x)$, заданных на Ω_r и таких, что $\sum_{\Omega_0} g^2(x) \rho(x) < \infty$. Рассмотрим дискретную функцию $d(x) \in l_{2,\rho}(\Omega_r)$. Из того, что $d(x) \in l_{2,\rho}(\Omega_r)$, очевидно, следует, что функция $\Delta^r \bar{d}(x) = \Delta^r d(x-r)$ принадлежит пространству $l_{2,\rho}(\Omega_0)$, поэтому мы можем определить коэффициенты Фурье – Мейкснера этой функции

$$d_{r,k}^\alpha = \sum_{t \in \Omega_0} \Delta^r \bar{d}(t) m_k^\alpha(t, q) \rho(t). \quad (8)$$

В [8] доказана следующая

Теорема 1. Пусть $x \in \Omega_r$, $0 < q < 1$, $\alpha > -1$, $\rho = \rho(x) = \rho(x; \alpha, q)$, $d = d(x) \in l_{2,\rho}$, $\bar{d}(x) = d(x-r)$.

Тогда

$$\bar{d}(x) = \sum_{\nu=0}^{r-1} \gamma_{r,\nu} \frac{x^{[\nu]}}{\nu!} + \left(\frac{q}{q-1}\right)^r \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_{r,k}^\alpha}{\{h_k^\alpha(q)\}^{1/2}} M_{k+r}^{\alpha-r}(x, q), \quad (9)$$

где

$$\gamma_{r,\nu} = \left[\Delta^\nu \bar{d}(0) - \frac{(q/(q-1))^{r-\nu}}{\Gamma(\nu-r+\alpha+1)} \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_{r,k}^\alpha}{\{h_k^\alpha(q)\}^{1/2}} \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(k+r-\nu+1)} \right].$$



Нам понадобится случай $\alpha = 0$. При этом, если $0 \leq \nu \leq r - 1$, то $\frac{1}{\Gamma(\nu - r + \alpha + 1)} = 0$, поэтому $\gamma_{r,\nu} = \Delta^\nu \bar{d}(0)$.

Имеет место следующее следствие из теоремы 1.

Следствие 1. Пусть $x \in \Omega_r$, $0 < q < 1$, $\rho = \rho(x) = \rho(x; 0, q)$, $d(x) \in l_{2,\rho}(\Omega_r)$. Тогда

$$d(x) = \sum_{\nu=0}^{r-1} \Delta^\nu d(-r) \frac{(x+r)^{[\nu]}}{\nu!} + (x+r)^{[r]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_{r,k}^0}{(k+1)_r} \frac{M_k^r(x, q)}{\{h_k^0(q)\}^{1/2}}. \quad (10)$$

Правые части равенств (9) и (10) называются *смешанными рядами* по полиномам Мейкснера.

3. СПЕЦИАЛЬНЫЕ РЯДЫ ПО ПОЛИНОМАМ МЕЙКСНЕРА

В работе [14] были введены специальные ряды по классическим полиномам Лагерра и исследованы аппроксимативные свойства их частичных сумм. В настоящей работе мы введем специальные ряды по полиномам Мейкснера, которые являются дискретным аналогом специальных рядов по полиномам Лагерра. Следует отметить, что смешанный ряд (10) по полиномам Мейкснера $M_k^0(x)$ является частным случаем специальных рядов по полиномам Мейкснера.

Пусть $d(x) \in l_{2,\rho}(\Omega_r)$,

$$P_{r-1}(x) = P_{r-1}(d, x) = \sum_{\nu=0}^{r-1} \Delta^\nu d(-r) \frac{(x+r)^{[\nu]}}{\nu!}, \quad (11)$$

$$d_r(x) = \frac{d(x) - P_{r-1}(x)}{(x+r)^{[r]}}. \quad (12)$$

Предположим, что для функции $d_r(x)$, определенной равенством (12), существуют коэффициенты Фурье – Мейкснера:

$$\hat{d}_{r,k}^\alpha = \sum_{t \in \Omega_0} d_r(t) \rho(t) m_k^\alpha(t) = \sum_{t \in \Omega_0} \frac{d(t) - P_{r-1}(t)}{(t+r)^{[r]}} \rho(t) m_k^\alpha(t).$$

Тогда мы можем рассмотреть ряд Фурье – Мейкснера функции $d_r(x)$:

$$d_r(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \hat{d}_{r,k}^\alpha m_k^\alpha(x). \quad (13)$$

Если ряд (13) сходится к функции $d_r(x)$, то с учетом (12)

$$d(x) = P_{r-1}(x) + (x+r)^{[r]} \sum_{k=0}^{\infty} \hat{d}_{r,k}^\alpha m_k^\alpha(x). \quad (14)$$

Это и есть *специальный ряд по полиномам Мейкснера* функции $d(x)$. Если $\alpha = r$, то ряд (14) совпадает с рядом (10). Действительно, в силу (2), (8) и (7) имеем

$$\begin{aligned} d_{r,k}^0 &= \sum_{t \in \Omega_0} \Delta^r d(t-r) m_k^0(t, q) \rho(t; 0, q) = \\ &= \frac{q^{-k}}{k! (h_k^0(q))^{1/2}} \sum_{t \in \Omega_0} \Delta^r (d(t-r) - P_{r-1}(t-r)) \Delta^k \left\{ \rho(t; 0, q) t^{[k]} \right\} = \\ &= \frac{(-1)^r q^{-k}}{k! (h_k^0(q))^{1/2}} \sum_{t \in \Omega_0} (d(t) - P_{r-1}(t)) \Delta^{k+r} \left\{ \rho(t; 0, q) t^{[k]} \right\} = \\ &= \frac{(-1)^r (k+r)!}{k! (h_k^0(q))^{1/2} (1-q)^{-r}} \sum_{t \in \Omega_0} (d(t) - P_{r-1}(t)) \rho(t+r; -r, q) M_{k+r}^{-r}(t+r) = \\ &= \frac{1}{(h_k^0(q))^{1/2} (1-q)^{-r}} \cdot \left(\frac{1-q}{q} \right)^r \sum_{t \in \Omega_0} (d(t) - P_{r-1}(t)) \rho(t+r; -r, q) M_k^r(t) (t+r)^{[r]} = \end{aligned}$$



$$= \frac{1}{(h_k^0(q))^{1/2}} \sum_{t \in \Omega_0} \frac{d(t) - P_{r-1}(t)}{(t+r)^{[r]}} \rho(t; r, q) M_k^r(t) = \frac{1}{(h_k^0(q))^{1/2}} (h_k^r(q))^{1/2} \hat{d}_{r,k}^r.$$

В силу последнего равенства смешанный ряд (10) примет вид

$$\begin{aligned} d(x) &= \sum_{\nu=0}^{r-1} \Delta^\nu d(-r) \frac{(x+r)^{[\nu]}}{\nu!} + (x+r)^{[r]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(h_k^r(q))^{1/2} \hat{d}_{r,k}^r}{(h_k^0(q))^{1/2} (k+1)_r} \frac{M_k^r(x, q)}{(h_k^0(q))^{1/2}} = \\ &= P_{r-1}(x) + (x+r)^{[r]} \sum_{k=0}^{\infty} \hat{d}_{r,k}^r m_k^r(x), \end{aligned}$$

который совпадает со специальным рядом (14).

4. РЯДЫ ФУРЬЕ ПО ПОЛИНОМАМ МЕЙКСНЕРА $M_k^{-r}(x+r)$, ОРТОГОНАЛЬНЫМ ПО СОБОЛЕВУ

Пусть $\mu(x) = q^x(1-q)$, $0 < q < 1$. Рассмотрим систему полиномов $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$, в которой

$$\varphi_{r,k}(x) = \frac{(x+r)^{[k]}}{k!}, \quad 0 \leq k \leq r-1, \tag{15}$$

$$\varphi_{r,k}(x) = a_k M_k^{-r}(x+r), \quad r \leq k, \tag{16}$$

где $a_k = \frac{q^{\frac{k+r}{2}}}{(1-q)^r}$.

Теорема 2. Полиномы $\varphi_{r,k}(x)$ ($k = 0, 1, \dots$), определенные равенствами (15) и (16), образуют полную в $l_{2,\mu}(\Omega_r)$ ортонормированную систему относительно скалярного произведения (1).

Доказательство. Для полиномов $\varphi_{r,k}(x) = a_k M_k^{-r}(x+r)$ и $\varphi_{r,l}(x) = a_l M_l^{-r}(x+r)$, $k, l \geq r$, с учетом равенств (7), (5) и (4) имеем

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{r,k}, \varphi_{r,l} \rangle &= a_k a_l \sum_{\nu=0}^{r-1} \Delta^\nu M_k^{-r}(x+r) \Delta^\nu M_l^{-r}(x+r) \Big|_{x=-r} + \\ &+ a_k a_l \sum_{x \in \Omega_r} \Delta^r M_k^{-r}(x+r) \Delta^r M_l^{-r}(x+r) \mu(x) = \\ &= a_k a_l \left(\frac{q-1}{q} \right)^{2r} \sum_{x \in \Omega_r} M_{k-r}^0(x+r) M_{l-r}^0(x+r) q^x (1-q) = \\ &= \delta_{kl} a_k^2 h_{k-r}^0 \left(\frac{q-1}{q} \right)^{2r} = \delta_{kl} q^{-k+r} \left(\frac{q^{\frac{k+r}{2}}}{(1-q)^r} \right)^2 \left(\frac{q-1}{q} \right)^{2r} = \delta_{kl}. \end{aligned}$$

Далее, легко заметить, что $\langle \varphi_{r,k}, \varphi_{r,l} \rangle = \delta_{kl}$ в случаях, когда $k, l \leq r-1$ и $k \leq r-1, l \geq r$. Это означает, что система полиномов $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$ ортонормирована в $l_{2,\mu}(\Omega_r)$ относительно скалярного произведения (1). Убедимся в ее полноте в $l_{2,\mu}(\Omega_r)$. Для этого покажем, что если для некоторой функции $d(x) \in l_{2,\mu}(\Omega_r)$ и для всех $k = 0, 1, \dots$ справедливы равенства $\langle d, \varphi_{r,k} \rangle = 0$, то $d(x) \equiv 0$. Действительно, если $k \leq r-1$, то $\langle d, \varphi_{r,k} \rangle = \Delta^k d(-r)$. Учитывая, что $\langle d, \varphi_{r,k} \rangle = 0$ дискретный аналог формулы Тейлора для функции $d(x)$

$$d(x) = d(-r) + \frac{\Delta d(-r)}{1!} (x+r) + \dots + \frac{\Delta^{r-1} d(-r)}{(r-1)!} (x+r)^{[r-1]} + \frac{1}{(r-1)!} \sum_{t=0}^{x-1} (x-1-t)^{[r-1]} \Delta^r d(t)$$

примет вид

$$d(x) = \frac{1}{(r-1)!} \sum_{t=0}^{x-1} (x-1-t)^{[r-1]} \Delta^r d(t). \tag{17}$$

При $k \geq r$ имеем

$$0 = \langle d, \varphi_{r,k} \rangle = a_k \sum_{x \in \Omega_r} \Delta^r d(x) \Delta^r M_k^{-r}(x+r) (1-q) q^x =$$



$$= a_k(1 - q) \left(\frac{q - 1}{q} \right)^r \sum_{x \in \Omega_r} \Delta^r d(x) M_{k-r}^0(x + r) q^x.$$

Из последнего равенства и из того, что полиномы $m_k^0(x + r) = (h_k^0(q))^{-\frac{1}{2}} M_k^0(x + r)$ ($k = 0, 1, \dots$) образуют базис в $l_{2,\rho}(\Omega_r)$ следует, что $\Delta^r d(x) = 0$. Поэтому в силу (17) $d(x) \equiv 0$. \square

Пусть $d(x) \in l_{2,\mu}(\Omega_r)$. Тогда мы можем определить коэффициенты Фурье этой функции

$$\hat{d}_k = \langle d, \varphi_{r,k} \rangle = \Delta^k d(-r), \quad 0 \leq k \leq r - 1, \quad (18)$$

$$\hat{d}_k = \langle d, \varphi_{r,k} \rangle = a_k \sum_{t \in \Omega_r} \Delta^r d(t) \Delta^r M_k^{-r}(t + r) (1 - q) q^t, \quad k \geq r \quad (19)$$

и рассмотреть ее ряд Фурье

$$d(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \hat{d}_k \varphi_{r,k}(x) = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\Delta^k d(-r)}{k!} (x + r)^{[k]} + \sum_{k=r}^{\infty} \hat{d}_k a_k M_k^{-r}(x + r). \quad (20)$$

С другой стороны, из (19) и (8) с учетом (5) имеем

$$\begin{aligned} \hat{d}_k &= a_k \left(\frac{q - 1}{q} \right)^r \sum_{t \in \Omega_r} \Delta^r d(t) M_{k-r}^0(t + r) (1 - q) q^t = \\ &= a_k \left(\frac{q - 1}{q} \right)^r (h_{k-r}^0(q))^{1/2} \sum_{t \in \Omega_r} \Delta^r d(t) m_{k-r}^0(t + r) (1 - q) q^t = (-1)^r d_{r,k-r}^0. \end{aligned} \quad (21)$$

Из (20) и (21), учитывая (7), получаем

$$\begin{aligned} d(x) &\sim \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\Delta^k d(-r)}{k!} (x + r)^{[k]} + (-1)^r \sum_{k=r}^{\infty} d_{r,k-r}^0 a_k M_k^{-r}(x + r) = \\ &= \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\Delta^k d(-r)}{k!} (x + r)^{[k]} + \frac{(-1)^r q^r}{(1 - q)^r} \sum_{k=0}^{\infty} q^{\frac{k}{2}} d_{r,k}^0 M_{k+r}^{-r}(x + r) = \\ &= \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\Delta^k d(-r)}{k!} (x + r)^{[k]} + (x + r)^{[r]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_{r,k}^0 M_k^r(x)}{(k + 1)_r (h_k^0(q))^{1/2}}. \end{aligned} \quad (22)$$

Сравнивая ряды (10) и (22), заключаем, что смешанный ряд по полиномам Мейкснера $M_k^0(x)$ совпадает с рядом Фурье по системе полиномов $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$, ортонормированной относительно скалярного произведения (1). Это позволяет использовать при исследовании аппроксимативных свойств ряда (20) методы, разработанные в работах [8, 13] при решении аналогичной задачи для смешанных рядов по полиномам Мейкснера.

Автор искренне благодарит И. И. Шарапудинова за плодотворные беседы, результатом которых явилась настоящая работа.

Библиографический список

1. Area I., Godoy E., Marcellán F. Inner products involving differences : the Meixner – Sobolev polynomials // J. Differ. Equ. Appl. 2000. Vol. 6, iss. 1. P. 1–31.
2. Marcellan F., Xu Y. On Sobolev orthogonal polynomials // Expositiones Mathematicae. 2015. Vol. 33, iss. 3. P. 308–352. DOI: 10.1016/j.exmath.2014.10.002.
3. Perez T. E., Piñar M. A., Xu Y. Weighted Sobolev orthogonal polynomials on the unit ball // J. Approx. Theory. 2013. Vol. 171. P. 84–104. DOI : 10.1016/j.jat.2013.03.004.
4. Delgado A. M., Fernandez L., Lubinsky D. S., Perez T. E., Piñar M. A. Sobolev orthogonal polynomials on the unit ball via outward normal derivatives // J. Math. Anal. Appl. 2016. Vol. 440, iss. 2. P. 716–740. DOI: 10.1016/j.jmaa.2016.03.041.
5. Fernández L., Marcellán F., Pérez T. E., Pinar M. A., Xu Y. Sobolev orthogonal polynomials on product domains // J. Comput. Appl. Math. 2015. Vol. 284. P. 202–215. DOI: 10.1016/j.cam.2014.09.015.
6. López G., Marcellán F., Van Assche W. Relative asymptotics for polynomials orthogonal with re-



- spect to a discrete Sobolev inner-product // Constr. Approx. 1995. Vol. 11, iss. 1. P. 107–137. DOI: 10.1007/BF01294341
7. Гончар А. А. О сходимости аппроксимаций Паде для некоторых классов мероморфных функций // Матем. сб. 1975. Т. 97(139), № 4(8). С. 607–629.
 8. Шарпудинов И. И. Аппроксимативные свойства операторов $Y_{n+2r}(f)$ и их дискретных аналогов // Матем. заметки. 2002. Т. 72, вып. 5. С. 765–795. DOI: 10.4213/mzm466.
 9. Шарпудинов И. И. Смешанные ряды по ортогональным полиномам. Теория и приложения. Махачкала : Дагестан. науч. центр РАН, 2004. 276 с.
 10. Шарпудинов И. И. Смешанные ряды по полиномам Чебышева, ортогональным на равномерной сетке // Матем. заметки. 2005. Т. 78, вып. 3. С. 442–465. DOI: 10.4213/mzm2599.
 11. Шарпудинов И. И. Аппроксимативные свойства смешанных рядов по полиномам Лежандра на классах W^r // Матем. сб. 2006. Т. 197, № 3. С. 135–154. DOI: 10.4213/sm1539
 12. Шарпудинов И. И. Аппроксимативные свойства средних типа Валле–Пуссена частичных сумм смешанных рядов по полиномам Лежандра // Матем. заметки. 2008. Т. 84, вып. 3. С. 452–471. DOI: 10.4213/mzm5541.
 13. Гаджиева З. Д. Смешанные ряды по полиномам Мейкснера : дис. ... канд. физ.-мат. наук / Саратов. гос. ун-т. Саратов, 2004. 103 с.
 14. Шарпудинов И. И. Специальные (смешанные) ряды по классическим полиномам Лагерра и некоторые их приложения // Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования : тез. докл. XII Междунар. науч. конф. (с. Цей, 12–18 июля 2015 г.) / ЮМИ ВЦ РАН. Владикавказ, 2015. С. 48–49.

Образец для цитирования:

Гаджимирзаев Р. М. Ряды Фурье по полиномам Мейкснера, ортогональным по Соболеву // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 4. С. 388–395. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-388-395.

The Fourier Series of the Meixner Polynomials Orthogonal with Respect to the Sobolev-type Inner Product

R. M. Gadzhimirzaev

Ramis M. Gadzhimirzaev, Dagestan Scientific Center RAS, 45, M. Gadzhieva str., 367032, Makhachkala, Russia, ramis3004@gmail.com

In this paper we consider the system of discrete functions $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$, which is orthonormal with respect to the Sobolev-type inner product

$$\langle f, g \rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} \Delta^{\nu} f(-r) \Delta^{\nu} g(-r) + \sum_{t \in \Omega_r} \Delta^r f(t) \Delta^r g(t) \mu(t),$$

where $\mu(t) = q^t(1-q)$, $0 < q < 1$. It is shown that the shifted classical Meixner polynomials $\{M_k^{-r}(x+r)\}_{k=r}^{\infty}$ together with functions $\left\{ \frac{(x+r)^{[k]}}{k!} \right\}_{k=0}^{r-1}$ form a complete orthogonal system in the space $l_{2,\mu}(\Omega_r)$ with respect to the Sobolev-type inner product. It is shown that the Fourier series on Meixner polynomials $\{a_k M_k^{-r}(x+r)\}_{k=r}^{\infty}$ (a_k — normalizing factors), orthonormal in terms of Sobolev, is a special case of mixed series on Meixner polynomials. Some new special series on Meixner orthogonal polynomials $M_k^{\alpha}(x)$ with $\alpha > -1$ are considered. In the case when $\alpha = r$ these special series coincide with mixed series on Meixner polynomials $M_k^0(x)$ and Fourier series on the system $\{a_k M_k^{-r}(x+r)\}_{k=r}^{\infty}$ orthonormal with respect to the Sobolev-type inner product.

Key words: Meixner polynomials, mixed series, special series, Sobolev-type inner product, Sobolev orthogonal polynomials.

References

1. Area I., Godoy E., Marcellán F. Inner products involving differences : the Meixner – Sobolev polynomials. *J. Differ. Equ. Appl.*, 2000, vol. 6, iss. 1, pp. 1–31.
2. Marcellan F., Xu Y. On Sobolev orthogonal polynomials. *Expositiones Mathematicae*, 2015, vol. 33, iss. 3, pp. 308–352. DOI: 10.1016/j.exmath.2014.10.002.
3. Perez T. E., Piñar M. A., Xu Y. Weighted Sobolev orthogonal polynomials on the unit ball. *J. Approx. Theory*, 2013, vol. 171, pp. 84–104. DOI : 10.1016/j.jat.2013.03.004.
4. Delgado A. M., Fernandez L., Lubinsky D. S., Perez T. E., Piñar M. A. Sobolev orthogonal polynomials on the unit ball via outward normal derivatives. *J. Math. Anal. Appl.*, 2016, vol. 440, iss. 2, pp. 716–740. DOI: 10.1016/j.jmaa.2016.03.041.
5. Fernández L., Marcellán F., Pérez T. E., Piñar M. A., Xu Y. Sobolev orthogonal polynomials on product domains. *J. Comput. Appl.*



- Math.*, 2015, vol. 284, pp. 202–215. DOI: 10.1016/j.cam.2014.09.015.
6. López G., Marcellán F., Van Assche W. Relative asymptotics for polynomials orthogonal with respect to a discrete Sobolev inner-product. *Constr. Approx.*, 1995, vol. 11, iss. 1, pp. 107–137. DOI: 10.1007/BF01294341
 7. Gonchar A. A. On convergence of Padé approximants for some classes of meromorphic functions. *Math. USSR-Sb.*, 1975, vol. 26, iss. 4, pp. 555–575. DOI: 10.1070/SM1975v026n04ABEH002494.
 8. Sharapudinov I. I. Approximation properties of the operators $Y_{n+2r}(f)$ and of their discrete analogs. *Math. Notes*, 2002, vol. 72, iss. 5, pp. 705–732. DOI: 10.1023/A:1021421425474.
 9. Sharapudinov I. I. *Smeshannyye rjady po ortogonal'nyim polinomam. Teorija i prilozhenija* [Mixed series of orthogonal polynomials. Theory and Applications]. Makhachkala, Dagestan Scientific Center RAS, 2004. 276 p. (in Russian).
 10. Sharapudinov I. I. Mixed series of Chebyshev polynomials orthogonal on a uniform grid. *Math. Notes*, 2005, vol. 78, iss. 3, pp. 403–423. DOI: 10.1007/s11006-005-0139-3.
 11. Sharapudinov I. I. Approximation properties of mixed series in terms of Legendre polynomials on the classes W^r . *Sb. Math.*, 2006, vol. 197, no. 3, pp. 433–452. DOI: 10.1070/SM2006v197n03ABEH003765.
 12. Sharapudinov I. I. Approximation properties of the Valle–Poussin means of partial sums of a mixed series of Legendre polynomials. *Math. Notes*, 2008, vol. 84, iss. 3–4, pp. 417–434. DOI: 10.1134/S0001434608090125.
 13. Gadzhieva Z. D. *Smeshannyye riady po polinomam Meixnera* : Diss. ... kand. fiz.-mat. nauk [Mixed series of Meixner polynomials : Diss. phys. and math. sci.]. Saratov State Univ., Saratov, 2004. 103 p. (in Russian).
 14. Sharapudinov I. I. Special (mixed) series of the classical Laguerre polynomials and some of their applications. *Poriadkovyi analiz i smezhnyye voprosy matematicheskogo modelirovaniia : tez. dokl. XII Mezhdunar. nauch. konf.* [Sequential analysis and related questions of mathematical modeling: Book of Abstracts of the XII Intern. Sci. Conf.] (village Tsey, 12–18 July 2015). Vladikavkaz, UMI VSC RAS, pp. 48–49 (in Russian).

Please cite this article in press as:

Gadzhimirzaev R. M. The Fourier Series of the Meixner Polynomials Orthogonal with Respect to the Sobolev-type Inner Product. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 4, pp. 388–395 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-388-395.

УДК 517.19

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОДНОГО КЛАССА РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ С РАСТУЩИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Г. В. Гаркавенко¹, Н. Б. Ускова²

¹Гаркавенко Галина Валериевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информатики и методики преподавания математики, Воронежский государственный педагогический университет, g.garkavenko@mail.ru

²Ускова Наталья Борисовна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и физико-математического моделирования, Воронежский государственный технический университет, nat-uskova@mail.ru

В работе метод подобных операторов применяется для спектрального анализа разностного замкнутого оператора вида $(Ax)(n) = x(n+1) + x(n-1) - 2x(n) + a(n)x(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, рассматриваемого в гильбертовом пространстве $l_2(\mathbb{Z})$ двусторонних последовательностей комплексных чисел с растущим потенциалом $a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$. Получены асимптотики собственных значений, собственных векторов, оценки равномерности спектральных разложений для исследуемого оператора и оператора умножения на последовательность $a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$. Для исследования рассматриваемого оператора он представляется в виде $A - B$, где $(Ax)(n) = a(n)x(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, $x \in l_2(\mathbb{Z})$ с естественной областью определения. Этот оператор является нормальным с известными спектральными свойствами и выступает в качестве невозмущенного оператора в методе подобных операторов. В качестве возмущения выступает ограниченный оператор $(Bx)(n) = -x(n+1) - x(n-1) + 2x(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, $x \in l_2(\mathbb{Z})$.

Ключевые слова: метод подобных операторов, спектр, разностный оператор, спектральные проекторы.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-395-402



ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим гильбертово пространство двусторонних комплексных последовательностей $l_2(\mathbb{Z})$ со скалярным произведением $(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\overline{y(n)}$, где $x, y \in l_2(\mathbb{Z})$, $x : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, $y : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, и нормой $\|x\| = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \right)^{1/2}$, порожденной этим скалярным произведением. В пространстве $l_2(\mathbb{Z})$ зададим линейный замкнутый оператор $A : D(A) \subset l_2(\mathbb{Z}) \rightarrow l_2(\mathbb{Z})$ формулой

$$(Ax)(n) = a(n)x(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x \in D(A) \tag{1}$$

с областью определения $D(A) \subset l_2(\mathbb{Z})$ вида

$$D(A) = \left\{ x \in l_2(\mathbb{Z}) : \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a(n)|^2 |x(n)|^2 < \infty \right\},$$

где $a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ — последовательность, обладающая свойствами:

- 1) $a(i) \neq a(j)$ при $i \neq j, i, j \in \mathbb{Z}$;
- 2) $\lim_{|n| \rightarrow \infty} |a(n)| = \infty$;
- 3) $0 < d_i = \inf_{i \neq j} |a(i) - a(j)| \rightarrow \infty, |i| \rightarrow \infty$.

Символом $\rho(A)$ обозначим резольвентное множество оператора A , а символом $\sigma(A)$ — его спектр. Из условий на последовательность $a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ следует, что $\sigma(A) = \{a(n), n \in \mathbb{Z}\}$, т.е. спектр оператора A состоит из простых изолированных собственных значений. Если число λ_0 не совпадает ни с одним $a(n)$, то $\lambda_0 \in \rho(A)$, и оператор $(A - \lambda_0 I)^{-1} : l_2(\mathbb{Z}) \rightarrow l_2(\mathbb{Z})$ действует по формуле $((A - \lambda_0 I)^{-1}x)(n) = ((a(n) - \lambda_0)^{-1}x)(n), n \in \mathbb{Z}$. Такой оператор является нормальным компактным оператором. Поэтому оператор A также является нормальным оператором.

Рассмотрим самосопряженный ограниченный оператор $B : l_2(\mathbb{Z}) \rightarrow l_2(\mathbb{Z})$ вида

$$(Bx)(n) = -2x(n) + x(n + 1) + x(n - 1), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x \in l_2(\mathbb{Z}). \tag{2}$$

Рассматриваемый класс разностных операторов и их матриц соответствует уравнениям Штурма–Лиувилля при их дискретизации [1].

Основные результаты статьи содержатся в следующих теоремах.

Теорема 1. *Существует такое целое число $k \geq 0$, что спектр $\sigma(A - B)$ оператора $A - B$ представим в виде*

$$\sigma(A - B) = \sigma_{(k)} \cup (\cup_{|i| > k} \sigma_i), \tag{3}$$

где $\sigma_{(k)}$ содержит не более $2k + 1$ собственных значений, $\sigma_i = \{\mu_i\}, |i| > k$ — одноточечные множества, и имеют место следующие асимптотические формулы:

$$\mu_i = a(i) + 2 + O(d_i^{-1}), \tag{4}$$

$$\mu_i = a(i) + 2 - \frac{a(i + 1) - 2a(i) + a(i - 1)}{(a(i + 1) - a(i))(a(i - 1) - a(i))} + O(d_i^{-2}), \quad |i| > k. \tag{5}$$

Соответствующие собственные векторы $\tilde{e}_i, |i| > k$, образуют базис Рисса в $l_2(\mathbb{Z})$ и допускают асимптотическую оценку

$$\|\tilde{e}_i - \tilde{y}_i\| \leq C d_i^{-2},$$

где

$$\tilde{y}_i(j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ (a(i \pm 1) - a(i))^{-1}, & j = i \pm 1, \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$C > 0$ — некоторая константа.

Обозначим символом $P_n, n \in \mathbb{Z}$, проектор Рисса, построенный по спектральному множеству $\{a(n)\}, n \in \mathbb{Z}$, оператора A , т.е. $P_n = P(\{a(n)\}, A)$, а символом $\tilde{P}_n, n \in \mathbb{Z}$, проектор $\tilde{P}_n = P(\{\mu_n\}, A - B)$. Здесь числа $\mu_n, |n| \geq k$, определяются формулами (4) или (5).



Теорема 2. Для спектральных проекторов \tilde{P}_i , $|i| > k$ имеют место оценки

$$\|\tilde{P}_i - P_i\| = O(d_i^{-1}), \quad |i| > k, \quad (6)$$

$$\left\| \sum_{i \geq m}^N \tilde{P}_i - \sum_{i \geq m}^N P_i \right\| = O(d_i^{-1}), \quad (7)$$

где $m > k$, $N > m$, $N \in \mathbb{N}$. Имеют место следующие оценки равносходимости спектральных разложений:

$$\|P(\sigma_{(k)}, A - B) + \sum_{|i| \geq k}^l \tilde{P}_i - \sum_{i=-l}^l P_i\| = O(d_l^{-1}), \quad (8)$$

где $l > k$ и множество $\sigma_{(k)}$ определено в теореме 1.

Исследовать оператор $A - B$ будем методом подобных операторов, который и изложим в адаптированном для рассматриваемого случая виде. Отметим, что для анализа спектральных свойств операторов, близких к оператору $A - B$, метод подобных операторов ранее не применялся.

1. О МЕТОДЕ ПОДОБНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Метод подобных операторов берёт начало из работ А. Пуанкаре, А. А. Ляпунова, Н. М. Крылова, Н. Н. Боголюбова, К. Фридрихса, Р. Тернера и окончательно оформляется в работах А. Г. Баскакова [2–5]. Мы будем придерживаться идеологии и методологии работы [5]. Обычно метод подобных операторов применяется для получения спектральных характеристик дифференциальных операторов (см. например [6–11]).

Линейные операторы, действующие в пространстве операторов, будем согласно терминологии М. Г. Крейна называть трансформаторами. Наиболее важным понятием метода подобных операторов является понятие допустимой тройки.

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство и $End H$ — банахова алгебра ограниченных линейных операторов, действующих в H .

Определение 1 (см. [5]). Пусть $J : End H \rightarrow End H$, $\Gamma : End H \rightarrow End H$ — трансформаторы. Тройку $(End H, J, \Gamma)$ назовём *допустимой для невозмущенного оператора A* , а $End H$ — *допустимым пространством возмущений*, если

- 1) J и Γ — непрерывные трансформаторы, причём J — проектор;
- 2) $(\Gamma X)(D(A)) \subset D(A)$, при этом

$$A\Gamma X - \Gamma X A = X - JX, \quad X \in End H \quad (9)$$

и $Y = \Gamma X \in End H$ — единственное решение уравнения $AY - YA = X - JX$, удовлетворяющее условию $JY = 0$;

- 3) существует постоянная $\gamma > 0$ такая, что $\|\Gamma\| \leq \gamma$, $\max\{\|X\Gamma Y\|, \|\Gamma X Y\|\} \leq \gamma \|X\| \|Y\|$;
- 4) для любого $X \in End H$ и $\epsilon > 0$ существует $\lambda_\epsilon \in \rho(A)$ такое, что $\|X(A - \lambda_\epsilon I)^{-1}\| < \epsilon$.

Теорема 3 (см. [5]). Пусть $(End H, J, \Gamma)$ — допустимая тройка для оператора $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ и B — некоторый оператор из $End H$. Тогда если $\gamma \|B\| < 1/4$, то оператор $A - B$ подобен оператору $A - JX_*$, где оператор $X_* \in End H$ является решением нелинейного операторного уравнения

$$X = B\Gamma X - (\Gamma X)(JB) - (\Gamma X)J(B\Gamma X) + B. \quad (10)$$

Решение X_* может быть найдено методом простых итераций $X_0 = 0$, $X_1 = B, \dots$ (Оператор $\Phi : End H \rightarrow End H$, определённый правой частью равенства (10), является сжимающим в шаре $\{X \in End H : \|X - B\| < 3\|B\|\}$). Преобразование подобия оператора $A - B$ в оператор $A - JX_*$ осуществляет оператор $I + \Gamma X_* \in End H$.



2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПОДОБИЯ ИСХОДНОГО ОПЕРАТОРА

В этом параграфе символом H будет обозначаться гильбертово пространство $l_2(\mathbb{Z})$. Отметим, что в дальнейшем удобно будет пользоваться матричным представлением операторов A и B , определённых формулами (1) и (2) соответственно.

Собственными векторами оператора A являются базисные векторы $e_n, n \in \mathbb{Z}$, а соответствующие спектральные проекторы задаются формулой $P_n x = (x, e_n) e_n$.

Представим оператор $A - B$ в виде $A - B = \tilde{A} - \tilde{B}$, где $(\tilde{A}x)(n) = a(n)x(n) + 2x(n)$, $(\tilde{B}x)(n) = x(n-1) + x(n+1)$. Очевидно, что $D(A) = D(\tilde{A})$. Тогда $\sigma(\tilde{A}) = \{a(n) + 2, n \in \mathbb{Z}\}$, собственные векторы и спектральные проекторы у оператора \tilde{A} те же, что и у оператора A . $\tilde{B} \in \text{End } H$, $\|\tilde{B}\| = 2$, и главная диагональ у матрицы оператора \tilde{B} нулевая.

Перейдём к определению трансформаторов $J : \text{End } H \rightarrow \text{End } H$ и $\Gamma : \text{End } H \rightarrow \text{End } H$. Положим

$$JX = \sum_{n \in \mathbb{Z}} P_n X P_n, \quad X \in \text{End } H.$$

Очевидно, что трансформатор J диагонализует матрицу оператора X и $J\tilde{B} = 0$ в силу определения оператора \tilde{B} .

Перепишем равенство (9) для матричных элементов матрицы $Y = (y_{lm})$, где $Y = \Gamma X$:

$$a(l)y_{lm} - y_{lm}a(m) = x_{lm}, \quad l \neq m,$$

откуда

$$y_{lm} = \frac{x_{lm}}{a(l) - a(m)} \tag{11}$$

и $y_{ll} = 0, l \in \mathbb{Z}$. Так как $a(l) \neq a(m)$ при $l \neq m$, то формула (11) корректна. Таким образом, матричные элементы оператора $Y = \Gamma X$ определены. При этом $Y \in \text{End } H$ и

$$\|Y\| = \sum_p \|Y_p\| \leq c(\min_{i \neq j} |a(i) - a(j)|)^{-1} \sum_p \|X_p\| = c(\min_{i \neq j} |a(i) - a(j)|)^{-1} \|X\|.$$

Здесь для вычисления нормы оператора ΓX используется оценка нормы оператора, обратного к оператору коммутирования. Эта оценка является следствием более общих оценок, приводимых в [2, теорема 1.3]. В случае если A — самосопряженный оператор, $c = \pi/2$ [2, теорема 1.3, а]. В случае если A — нормальный оператор, точное значение константы c неизвестно, известны лишь её оценки: $c < 5$ [2, теорема 1.3, б]. Так как мы далее получаем асимптотические оценки, то в дальнейшем изложении эти оценки не используются.

Пусть $Q_k = \sum_{|i| \leq k} P_i$. Наряду с трансформаторами J и Γ рассмотрим семейство трансформаторов J_k и $\Gamma_k, k \geq 0$, задаваемых формулами

$$J_k X = \sum_{|i| > k} P_i X P_i + Q_k X Q_k, \tag{12}$$

$$\Gamma_k X = \Gamma X - \Gamma(Q_k X Q_k) = \Gamma X - Q_k(\Gamma X)Q_k. \tag{13}$$

Ясно, что $J_0 X = JX, \Gamma_0 X = \Gamma X$.

Замечание 1. Из формул (11)–(13) следует, что операторы J, Γ и J_k, Γ_k не изменятся, если вместо оператора \tilde{A} рассматривать оператор $\tilde{A} - \lambda_0 I$, где $\lambda_0 \in \rho(\tilde{A})$. Отметим, что $D(\tilde{A}) = D(\tilde{A} - \lambda_0 I)$.

Лемма 1. *Тройка $(\text{End } l_2(\mathbb{Z}), J_k, \Gamma_k)$ является допустимой для оператора \tilde{A} тройкой при любом $k \geq 0$.*

Доказательство. Выполнение условия 1) и равенства (9) определения 1 вытекает непосредственно из построения операторов $J_k : \text{End } H \rightarrow \text{End } H$ и $\Gamma_k : \text{End } H \rightarrow \text{End } H, k \geq 0$.

Проверим выполнение условия $(\Gamma X)(D(\tilde{A})) \subset D(\tilde{A})$, для этого нам потребуется семейство проекторов $Q_n = \sum_{|i| \leq n} P_i$, где $n > k, n \rightarrow \infty$. Возьмем $x \in l_2(\mathbb{Z})$. В случае когда \tilde{A} является обра-

тимым оператором, имеем $\tilde{A}^{-1}x \in D(\tilde{A})$. Пусть $x_0 = \Gamma_k X \tilde{A}^{-1}x$, покажем, что $x_0 \in D(\tilde{A})$. Рассмотрим семейство операторов $\tilde{A}(Q_n \Gamma_k X) \tilde{A}^{-1}, k \geq 0$, и представим их на векторе $x \in l_2(\mathbb{Z})$ в



виде $y_n = \tilde{A}(Q_n \Gamma_k X) \tilde{A}^{-1} x = Q_n \Gamma_k X x + Q_n (X - J_k X) \tilde{A}^{-1} x$. Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n \Gamma_k X x = \Gamma_k X x$, $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n (X - J_k X) \tilde{A}^{-1} x = (X - J_k X) \tilde{A}^{-1} x$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \tilde{A}(\Gamma_k X) \tilde{A}^{-1} x = y_0, y_0 \in l_2(\mathbb{Z})$. Тогда в силу замкнутости оператора \tilde{A} имеем $x_0 \in D(\tilde{A})$ и $\tilde{A}x_0 = y_0$.

Если же оператор \tilde{A} необратим, то при доказательстве вместо \tilde{A} рассмотрим оператор $\tilde{A} - \lambda_0 I$, $\lambda_0 \in \rho(\tilde{A})$, и учтем замечание 1.

Перейдем к условию 3) определения 1.

Элементы матрицы оператора $\Gamma_k X$ также определяются формулой (11) при $\max\{l, m\} > k$ и $yl_m = 0$, в противном случае, или при $l = m$, что следует из формулы (13) (т.е. у матрицы оператора $\Gamma_k X$ нулевая главная диагональ и центральный блок размера $2k + 1$).

Для получения оценок на норму оператора Γ_k снова обратимся к работе [2] и рассмотрим оператор $ad_A Y = AY - YA$, $Y \in \text{End } H$. Представим пространство $\text{End } H$ как прямую сумму подпространств $\text{End } H = \text{Im } J_k \oplus \text{Ker } J_k$ и $ad_A|_{\text{Im } J_k} = 0$, обозначим $ad_A|_{\text{Ker } J_k} = A_k$. Тогда опять же из [2] получаем, что $\Gamma_k X = A_k^{-1}$, и так как $\sigma(A_k) = \{\lambda_i - \lambda_j\}$, где $i > k$ или (и) $j > k$, то $\|\Gamma_k\| = \|A_k^{-1}\| \leq \frac{c}{d_k}$.

Так как $X \Gamma_k Y \in \text{End } H$, $\|(X \Gamma_k Y)\| \leq \|\Gamma_k\| \|X\| \|Y\| = \gamma_k \|X\| \|Y\|$, $\|X(\Gamma_k Y)\| \leq \|\Gamma_k\| \|X\| \|Y\| = \gamma_k \|X\| \|Y\|$, то условие 3) определения 1 выполнено.

Условие 4) выполняется ввиду того что величину $\|(\tilde{A} - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\|$ можно сделать малой за счёт подходящего выбора числа $\lambda_\varepsilon \in \rho(\tilde{A})$. А именно λ_ε берём такое, что $\rho(\lambda_\varepsilon, \sigma(\tilde{A})) \geq \frac{1}{\varepsilon \|\tilde{A}\|}$. Здесь через $\rho(\lambda_\varepsilon, \sigma(\tilde{A}))$ обозначено расстояние от точки λ_ε до спектра оператора \tilde{A} . \square

Теорема 4. *Существует такое $k \geq 0$, что оператор $\tilde{A} - \tilde{B}$ подобен оператору блочно-диагонального вида $\tilde{A} - J_k X_*$, т.е.*

$$(\tilde{A} - \tilde{B})(I + \Gamma_k X_*) = (I + \Gamma_k X_*)(\tilde{A} - J_k X_*),$$

где оператор X_* есть решение уравнения (9) с Γ_k и J_k и возмущением \tilde{B} .

Так как по условию $d_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, то теорема 4 вытекает из леммы 1 и теоремы 3.

Замечание 2. Оператор \tilde{B} таков, что $J \tilde{B} = 0$, $J_k \tilde{B} \neq 0$. Матрица оператора $\tilde{B} \tilde{\Gamma} \tilde{B}$ имеет пятидиагональную структуру, у неё являются ненулевыми $-2, 0, 2$ диагонали, остальные диагонали равны нулю. Кроме того, непосредственно из определения операторов J_k и Γ_k следует, что $J_k((\Gamma_k X_*) J_k \tilde{B}) = 0$ и $J_k((\Gamma_k X_*) J_k (\tilde{B} \tilde{\Gamma}_k X_*)) = 0$.

Если $X = (x_{ij})$, то элементами матрицы оператора $\tilde{B} \tilde{\Gamma} X = Z$ являются числа (при $j \neq i \pm 1$)

$$z_{ij} = \frac{x_{(i-1)j}}{a(i-1) - a(j)} + \frac{x_{(i+1)j}}{a(i+1) - a(j)},$$

а оператор $\tilde{B} \tilde{\Gamma}_k X_*$ отличается от $\tilde{B} \tilde{\Gamma} X_*$ на оператор конечного ранга. Поэтому

$$|z_{ij}| = cd_j^{-1}, \quad |z_{ii}| = cd_i^{-1}, \quad |i|, |j| > k, \quad j \neq i \pm 1.$$

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Доказательство теоремы 1. Из подобия операторов $A - B$ и $\tilde{A} - J_k X_*$ следует, что спектр оператора $A - B$ (и $\tilde{A} - J_k X_*$) допускает представление (3), где $\sigma_i = \sigma(A_i)$ и $A_i = (a(i) + 2)I - P_i X_*|_{H_i}$, $|i| > k$, $H_i = \text{Im } P_i$. Таким образом, для асимптотической оценки собственных значений оператора $\tilde{A} - \tilde{B}$ нам нужен оператор $P_i X_*|_{H_i}$, но нам известен не сам оператор X_* , а последовательные приближения к нему, причём первым приближением является оператор \tilde{B} . Второе приближение имеет вид $\tilde{B} \tilde{\Gamma}_k \tilde{B} - \Gamma_k \tilde{B} J_k \tilde{B} - \Gamma_k \tilde{B} J_k (\tilde{B} \tilde{\Gamma}_k \tilde{B})$ (и так далее).

Представим оператор $P_i X_*|_{H_i}$ в виде $(P_i \tilde{B} + P_i(X_* - \tilde{B}))|_{H_i}$, при этом $P_i \tilde{B}|_{H_i} = 0$, $|i| > k$. Из уравнения (10) следует, что

$$X_* - \tilde{B} = \tilde{B} \tilde{\Gamma}_k X_* - (\Gamma_k X_*) J_k (\tilde{B} \tilde{\Gamma}_k X_*),$$

при этом $P_i(X_* - \tilde{B})|_{H_i} = P_i(\tilde{B} \tilde{\Gamma}_k X_*)|_{H_i}$. Здесь учтено замечание 2, следовательно,

$$\|P_i(\tilde{B} \tilde{\Gamma}_k X_*)|_{H_i}\| = \left\| \sum_l \tilde{B}_{il} (\Gamma_k X_*)_{li} \right\| \leq \|\tilde{B}\| \|X_*\| d_i^{-1}.$$



Таким образом, оценка (4) имеет место. Оценка (5) устанавливается аналогично, если в качестве X_* берём второе приближение к нему и учитываем, что

$$P_i(\tilde{B}\Gamma_k\tilde{B})|_{H_i} = \left(\frac{1}{a(i-1) - a(i)} + \frac{1}{a(i+1) - a(i)} \right) I, \quad |i| > k.$$

Перейдём к оценкам собственных векторов. Так как $\Gamma_k X_* \in \text{End}H$ при всех $k \geq 0$, то собственные векторы оператора $A - B$ образуют базис Рисса в пространстве H . Опять же из подобия операторов следуют соотношения

$$\begin{aligned} \tilde{e}_i &= (I + \Gamma_k X_*)e_i = e_i + \Gamma_k \tilde{B}e_i + \Gamma_k(X_* - \tilde{B})e_i = \tilde{y}_i + \Gamma_k(X_* - \tilde{B})e_i, \quad |i| > k, \\ \|\tilde{e}_i - \tilde{y}_i\| &\leq \|\Gamma_k(X_* - \tilde{B})e_i\| = \|(\Gamma_k(B\Gamma_k X_* - (\Gamma_k X_*)J_k B - \Gamma_k X_* J_k(B\Gamma_k X_*)))e_i\| \leq O(d_i^{-2}), \end{aligned}$$

где \tilde{e}_i — собственный вектор оператора $A - B$, отвечающий собственному значению μ_i , определенному формулой (4), а e_i — собственный вектор оператора \tilde{A} , отвечающий собственному значению $a(i) + 2$, $|i| > k$. Отметим, что e_i также является вектором стандартного базиса пространства $l_2(\mathbb{Z})$. Так как $\Gamma_k \tilde{B}e_i$ есть i -столбец матрицы $\Gamma_k \tilde{B}$, то

$$\Gamma_k \tilde{B}e_i = \left\{ 0, \dots, 0, \frac{1}{a(i-1) - a(i)}, 0, \frac{1}{a(i+1) - a(i)}, 0, \dots \right\},$$

и вектор $\tilde{y}_i = e_i + \Gamma_k \tilde{B}e_i$ определяется формулой ($|i| > k$)

$$\tilde{y}_i(k) = \begin{cases} 1, & i = k, \\ (a(i \pm 1) - a(i))^{-1}, & k = i \pm 1, \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

при этом $\|\tilde{e}_i - \tilde{y}_i\| = O(d_i^{-2})$. □

Лемма 2. Пусть имеет место теорема 1. Для спектральных проекторов $\tilde{P}_i = P(\{\mu_i\}, A - B)$, $|i| > k$, и $\tilde{Q}_k = \sum_{|i| \leq k} \tilde{P}_i$ имеют место формулы

$$\tilde{P}_i = P_i U^{-1} + \Gamma X_* P_i U^{-1}, \quad |i| > k, \quad U = I + \Gamma X_*, \quad (14)$$

$$\tilde{Q}_k = Q_k U^{-1} + \Gamma X_* Q_k U^{-1}, \quad (15)$$

$$\tilde{P}_i - P_i = (\Gamma_k X_* P_i - P_i \Gamma_k X_*) U^{-1}, \quad |i| > k, \quad (16)$$

$$\tilde{Q}_k - Q_k = (\Gamma_k X_* Q_k - Q_k \Gamma_k X_*) U^{-1}, \quad (17)$$

Доказательство. Из подобия операторов $\tilde{A} - \tilde{B}$ и $\tilde{A} - J_k X_*$ следует, что спектральные проекторы P_i , $|i| > k$, оператора \tilde{A} (или оператора A) и спектральные проекторы $\tilde{P}_i = P(\tilde{\sigma}_i, \tilde{A} - \tilde{B})$ связаны равенством

$$\tilde{P}_i = (I + \Gamma_k X_*) P_i (I + \Gamma_k X_*)^{-1},$$

откуда и следуют формулы (14), (16). Аналогично получаются формулы (15), (17) для проектора Q_k . □

Доказательство теоремы 2. Из леммы 2 следует, что

$$\|\tilde{P}_i - P_i\| \leq c(\|\Gamma_k X_* P_i\| + \|P_i \Gamma_k X_*\|) \|U^{-1}\|$$

и

$$\|P_i \Gamma_k X_*\| = O(d_i^{-1}), \quad \|\Gamma_k X_* P_i\| = O(d_i^{-1}),$$

поэтому верно (6).

Обозначим символом Ω произвольное множество из $\mathbb{Z} \setminus \{-k, \dots, -1, 0, 1, \dots, k\}$. Для множества $\Delta = \Delta(\Omega) = \{\lambda_n, n \in \Omega\}$ проектор Рисса $P(\Delta, A)$ определим равенством $P_\Delta x = P(\Delta, A)x = \sum_{n \in \Omega} P_n x$, $x \in H$. Аналогично $\tilde{\Delta} = \tilde{\Delta}(\Omega) = \{\mu_n, n \in \Omega\}$, $\tilde{P}_\Delta x = P(\tilde{\Delta}, A)x = \sum_{n \in \Omega} \tilde{P}_n x$, $x \in H$.



Из подобия операторов $\tilde{A} - \tilde{B}$ и $\tilde{A} - J_k X_*$ следуют равенства

$$\begin{aligned} \tilde{P}_\Delta &= (I + \Gamma_k X_*) P_\Delta (I + \Gamma_k X_*)^{-1}, \\ \tilde{P}_\Delta - P_\Delta &= (\Gamma_k X_* P_\Delta - P_\Delta \Gamma_k X_*) (I + \Gamma_k X_*)^{-1}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|\tilde{P}_\Delta - P_\Delta\| \leq \|(I + \Gamma_k X_*)^{-1}\| (\|\Gamma_k X_* P_\Delta\| + \|P_\Delta \Gamma_k X_*\|).$$

Оператор $(I + \Gamma_k X_*)^{-1}$ ограничен, а нормы $\|\Gamma_k X_* P_\Delta\|$, $\|P_\Delta \Gamma_k X_*\|$ оцениваются величиной $C(d(\Omega))^{-1}$, где $d(\Omega) = \min_{i \in \Omega} d_i$, $\|\tilde{P}_\Delta - P_\Delta\| = O(d^{-1}(\Omega))$. В формуле (7) берем в качестве Ω множества $\Omega = \{m, m + 1, \dots, N\}$, $m > k$, $N > k$. А в формуле (8) $\Omega = \{n : |n| > l\}$, где $l > k$. \square

Определение 2 (см. [12]). Пусть $C : D(C) \subset H \rightarrow H$ — линейный оператор, спектр которого представим в виде объединения

$$\sigma(C) = \cup_{k \in \mathbb{Z}} \sigma_k \tag{18}$$

взаимно непересекающихся компактных подмножеств из σ_k , $k \in \mathbb{Z}$, и P_k — проектор Рисса, построенный по множеству σ_k . Оператор C называется *спектральным относительно разложения* (18) или *обобщенно спектральным*, если ряд $\sum_{k \in \mathbb{Z}} P_k x$ сходится для любого вектора $x \in H$.

Отметим, что если $\sigma_k = \{\lambda_k\}$, $k \in \mathbb{Z}$, — одноточечные множества, а проекторы P_k , $k \geq 0$, обладают свойством $CP_k = \lambda_k P_k$, $k \in \mathbb{Z}$, исключая конечное число, то оператор C является спектральным по Данфорду, причём C — спектральный оператор скалярного типа, если $CP_k = \lambda_k P_k$ при всех $k \in \mathbb{Z}$.

Следствие 1. Оператор $A - B$ является спектральным относительно разложения (3).

Пример. Пусть числа $a(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, таковы, что $a(n) = c_1 \cdot \text{sign}(n)|n|^\alpha + c_2$, $\alpha > 1$, и оператор B определен равенством (2). Тогда имеют место теоремы 1 и 2 об асимптотической оценке собственных векторов, собственных значений и спектральных проекторов оператора $A - B$. Заметим, что в этом случае $d_i = c_3|i|^{\alpha-1}$, $\alpha > 1$, $d_i \rightarrow \infty$ при $|i| \rightarrow \infty$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00197).

Библиографический список

1. Мусилимов Б., Отелбаев М. Оценка наименьшего собственного значения одного класса матриц, соответствующих разностному уравнению Штурма – Лиувилля // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1981. Т. 21, № 6. С. 1430–1434.
2. Баскаков А. Г. Методы абстрактного гармонического анализа в теории возмущений линейных операторов // Сиб. матем. журн. 1983. Т. 24, № 1. С. 21–39.
3. Баскаков А. Г. Теорема о расщеплении оператора и некоторые смежные вопросы аналитической теории возмущений // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1986. Т. 50, № 3. С. 435–457.
4. Баскаков А. Г. Спектральный анализ возмущенных неквазианалитических и спектральных операторов // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 54, № 4. С. 3–32.
5. Баскаков А. Г., Дербушев А. В., Щербаков А. О. Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом // Изв. РАН. Сер. матем. 2011. Т. 75, № 3. С. 3–28. DOI: 10.4213/im4202.
6. Ускова Н. Б. О спектральных свойствах оператора Штурма – Лиувилля с матричным потенциалом // Уфимск. матем. журн. 2015. Т. 7, № 3. С. 88–99.
7. Поляков Д. М. Спектральный анализ несамосопряженного оператора четвертого порядка с негладкими коэффициентами // Сиб. матем. журн. 2015. Т. 56, № 1. С. 165–184.
8. Баскаков А. Г. Оценки функции Грина и параметров экспоненциальной дихотомии гиперболической полугруппы операторов и линейных отношений // Матем. сб. 2015. Т. 206, № 8. С. 23–62. DOI: 10.4213/sm8193.
9. Гаркавенко Г. В. О диагонализации некоторых классов линейных операторов // Изв. вузов. Матем. 1994. № 11. С. 14–19.
10. Ускова Н. Б. К методу подобных операторов в банаховых алгебрах // Изв. вузов. Матем. 2005. № 3 (514). С. 79–85.
11. Ускова Н. Б. О спектральных свойствах одного дифференциального оператора второго порядка с матричным потенциалом // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52, № 5. С. 579–588.
12. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы : в 3 т. Т. 3 : Спектральные операторы. М. : Мир, 1974. 664 с.



Образец для цитирования:

Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б. Спектральный анализ одного класса разностных операторов с растущим потенциалом // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 4. С. 395–402. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-395-402.

Spectral Analysis of a Class of Difference Operators with Growing Potential

G. V. Garkavenko¹, N. B. Uskova²

¹Galina V. Garkavenko, Voronezh State Pedagogical University, 86, Lenina str., 394043, Voronezh, Russia, g.garkavenko@mail.ru

²Natal'ya B. Uskova, Voronezh State Technical University, 14, Moskovskiy Prospect str., 394026, Voronezh, Russia, nat-uskova@mail.ru

The similar operator method is used for the spectral analysis of the closed difference operator of the form $(\mathcal{A}x)(n) = x(n+1) + x(n-1) - 2x(n) + a(n)x(n)$, $n \in \mathbb{Z}$ under consideration in the Hilbert space $l_2(\mathbb{Z})$ of bilateral sequences of complex numbers, with a growing potential $a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$. The asymptotic estimates of eigenvalue, eigenvectors, spectral estimation of equiconvergence applications for the test operator and the operator of multiplication by a sequence $a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$. For the study of the operator, it is represented in the form of $A - B$, where $(Ax)(n) = a(n)x(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, $x \in l_2(\mathbb{Z})$ with the natural domain. This operator is normal with known spectral properties and acts as the unperturbed operator in the method of similar operators. The bounded operator $(Bx)(n) = -x(n+1) - x(n-1) + 2x(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, $x \in l_2(\mathbb{Z})$, acts as the perturbation.

Key words: similar operator method, spectrum, difference operator, spectral projections.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 16-01-00197).

References

- Musilimov B., Otelbaev M. Estimation of the least eigenvalues for the matrix class corresponding to the Sturm-Liouville difference equation. *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, 1981, vol. 21, iss. 6, pp. 68–73. DOI: 10.1016/0041-5553(81)90151-8.
- Baskakov A. G. Method of abstract harmonic analysis in the theory of perturbation of linear operators. *Siberian Math. J.*, 1983, vol. 24, no. 1, pp. 17–32 (in Russian).
- Baskakov A. G. A theorem on splitting an operator, and some related questions in the analytic theory of perturbations. *Math. USSR-Izv.*, 1987, vol. 28, iss. 3, pp. 421–444. DOI: 10.1070/IM1987v028n03ABEH000891.
- Baskakov A. G. Spectral analysis of perturbed nonquasianalytic and spectral operators. *Russian Acad. Sci. Izv. Math.*, 1995, vol. 45, iss. 1, pp. 1–31. DOI: 10.1070/IM1995v045n01ABEH001621.
- Baskakov A. G., Derbushev A. V., Shcherbakov A. O. The method of similar operators in the spectral analysis of non-self-adjoint Dirac operators with non-smooth potentials. *Izv. Math.*, 2011, vol. 75, iss. 3, pp. 445–469. DOI: 10.1070/IM2011v075n03ABEH002540.
- Uskova N. B. On spectral properties of Shturm–Liouville operator with matrix potential. *Ufa Math. J.*, 2015, vol. 7, iss. 3, pp. 84–94. DOI: 10.13108/2015-7-3-84.
- Polyakov D. M. Spectral analysis of a fourth-order nonselfadjoint operator with nonsmooth coefficients. *Siberian Math. J.*, 2015, vol. 56, iss. 1, pp. 138–154. DOI: 10.1134/S0037446615010140.
- Baskakov A. G. Estimates for the Green's function and parameters of exponential dichotomy of a hyperbolic operator semigroup and linear relation. *Sb. Math.*, 2015, vol. 206, no. 8, pp. 1049–1086. DOI: 10.1070/SM2015v206n08ABEH004489.
- Garkavenko G. V. On diagonalization of certain classes of linear operator. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 1994, vol. 38, iss. 11, pp. 11–16.
- Uskova N. B. On the method of similar operators in Banach algebras. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2005, vol. 49, iss. 3, pp. 75–81.
- Uskova N. B. On the spectral properties of a second-order differential operator with a matrix potential. *Differential Equations*, 2016, vol. 52, no. 5, pp. 557–567.
- Danford N., Schwartz J. T. *Linear Operators. Pt. III : Spectral Operators*. New York, Interscience Publ., 1971. 689 p. (Russ. ed.: Danford N., Schwartz J. T. Lineinye operatory : v 3 t. T. 3 : Spektral'nye operatory. Moscow, Mir, 1974. 664 p.)

Please cite this article in press as:

Garkavenko G. V., Uskova N. B. Spectral Analysis of a Class of Difference Operators with Growing Potential. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 4, pp. 395–402 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-395-402.



УДК 517.95; 517.984

РЕЗОЛЬВЕНТНЫЙ ПОДХОД К МЕТОДУ ФУРЬЕ В СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

В. В. Корнев¹, А. П. Хромов²

¹Корнев Владимир Викторович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений и прикладной математики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, KornevVV@info.sgu.ru

²Хромов Август Петрович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений и прикладной математики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, KromovAP@info.sgu.ru

Дается обоснование метода Фурье при получении классического решения в смешанной задаче для неоднородного волнового уравнения с комплексным потенциалом и закрепленными краевыми условиями при минимальных требованиях на начальные данные. Используемый резольвентный подход не требует никакой информации о собственных и присоединенных функциях соответствующей спектральной задачи.

Ключевые слова: смешанная задача, волновое уравнение, метод Фурье, резольвента.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-403-413

ВВЕДЕНИЕ

В работах [1–4] был изложен резольвентный подход к методу Фурье получения классического решения в смешанных задачах для однородного волнового уравнения с различными краевыми условиями. Этот подход позволяет дать строгое обоснование метода Фурье, не прибегая к завышенным требованиям гладкости на начальные данные и не используя никакой информации о собственных и присоединенных функциях соответствующей спектральной задачи. В данной статье этот резольвентный подход используется для обоснования метода Фурье в смешанной задаче для неоднородного волнового уравнения с комплексным потенциалом и закрепленными краевыми условиями при минимальных требованиях на исходные данные.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим смешанную задачу:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - q(x)u(x, t) + f(x, t), \quad (x, t) \in Q = [0, 1] \times (-\infty, \infty), \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u'_t(x, 0) = \psi(x), \quad (3)$$

где все функции предполагаются комплекснозначными, причем

$$q(x) \in C[0, 1], \quad \varphi(x) \in C^2[0, 1], \quad \psi(x) \in C^1[0, 1], \quad f(x, t) \text{ непрерывна в } Q. \quad (4)$$

Для существования классического решения (т.е. $u(x, t)$ вместе с частными производными по x и t до второго порядка включительно непрерывна в Q и удовлетворяет (1)–(3)) необходимо должны выполняться условия

$$\varphi(0) = \varphi(1) = \psi(0) = \psi(1) = 0, \quad (5)$$

$$\varphi''(0) + f(0, 0) = \varphi''(1) + f(1, 0) = 0. \quad (6)$$

Мы дополнительно потребуем еще, чтобы

$$f'_t(x, t) \in C(Q). \quad (7)$$



Наша цель — доказать, что при сделанных предположениях формальный ряд, построенный по методу Фурье, сходится и его сумма есть классическое решение задачи (1)–(3).

Приведем близкие к данной статье результаты. Справедлива следующая теорема [5, с. 198–200].

Теорема А. Пусть вещественные функции $q(x) \in C^2[0, 1]$, $\varphi(x) \in C^3[0, 1]$, $\psi(x) \in C^2[0, 1]$, причем $\varphi(0) = \varphi''(0) = \varphi(1) = \varphi''(1) = \psi(0) = \psi(1) = 0$, $f(x, t)$ дважды непрерывно дифференцируема по x и удовлетворяет условию

$$f(0, t) = f(1, t) = 0, \quad t \in [0, \infty). \quad (8)$$

Тогда формальный ряд по методу Фурье и ряды, получающиеся из него почленным дифференцированием по x и t до двух раз включительно, сходятся абсолютно и равномерно в $\tilde{Q}_T = [0, 1] \times [0, T]$ при любом $T > 0$, и сумма формального ряда является классическим решением задачи (1)–(3).

В [6] классическое решение $u(x, t)$ задачи (1)–(3) в \tilde{Q}_T ищется в виде

$$u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t), \quad (9)$$

где $u_0(x, t)$ — решение задачи (1)–(3) при $f(x, t) = 0$, $u_1(x, t)$ — решение задачи (1)–(3) при $\varphi(x) = \psi(x) = 0$. Для $u_0(x, t)$ в [6, с. 39] получена

Теорема В. Классическое решение $u_0(x, t)$ при вещественной $q(x) \in C[0, 1]$ существует и единственно тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} \varphi(x) \in C^2[0, 1], \quad \psi(x) \in C^1[0, 1], \\ \varphi(0) = \varphi''(0) = \varphi(1) = \varphi''(1) = \psi(0) = \psi(1) = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

и находится по методу Фурье.

Относительно $u_1(x, t)$ из (9) утверждается [6, с. 17, 67]:

Теорема С. Для разрешимости задачи (1)–(3) при $\varphi(x) = \psi(x) = 0$, $q(x) \in C[0, 1]$ и вещественной необходимо и достаточно, чтобы $f(x, t)$ была непрерывной с условием (8), и функции $p(x, t) = \int_0^t \tilde{f}(x \pm (t - \tau), \tau) d\tau$ были непрерывно дифференцируемы по x и t , где $\tilde{f}(x, t)$ — нечетное, 2-периодическое продолжение $f(x, t)$ по переменной x на всю числовую ось. Ряд, построенный по методу Фурье, сходится равномерно по $x \in [0, 1]$ при фиксированном t , и его сумма есть классическое решение задачи (1)–(3).

Нам представляется, что условие (8) не является необходимым. Приведем пример. Рассмотрим смешанную задачу

$$u''_{tt}(x, t) = u''_{xx}(x, t) - t, \quad u(0, t) = u(1, t) = u(x, 0) = u'_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (11)$$

Введем в рассмотрение функцию

$$v(x, t) = \frac{1}{8}x(x+t)(x+3t) + g\left(\frac{1}{2}(x-t)\right) - g\left(-\frac{1}{2}(x+t)\right),$$

где $g(x) = \frac{1}{2}x^2(1-x)$ при $0 \leq x \leq 1$ и продолжена на всю числовую ось по правилу

$$g(x+1) - g(x) = -\frac{1}{2}x(1+3x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Поскольку односторонние производные до второго порядка включительно так продолженной функции $g(x)$ в точке $x = 1$ совпадают, то $g(x) \in C^2(\mathbb{R})$ (см. также лемму 2). Непосредственные вычисления показывают, что для $v(x, t)$ справедливы соотношения

$$v''_{tt}(x, t) = v''_{xx}(x, t) - t, \quad v(0, t) = v(1, t) = 0, \quad x, t \in \mathbb{R}.$$



Далее рассмотрим функции $\varphi(x) = v(x, 0)$ и $\psi(x) = v'_t(x, 0)$, $0 \leq x \leq 1$. Продолжим их с $[0, 1]$ на $[-1, 0]$ нечетным образом, а затем на всю числовую ось периодически с периодом 2. Из соотношений для функции $v(x, t)$ следует, что $\varphi(x) \in C^2(\mathbb{R})$, $\psi(x) \in C^1(\mathbb{R})$, и они удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \varphi(0) = \varphi''(0) = \varphi(1) = \varphi''(1) = \psi(0) = \psi(1) = 0, \\ \varphi(-x) = -\varphi(x), \quad \psi(-x) = -\psi(x), \quad \varphi(1-x) = -\varphi(1+x), \quad \psi(1-x) = -\psi(1+x). \end{aligned}$$

С помощью этих условий нетрудно убедиться, что для функции

$$w(x, t) = \frac{1}{2} \left(\varphi(x+t) + \varphi(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} \psi(\tau) d\tau \right)$$

выполняются соотношения

$$w''_{tt}(x, t) = w''_{xx}(x, t), \quad w(0, t) = w(1, t) = 0, \quad w(x, 0) = \varphi(x), \quad w'_t(x, 0) = \psi(x).$$

Следовательно, функция $u(x, t) = v(x, t) - w(x, t)$ является классическим решением задачи (11).

Заметим, что в наших дальнейших рассуждениях мы не ищем решение задачи (1)–(3) в виде (9).

2. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

Метод Фурье в применении к (1)–(3) связан со спектральной задачей для оператора L :

$$Ly = -y''(x) + q(x)y(x), \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Известно, что собственные значения $\lambda_n = \rho_n^2$ оператора L при достаточно больших n имеют асимптотику

$$\rho_n = n\pi + \varepsilon_n, \quad n = n_0, n_0 + 1, \dots, \quad \varepsilon_n = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Введем окружности $\tilde{\gamma}_n = \{\rho \mid |\rho - n\pi| = \delta\}$, где $\delta > 0$ и достаточно мало, $n \geq n_0$, а n_0 таково, что внутри $\tilde{\gamma}_n$ находится только одно ρ_n . Пусть γ_n — образ $\tilde{\gamma}_n$ в λ -плоскости ($\lambda = \rho^2$, $\text{Re } \rho \geq 0$). Обозначим через R_λ резольвенту оператора L , т.е. $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$, где E — единичный оператор, λ — спектральный параметр. Формальное решение по методу Фурье задачи (1)–(3) возьмем в виде (см. также [7, 8])

$$\begin{aligned} u(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) \left[(R_\lambda \varphi)(x) \cos \rho t + \frac{1}{\rho} (R_\lambda \psi)(x) \sin \rho t + \right. \\ \left. + \int_0^t (R_\lambda f)(x, \tau) \frac{\sin \rho(t - \tau)}{\rho} d\tau \right] d\lambda, \end{aligned} \tag{12}$$

где $R_\lambda f$ — значение R_λ на функции $f(x, \tau)$ как функции x , $r > 0$ фиксировано, и контур $|\lambda| = r$ содержит внутри только те λ_n , номера которых меньше n_0 , причем на самом контуре собственных значений нет.

Для дальнейшего потребуется явная формула для R_λ . Обозначим через $z_1(x, \rho)$ и $z_2(x, \rho)$ решения уравнения $y'' - q(x)y + \rho^2 y = 0$ с начальными условиями $z_1(0, \rho) = z'_2(0, \rho) = 1$ и $z'_1(0, \rho) = z_2(0, \rho) = 0$. Функции $z_j(x, \rho)$ целые по ρ и даже по λ , где $\lambda = \rho^2$.

Лемма 1 (см. [2]). Для R_λ имеет место формула

$$R_\lambda g = z_2(x, \rho)(g, z_1) - v(x, \rho)(g, z_2) + M_\rho g, \tag{13}$$

где $(g, z) = \int_0^1 g(x)z(x) dx$, $v(x, \rho) = z_2(x, \rho)z_1(1, \rho)z_2^{-1}(1, \rho)$, $M_\rho g = \int_0^x M(x, \xi, \rho)g(\xi) d\xi$,

$$M(x, \xi, \rho) = \begin{vmatrix} z_1(x, \rho) & z_2(x, \rho) \\ z_1(\xi, \rho) & z_2(\xi, \rho) \end{vmatrix}.$$



Теорема 1. Если $u(x, t)$ — классическое решение задачи (1)–(3), то для него справедлива формула (12), причем ряд сходится равномерно по $x \in [0, 1]$ при каждом фиксированном t .

Доказательство. Пусть $u(x, t)$ есть классическое решение задачи (1)–(3). Тогда при фиксированном t она принадлежит области определения оператора L , краевые условия которого регулярны. Следовательно, $u(x, t)$ как функция x разлагается в равномерно сходящийся на $[0, 1]$ ряд Фурье по собственным и присоединенным функциям оператора L , который представим в виде

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) R_\lambda u \, d\lambda, \tag{14}$$

где $R_\lambda u$ — значение R_λ на $u(x, t)$ как функции x . Обозначим $R_\lambda u = y(x, t, \lambda)$. Отсюда следует, что

$$Ly = u(x, t) + \lambda y(x, t, \lambda). \tag{15}$$

Поскольку $u(x, t)$ есть решение уравнения (1), то имеет место тождество

$$R_\lambda u''_{tt} = -R_\lambda(Lu) + R_\lambda f,$$

из которого на основании равенств $R_\lambda Lu = LR_\lambda u$ и $R_\lambda u''_{tt} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} R_\lambda u$ получаем, что

$$y''_{tt} = -Ly + R_\lambda f$$

или с учетом (15)

$$y''_{tt}(x, t, \lambda) + \lambda y(x, t, \lambda) = -u(x, t) + (R_\lambda f)(x, t).$$

Кроме того,

$$y(x, 0, \lambda) = R_\lambda \varphi, \quad y'_t(x, 0, \lambda) = R_\lambda \psi.$$

Следовательно, при фиксированных x и λ функция $y(x, t, \lambda)$ является решением задачи Коши

$$y'' + \lambda y = -u + R_\lambda f, \quad y(0) = R_\lambda \varphi, \quad y'(0) = R_\lambda \psi,$$

решение которой дается формулой

$$y(x, t, \lambda) = (R_\lambda \varphi)(x) \cos \rho t + \frac{1}{\rho} (R_\lambda \psi)(x) \sin \rho t + \frac{1}{\rho} \int_0^t \sin \rho(t - \tau) [-u(x, \tau) + (R_\lambda f)(x, \tau)] d\tau.$$

Подставляя эту формулу в правую часть (14) вместо $R_\lambda u$ и учитывая аналитичность по λ интеграла $\frac{1}{\rho} \int_0^t \sin \rho(t - \tau) u(x, \tau) d\tau$, приходим к утверждению теоремы. \square

Замечание. Теорема 1 не нова, схожий результат содержится, например, в [7, с. 171]. Мы приводим ее доказательство для облегчения чтения работы.

Остановимся вначале на случае однородного уравнения (1).

Теорема 2. Пусть в задаче (1)–(3) $f(x, t) = 0$. Тогда ряд в (12) сходится абсолютно и равномерно в $Q_T = [0, 1] \times [-T, T]$, где $T > 0$ — произвольное фиксированное число, и формальное решение (12) есть классическое решение этой задачи.

Доказательство. В работе [2] показано, что ряд

$$-\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) (R_\lambda \varphi)(x) \cos \rho t \, d\lambda$$



сходится указанным образом к классическому решению задачи (1)–(3) при $\psi(x) = 0$. Аналогичным приемом можно доказать, что ряд

$$-\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) (R_\lambda \psi)(x) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda$$

сходится тем же образом к классическому решению задачи (1)–(3) при $\varphi(x) = 0$. Отсюда следует утверждение теоремы. \square

Для исследования неоднородного случая нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2. Пусть $F(t) \in C^2(\mathbb{R})$. Тогда существует функция $H(t) \in C^2(\mathbb{R})$, такая что

$$H(t+1) - H(t) = F(t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (16)$$

Доказательство. Положим $H(t) = h(t)$ при $t \in [0, 1]$, где $h(t)$ — функция из $C^2[0, 1]$, для которой $h(1) - h(0) = F(0)$. По формуле (16) функцию $H(t)$ однозначно продолжаем с $[0, 1]$ вправо и влево на всю числовую ось. Очевидно, что

$$H^{(k)}(1-0) = h^{(k)}(1), \quad H^{(k)}(1+0) = h^{(k)}(0) + F^{(k)}(0), \quad k = 0, 1, 2.$$

Выберем $h(t)$ так, чтобы

$$h^{(k)}(1) = h^{(k)}(0) + F^{(k)}(0), \quad k = 0, 1, 2.$$

При этих условиях $H(t) \in C^2[0, 2]$. Из непрерывности функций $H^{(k)}(t)$ ($k = 0, 1, 2$) в точке $t = 1$ формулы $H(t+1) = H(t) + F(t)$ вытекает непрерывность этих функций в точках $t = 2, 3, \dots$, а из формулы $H(t) = H(t+1) - F(t)$ — в точках $t = 0, -1, -2, \dots$. Таким образом, $H(t) \in C^2(\mathbb{R})$. Лемма доказана. \square

Теперь рассмотрим еще один частный случай задачи (1)–(3), когда $q(x) = \varphi(x) = \psi(x) = 0$. Обозначим через R_λ^0 резольвенту оператора L_0 , который есть оператор L при $q(x) = 0$ с собственными значениями $\lambda_n^0 = n^2\pi^2$, $n = 1, 2, \dots$. По лемме 1

$$R_\lambda^0 g = z_2^0(x, \rho)(g, z_1^0) - v^0(x, \rho)(g, z_2^0) + M_\rho^0 g, \quad (17)$$

где z_1^0 , z_2^0 , v^0 , M_ρ^0 — те же, что и z_1 , z_2 , v , M_ρ , но взятые для оператора L_0 . В этом случае

$$z_1^0(x, \rho) = \cos \rho x, \quad z_2^0(x, \rho) = \frac{1}{\rho} \sin \rho x, \quad v^0(x, \rho) = \sin \rho x \operatorname{ctg} \rho.$$

Теорема 3. При выполнении условия

$$f(0, 0) = f(1, 0) = 0 \quad (18)$$

классическое решение задачи (1)–(3) в случае $q(x) = \varphi(x) = \psi(x) = 0$ существует и дается формулой

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) \left(\int_0^t (R_\lambda^0 f)(x, \tau) \frac{\sin \rho(t-\tau)}{\rho} d\tau \right) d\lambda,$$

где $R_\lambda^0 f$ — значение R_λ^0 на функции $f(x, \tau)$ как функции x , причем ряд сходится равномерно по $x \in [0, 1]$ при любом фиксированном t .

Доказательство. Будем считать, что $f(x, t)$ и $f'_t(x, t)$ определены и непрерывны в \mathbb{R}^2 , положив, например, $f(x, t) = f(1, t)$ при $x > 1$ и $f(x, t) = f(0, t)$ при $x < 0$.

Решим вначале вспомогательную задачу:

$$u''_{tt} = u''_{xx} + f(x, t), \quad u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad -\infty < x, t < \infty. \quad (19)$$

После замены переменных $x = \xi + \eta$ и $t = \xi - \eta$ эта задача перейдет в задачу

$$v''_{\xi\eta}(\xi, \eta) = g(\xi, \eta), \quad v(\xi, -\xi) = v(\xi, 1 - \xi) = 0, \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}, \quad (20)$$

где $g(\xi, \eta) = -f(\xi + \eta, \xi - \eta)$.



Общее решение уравнения задачи (20) имеет вид

$$v(\xi, \eta) = G(\xi, \eta) + c_1(\xi) + c_2(\eta),$$

где $G(\xi, \eta) = \int_0^\xi \int_0^\eta g(s, \tau) d\tau ds \in C^2(\mathbb{R}^2)$, $c_1(\xi)$, $c_2(\eta)$ — произвольные функции из $C^2(\mathbb{R})$.

Подставив общее решение в краевые условия задачи (20), получим систему

$$G(\xi, -\xi) + c_1(\xi) + c_2(-\xi) = 0, \quad G(\xi, 1 - \xi) + c_1(\xi) + c_2(1 - \xi) = 0. \quad (21)$$

Вычитая из второго уравнения первое и выполняя замену $\theta = -\xi$, приходим к уравнению для функции $c_2(\theta)$

$$c_2(\theta + 1) - c_2(\theta) = F(\theta), \quad \theta \in \mathbb{R},$$

где $F(\theta) = G(-\theta, 1 + \theta) - G(-\theta, \theta)$.

Пусть $c_2(\theta)$ — решение этого уравнения (оно существует по лемме 2). Тогда из первого уравнения системы (21) находим $c_1(\xi)$. В результате мы получили решение задачи (20). Следовательно, задача (19) имеет решение в $C^2(\mathbb{R}^2)$. Пусть $u_0(x, t)$ — одно из таких решений.

Обозначим $\varphi_0(x) = u_0(x, 0)$, $\psi_0(x) = u'_{0t}(x, 0)$. Очевидно, что

$$\varphi_0(x) \in C^2[0, 1], \quad \psi_0(x) \in C^1[0, 1]. \quad (22)$$

В силу условия (18) имеем

$$\varphi_0(0) = \varphi_0(1) = \varphi_0''(0) = \varphi_0''(1) = \psi_0(0) = \psi_0(1) = 0. \quad (23)$$

Функция $u_0(x, t)$ есть решение задачи (1)–(3) при данной $f(x, t)$, $q(x) = 0$, $\varphi(x) = \varphi_0(x)$, $\psi(x) = \psi_0(x)$. Из условий (22), (23) следует, что существует классическое решение $w(x, t)$ задачи (1)–(3) при $q(x) = 0$, $f(x, t) = 0$, $\varphi(x) = \varphi_0(x)$, $\psi(x) = \psi_0(x)$. Нетрудно видеть, что функция $u_1(x, t) = u_0(x, t) - w(x, t)$ с учетом теоремы 1 будет искомым решением.

Теорема доказана. □

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Для доказательства основной теоремы нам потребуются следующие факты.

Лемма 3 (см. [2]). При $\rho \in \tilde{\gamma}_n$ имеют место асимптотические формулы

$$v^{(j)}(x, \rho) = v^{0(j)}(x, \rho) + O(\rho^{j-1}), \quad j = 0, 1, 2, \quad (24)$$

где оценки $O(\dots)$ равномерны по $x \in [0, 1]$.

Лемма 4 (см. [2]). При $\rho \in \tilde{\gamma}_n$ имеют место формулы

$$(g, z_2) = (n\pi + \mu)^{-1} [(g_1(\xi) \cos \mu\xi, \sin n\pi\xi) + (g_1(\xi) \sin \mu\xi, \cos n\pi\xi)], \quad (25)$$

$$(g, z_2 - z_2^0) = (n\pi + \mu)^{-2} [(g_2(\xi) \cos \mu\xi, \cos n\pi\xi) - (g_2(\xi) \sin \mu\xi, \sin n\pi\xi)], \quad (26)$$

где $\rho = n\pi + \mu$, $\mu \in \tilde{\gamma}_0$, $g_1(\xi) = g(\xi) + \int_\xi^1 K(s, \xi)g(s) ds$, $g_2(\xi) = -g(\xi)K(\xi, \xi) + \int_\xi^1 K'_\xi(s, \xi)g(s) ds$, $K(s, \xi)$ непрерывно дифференцируема по $s, \xi \in [0, 1]$.

Лемма 5. Обозначим через $\gamma(x)$ функции $\cos x$ или $\sin x$. Пусть $f(x, t) \in C(Q_T)$, $f(x, t, \mu) = f(x, t)\gamma(\mu x)$, $\mu \in \tilde{\gamma}_0$ и $\beta_n(t, \mu) = (f(x, t, \mu), \gamma(n\pi x))$. Тогда справедлива оценка

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} \frac{1}{n} |\beta_n(t, \mu)| \leq c \left(\sum_{n=n_1}^{n_2} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2}, \quad (27)$$

где постоянная c не зависит от t, μ, c_1 и c_2 .



Доказательство. По неравенству Коши – Буняковского имеем

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} \frac{1}{n} |\beta_n(t, \mu)| \leq \left(\sum_{n=n_1}^{n_2} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{n=n_1}^{n_2} |\beta_n^2(t, \mu)| \right)^{1/2}, \quad (28)$$

а в силу неравенства Бесселя

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} |\beta_n^2(t, \mu)| \leq c_1 \int_0^1 |f(x, t, \mu)|^2 dx, \quad (29)$$

причем

$$|f(x, t, \mu)| \leq c_2 |f(x, t)| \leq c_3,$$

где все c_i не зависят от x, t, μ, n_1 и n_2 .

Из (28) и (29) следует (27). Лемма доказана. \square

Положим

$$a_n(x, t) = \int \left(\int_{\gamma_n}^t (R_\lambda f - R_\lambda^0 f)(x, \tau) \frac{\sin \rho(t - \tau)}{\rho} d\tau \right) d\lambda. \quad (30)$$

Лемма 6. Ряды $\sum_{n \geq n_0} a_{n,x^j}^{(j)}(x, t)$ и $\sum_{n \geq n_0} a_{n,t^j}^{(j)}(x, t)$ ($j = 0, 1, 2$) сходятся абсолютно и равномерно по $(x, t) \in Q_T$.

Доказательство. Учитывая, что первые и третьи слагаемые в (13) и (17) есть целые функции по λ , из (30) имеем

$$a_n(x, t) = \int \left(\int_{\tilde{\gamma}_n}^t J(x, \tau, \rho, f) \frac{\sin \rho(t - \tau)}{\rho} d\tau \right) d\lambda. \quad (31)$$

где $J(x, \tau, \rho, f) = v^0(x, \rho)(f(\xi, \tau), z_2^0(\xi, \rho)) - v(x, \rho)(f(\xi, \tau), z_2(\xi, \rho))$. Интегрируя в правой части (31) по частям и дифференцируя обе части по x , получаем

$$\begin{aligned} a_{n,x^j}^{(j)}(x, t) &= 2 \int_{\tilde{\gamma}_n} \rho^{-1} \left[J_{x^j}^{(j)}(x, \tau, \rho, f) \cos \rho(t - \tau) \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^t J_{x^j}^{(j)}(x, \tau, \rho, f'_\tau) \cos \rho(t - \tau) d\tau \right] d\rho, \quad j = 0, 1, 2. \end{aligned} \quad (32)$$

Представим J в виде

$$J(x, \tau, \rho, f) = J_1(x, \tau, \rho, f) + J_2(x, \tau, \rho, f),$$

где $J_1 = (v^0(x, \rho) - v(x, \rho))(f(\xi, \tau), z_2(\xi, \rho))$, $J_2 = v^0(x, \rho)(f(\xi, \tau), z_2^0(\xi, \rho) - z_2(\xi, \rho))$.

При $\rho = n\pi + \mu$ и $\mu \in \tilde{\gamma}_0$ в силу формул (24)–(27) имеем

$$J_{1,x^j}^{(j)}(x, t, \rho, f) = O(n^{j-2}[\beta_{1n}(t, \mu) + \beta_{1n}(t, \mu)]), \quad j = 0, 1, 2,$$

где первое β_{1n} есть $(g_1(\xi, t) \cos \mu\xi, \sin n\pi\xi)$, второе β_{1n} есть $(g_1(\xi, t) \sin \mu\xi, \cos n\pi\xi)$, $g_1(\xi, t)$ – функция g_1 из леммы 4 при $g = f(\xi, t)$, оценки $O(\dots)$ равномерны по $(x, t) \in Q_T$, $\mu \in \tilde{\gamma}_0$.

Аналогично имеют место оценки

$$J_{2,x^j}^{(j)}(x, t, \rho, f) = O(n^{j-2}[\beta_{2n}(t, \mu) + \beta_{2n}(t, \mu)]), \quad j = 0, 1, 2,$$

где первое β_{2n} есть $(g_2(\xi, t) \cos \mu\xi, \cos n\pi\xi)$, второе β_{2n} есть $-(g_2(\xi, t) \sin \mu\xi, \sin n\pi\xi)$, $g_2(\xi, t)$ – функция g_2 из леммы 4 при $g = f(\xi, t)$.

Из этих оценок получаем оценку

$$J_{x^j}^{(j)}(x, t, \rho, f) = O(n^{j-2}\tilde{\beta}_n(t, \mu)), \quad j = 0, 1, 2,$$



где $\tilde{\beta}_n(t, \mu) = |\beta_{1n}(t, \mu)| + |\beta_{2n}(t, \mu)|$ и оценки $O(\dots)$ равномерны по $(x, t) \in Q_T$, $\mu \in \tilde{\gamma}_0$. Такие же оценки справедливы для $J_{x^j}^{(j)}(x, t, \rho, f'_\tau)$. Следовательно, подынтегральное выражение в (32) есть $O(n^{j-3}\beta_n(t, \mu))$, где $\sum_{n=n_1}^{n_2} |\beta_n^2(t, \mu)| \leq c$, c не зависит от n_1, n_2, t и $\mu \in \tilde{\gamma}_0$. Отсюда сразу имеем абсолютную и равномерную сходимость рядов $\sum_{n \geq n_0} a_{n,x^j}^{(j)}(x, t)$ при $j = 0, 1$.

Если $j = 2$, то по лемме 5 справедлива оценка

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} |a''_{n,x^2}(x, t)| = O\left(\int_{\tilde{\gamma}_n} \sum_{n=n_1}^{n_2} \frac{1}{n} |\beta_n(t, \mu)| d\mu\right) = O\left(\int_{\tilde{\gamma}_n} \left(\sum_{n=n_1}^{n_2} \frac{1}{n^2}\right)^{1/2} |d\mu|\right) = O\left(\left(\sum_{n=n_1}^{n_2} \frac{1}{n^2}\right)^{1/2}\right),$$

равномерная по x, t, n_1 и n_2 . Это дает абсолютную и равномерную сходимость ряда из вторых производных. Аналогично устанавливается абсолютная и равномерная сходимость рядов $\sum_{n \geq n_0} a_{n,t^j}^{(j)}(x, t)$, $j = 0, 1, 2$, так как

$$\begin{aligned} a'_{n,t}(x, t) &= \int_{\gamma_n} \left(\int_0^t (R_\lambda f - R_\lambda^0 f)(x, \tau) \cos \rho(t - \tau) d\tau \right) d\lambda, \\ a''_{n,t^2}(x, t) &= \int_{\gamma_n} \left[(R_\lambda f - R_\lambda^0 f)(x, t) - \rho \int_0^t (R_\lambda f - R_\lambda^0 f)(x, \tau) \sin \rho(t - \tau) d\tau \right] d\lambda = \\ &= \int_{\gamma_n} \left[(R_\lambda f - R_\lambda^0 f)(x, 0) \cos \rho t + \int_0^t (R_\lambda f'_\tau - R_\lambda^0 f'_\tau)(x, \tau) \cos \rho(t - \tau) d\tau \right] d\lambda. \end{aligned}$$

Лемма доказана. □

4. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Запишем формальное решение (12) в виде

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t) + u_4(x, t),$$

где

$$u_1(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0, \gamma_n} \int \right) \left(\int_0^t (R_\lambda^0 f_1) \frac{\sin \rho(t - \tau)}{\rho} d\tau \right) d\lambda, \tag{33}$$

$$u_2(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0, \gamma_n} \int \right) (R_\lambda \psi) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda, \tag{34}$$

$$u_3(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0, \gamma_n} \int \right) \left(\int_0^t (R_\lambda f_1 - R_\lambda^0 f_1) \frac{\sin \rho(t - \tau)}{\rho} d\tau \right) d\lambda. \tag{35}$$

$$u_4(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0, \gamma_n} \int \right) \left((R_\lambda \varphi) \cos \rho t + \int_0^t (R_\lambda f_2) \frac{\sin \rho(t - \tau)}{\rho} d\tau \right) d\lambda, \tag{36}$$

$$f_1(x, \tau) = f(x, \tau) - f_2(x), \quad f_2(x) = -\varphi''(x) + q(x)\varphi(x).$$

Лемма 7. Ряд (33) сходится и функция $u_1(x, t)$ является классическим решением задачи (1)–(3) при $q(x) = \varphi(x) = \psi(x) = 0$ с неоднородностью $f_1(x, t)$.

Доказательство. В силу условий (6) функция $f_1(x, t)$ удовлетворяет условию (18). Отсюда по теореме 3 следует утверждение леммы. □



Лемма 8. Ряд (34) сходится и функция $u_2(x, t)$ является классическим решением задачи (1)–(3) при $\varphi(x) = 0$ и $f(x, t) = 0$.

Доказательство. Утверждение леммы следует из теоремы 2. □

Лемма 9. Ряд (36) сходится к функции $\varphi(x)$.

Доказательство. Функцию $\varphi(x)$ можно рассматривать как решение задачи (1)–(3) при $\psi(x) = 0$ с неоднородностью $f_2(x)$. Следовательно, по теореме 1 $u_4 = \varphi(x)$. □

Лемма 10. Ряд (35) сходится, и функция $u_3(x, t)$ непрерывна вместе с частными производными $u''_{3,xx}(x, t)$ и $u''_{3,tt}(x, t)$, причем

$$u_3(0, t) = u_3(1, t) = u_3(x, 0) = u'_{3,t}(x, 0) = 0, \quad x \in [0, 1], \quad t \in \mathbb{R}, \quad (37)$$

$$u''_{3,tt}(x, t) - u''_{3,xx}(x, t) = \frac{1}{2\pi i} q(x) \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) \left(\int_0^t (R_\lambda f_1) \frac{\sin \rho(t-\tau)}{\rho} d\tau \right) d\lambda. \quad (38)$$

Доказательство. Обозначим для краткости $v(x, t) = u_3(x, t)$. По лемме 6 функция $v(x, t)$ непрерывна вместе с v''_{xx} и v'_{tt} в Q_T и ряд (35) можно дважды дифференцировать почленно по t и по x .

Вначале отметим, что по свойству R_λ и R_λ^0 справедливы равенства $(R_\lambda f_1)(x, \tau) = (R_\lambda^0 f_1)(x, \tau) = 0$ при $x = 0$ и $x = 1$. Из этих равенств и формулы (35) сразу получаем, что

$$v(0, t) = v(1, t) = v(x, 0) = 0. \quad (39)$$

Дифференцируя (35) по t , имеем

$$v'_t(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) \left(\int_0^t (R_\lambda f_1 - R_\lambda^0 f_1) \cos \rho(t-\tau) d\tau \right) d\lambda. \quad (40)$$

Из (39), (40) следует справедливость (37). По известной теореме равносходимости выполняется тождество

$$-\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) (R_\lambda f_1 - R_\lambda^0 f_1) d\lambda = 0, \quad (x, t) \in Q_T. \quad (41)$$

Дифференцируя обе части (40) по t , с учетом (41) получаем, что

$$v''_{tt}(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) \left(\int_0^t (R_\lambda f_1 - R_\lambda^0 f_1) \rho \sin \rho(t-\tau) d\tau \right) d\lambda. \quad (42)$$

Теперь продифференцируем обе части (35) дважды по x :

$$v''_{xx}(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) \left(\int_0^t ((R_\lambda f_1)''_{xx} - (R_\lambda^0 f_1)''_{xx}) \frac{\sin \rho(t-\tau)}{\rho} d\tau \right) d\lambda. \quad (43)$$

Рассмотрим

$$(R_\lambda f_1)''_{xx} = -L(R_\lambda f_1) + q(x)R_\lambda f_1 = [-L(R_\lambda f_1) + \lambda R_\lambda f_1] - \lambda R_\lambda f_1 + q(x)R_\lambda f_1 = -f_1 - \lambda R_\lambda f_1 + q(x)R_\lambda f_1.$$

Следовательно,

$$(R_\lambda f_1)''_{xx} - (R_\lambda^0 f_1)''_{xx} = q(x)R_\lambda f_1 - \lambda (R_\lambda f_1 - R_\lambda^0 f_1). \quad (44)$$

Подставляя (44) в (43), получаем формулу

$$v''_{xx}(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) \left(\int_0^t (q(x)R_\lambda f_1 - \lambda (R_\lambda f_1 - R_\lambda^0 f_1)) \frac{\sin \rho(t-\tau)}{\rho} d\tau \right) d\lambda. \quad (45)$$

Из равенств (42) и (45) следует (38). Лемма доказана. □



Теорема 4. Если выполняются условия (4)–(7), то при любых $x \in [0, 1]$ и $t \in \mathbb{R}$ формальный ряд (12) сходится, и его сумма $u(x, t)$ является классическим решением задачи (1)–(3).

Доказательство. Согласно леммам 7–10 все $u_j(x, t)$, $j = 1, \dots, 4$, удовлетворяют условиям (2). Следовательно, $u(x, t)$ также удовлетворяет этим условиям. На основании этих же лемм

$$u(x, 0) = \sum_{j=1}^4 u_j(x, 0) = 0 + 0 + 0 + \varphi(x) = \varphi(x),$$

$$u'_t(x, 0) = 0 + \psi(x) + 0 + 0 = \psi(x),$$

т. е. $u(x, t)$ удовлетворяет условиям (3).

Рассмотрим, наконец,

$$\begin{aligned} u''_{tt}(x, t) - u''_{xx}(x, t) &= \sum_{j=1}^4 (u''_{j,tt}(x, t) - u''_{j,xx}(x, t)) = \\ &= f_1(x, t) - q(x)u_2(x, t) + \frac{1}{2\pi i} q(x) \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) \left(\int_0^t (R_\lambda f_1) \frac{\sin \rho(t-\tau)}{\rho} d\tau \right) d\lambda - \varphi''(x) = \\ &= f(x, t) - q(x)\varphi(x) - q(x)u_2(x, t) - \\ &- q(x) \left(-\frac{1}{2\pi i} \right) \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) \left(\int_0^t (R_\lambda f_1 - R_\lambda^0 f_1) \frac{\sin \rho(t-\tau)}{\rho} d\tau \right) d\lambda - \\ &- q(x) \left(-\frac{1}{2\pi i} \right) \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) \left(\int_0^t (R_\lambda^0 f_1) \frac{\sin \rho(t-\tau)}{\rho} d\tau \right) d\lambda = \\ &= f(x, t) - q(x)(u_4(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t) + u_1(x, t)) = f(x, t) - q(x)u(x, t). \end{aligned}$$

Таким образом, функция $u(x, t)$ является решением уравнения (1). Теорема доказана. \square

Работа выполнена в рамках госзадания Минобрнауки России (проект № 1.1520.2014К).

Библиографический список

1. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. Резольвентный подход в методе Фурье // Докл. АН. 2014. Т. 458, № 2. С. 138–140. DOI: 10.7868/S0869565214260041.
2. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. Резольвентный подход для волнового уравнения // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55, № 2. С. 229–241. DOI: 10.7868/S0044466915020052.
3. Корнев В. В., Хромов А. П. Резольвентный подход к методу Фурье в одной смешанной задаче для волнового уравнения // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55, № 4. С. 621–630. DOI: 10.7868/S0044466915040079.
4. Корнев В. В., Хромов А. П. Резольвентный подход в методе Фурье для волнового уравнения в несамосопряженном случае // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55, № 7. С. 1156–1167.
5. Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М. : Физматгиз, 1961. 400 с.
6. Чернятин В. А. Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1991. 112 с.
7. Расулов М. Л. Метод контурного интеграла. М. : Наука, 1964. 462 с.
8. Вагабов А. И. Введение в спектральную теорию дифференциальных операторов. Ростов н/Д : Изд-во Рост. ун-та, 1994. 160 с.

Образец для цитирования:

Корнев В. В., Хромов А. П. Резольвентный подход к методу Фурье в смешанной задаче для неоднородного волнового уравнения // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 4. С. 403–413. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-403-413.



Resolvent Approach to Fourier Method in a Mixed Problem for Non-homogeneous Wave Equation

V. V. Kornev¹, A. P. Khromov²

¹Vladimir V. Kornev, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., 410012, Saratov, Russia, KornevVV@info.sgu.ru

²Avgust P. Khromov, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., 410012, Saratov, Russia, KhromovAP@info.sgu.ru

Fourier method of obtaining classic solution is being justified in a mixed problem for non-homogeneous wave equation with a complex potential and fixed boundary conditions under minimal conditions on initial data. The proof is based on resolvent approach which does not need any information on eigen and associated functions of the corresponding spectral problem.

Key words: mixed problem, wave equation, Fourier method, resolvent.

The results have been obtained in the framework of the national tasks of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (project no. 1.1520.2014K).

References

1. Burlutskaya M. Sh., Khromov A. P. Resolvent approach in the Fourier method. *Dokl. Math.*, 2014, vol. 90, no. 2, pp. 545–548. DOI: 10.1134/S1064562414060076.
2. Burlutskaya M. Sh., Khromov A. P. The resolvent approach for the wave equation. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2015, vol. 55, iss. 2, pp. 227–239. DOI: 10.1134/S0965542515020050.
3. Kornev V. V., Khromov A. P. Resolvent approach to the Fourier method in a mixed problem for the wave equation. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2015, vol. 55, iss. 4, pp. 618–627. DOI: 10.1134/S0965542515040077.
4. Kornev V. V., Khromov A. P. A resolvent approach in the Fourier method for the wave equation: the non-selfadjoint case. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2015, vol. 55, iss. 7, pp. 1138–1149. DOI: 10.1134/S0965542515070088.
5. Petrovskii I. G. *Lektsii ob uravneniiakh s chastnyymi proizvodnymi* [Lectures on Partial Differential Equations]. Moscow, Fizmatgiz, 1961. 400 p. (in Russian).
6. Chernyatin V. A. *Obosnovanie metoda Fur'e v smeshannoi zadache dlya uravnenii v chastnykh proizvodnykh* [Justification of the Fourier method in a mixed problem for partial differential equations]. Moscow, Moscow Univ. Press, 1991. 112 p. (in Russian).
7. Rasulov M. L. *Metod konturnogo integrala* [The method of the contour integral]. Moscow, Nauka, 1964. 462 p. (in Russian).
8. Vagabov A. I. *Vvedenie v spektral'nuiu teoriiu differentsial'nykh operatorov* [Introduction to the spectral theory of differential operators]. Rostov-on-Don, Rostov Univ. Press, 1994. 106 p. (in Russian).

Please cite this article in press as:

Kornev V. V., Khromov A. P. Resolvent Approach to Fourier Method in a Mixed Problem for Non-homogeneous Wave Equation. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 4, pp. 403–413 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-403-413.

УДК 514.76

ТРЕХМЕРНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА, НЕ ДОПУСКАЮЩИЕ ИНВАРИАНТНЫХ СВЯЗНОСТЕЙ

Н. П. Можей

Можей Наталья Павловна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры программного обеспечения информационных технологий, Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, mozheynatalya@mail.ru

Если существует хотя бы одна инвариантная аффинная связность на однородном пространстве, то пространство является изотропно-точным, однако обратное неверно. Возможность построения на однородном пространстве инвариантной аффинной связности изучал П. К. Рашевский, к построениям П. К. Рашевского несколько позже пришел К. Номидзу. Цель данной работы — изучить, в каких случаях невозможно построение инвариантной аффинной связности на трехмерном изотропно-точном однородном пространстве, и классифицировать пространства, не допускающие инвариантных связностей. Локальная классификация однородных пространств эквивалентна описанию эффективных пар алгебр Ли,



соответственно найдены все изотропно-точные пары и выделены пары, на которых не существует инвариантных связностей. Особенностью представленной работы является применение чисто алгебраического подхода, сочетание различных методов дифференциальной геометрии, теории групп Ли, алгебр Ли и однородных пространств.

Ключевые слова: инвариантная связность, однородное пространство, группа преобразований, алгебра Ли.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-413-421

ВВЕДЕНИЕ

Понятие аффинной связности ввел Г. Вейль для построения единой теории поля. Возможностью построения на однородном пространстве инвариантной аффинной связности задавался П. К. Рашевский (см. [1] и другие его работы), к построениям П. К. Рашевского несколько позже пришел К. Номидзу (см. [2] и др.). Изучим, в каких случаях невозможно построение инвариантной аффинной связности на трехмерном изотропно-точном однородном пространстве.

Пусть (\bar{G}, M) — трехмерное однородное пространство, где \bar{G} — группа Ли на многообразии M . Зафиксируем произвольную точку $o \in M$ и обозначим через $G = \bar{G}_o$ стабилизатор точки o . Известно, что проблема классификации однородных пространств (\bar{G}, M) эквивалентна классификации пар групп Ли (\bar{G}, G) таких, что $G \subset \bar{G}$. Для изучения однородных пространств важно рассматривать не саму группу \bar{G} , а ее образ на $\text{Diff}(M)$, другими словами, достаточно рассматривать только эффективные действия \bar{G} на M . Поскольку нас интересует только проблема локальной эффективности, без ограничения общности можно считать, что \bar{G} и G связные. Поставим в соответствие (\bar{G}, M) пару $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ алгебр Ли, где $\bar{\mathfrak{g}}$ — алгебра Ли группы \bar{G} , а \mathfrak{g} — подалгебра $\bar{\mathfrak{g}}$, соответствующая подгруппе G . Эта пара локально однозначно определяет структуру (\bar{G}, M) , так как два однородных пространства локально изоморфны тогда и только тогда, когда соответствующие пары алгебр Ли эквивалентны. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется *эффективной*, если \mathfrak{g} не содержит ненулевых идеалов алгебры $\bar{\mathfrak{g}}$, однородное пространство (\bar{G}, M) является локально эффективным тогда и только тогда, когда соответствующая пара алгебр Ли эффективна. *Изотропный \mathfrak{g} -модуль \mathfrak{m}* — это \mathfrak{g} -модуль $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ такой, что $x \cdot (y + \mathfrak{g}) = [x, y] + \mathfrak{g}$. Соответствующее представление $\lambda: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ является *изотропным представлением* пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется *изотропно-точной*, если ее изотропное представление — инъекция.

Разобьем решение проблемы классификации трехмерных изотропно-точных пар $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ на этапы. Сначала классифицируем (с точностью до изоморфизма) точные трехмерные \mathfrak{g} -модули U . Это эквивалентно классификации подалгебр $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ с точностью до сопряженности. Для каждого полученного \mathfrak{g} -модуля U классифицируем (с точностью до эквивалентности) все такие пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$, что \mathfrak{g} -модули $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ и U изоморфны. Соответствующая классификация приведена в [3]. Между инвариантными аффинными связностями на (\bar{G}, M) и линейными отображениями $\Lambda: \bar{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ такими, что $\Lambda|_{\mathfrak{g}} = \lambda$ и отображение Λ является \mathfrak{g} -инвариантным, существует взаимно-однозначное соответствие (см. [2]). Будем называть такие отображения (*инвариантными*) *аффинными связностями* на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Если возможна хотя бы одна связность на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$, то такая пара является изотропно-точной (см. [4]). Аффинные связности на трехмерных однородных пространствах рассматриваются, например, в [5].

Того, что пара является изотропно-точной, не достаточно для существования инвариантных связностей. Простейший пример этого можно привести в размерности $\text{codim}_{\bar{\mathfrak{g}}}\mathfrak{g} = 2$. Зададим алгебру $\bar{\mathfrak{g}}$ следующей таблицей умножения:

	e_1	e_2	u_1	u_2	
e_1	0	e_2	$2u_1$	$e_2 + u_2$	
e_2	$-e_2$	0	0	u_1	,
u_1	$-2u_1$	0	0	0	
u_2	$-e_2 - u_2$	$-u_1$	0	0	

а \mathfrak{g} порождается e_1 и e_2 . Прямые вычисления показывают, что не существует аффинных связностей на этой паре. Более того, полный анализ всех изотропно-точных эффективных пар коразмерности 2 (классификацию таких пар можно найти в [6]) показывает, что это единственный пример такой коразмерности. Найдем теперь все возможные пары коразмерности 3.

Будем определять пару $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ таблицей умножения алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}$. Через $\{e_1, \dots, e_n\}$ будем обозначать базис $\bar{\mathfrak{g}}$ ($n = \dim \bar{\mathfrak{g}}$). Полагаем, что алгебра Ли \mathfrak{g} порождается e_1, \dots, e_{n-3} . Пусть



смотрим, например, случай, когда изотропное представление имеет вид 3.23. Классифицируем (с точностью до эквивалентности) пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ такие, что \mathfrak{g} -модули $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ изоморфны 3.23.

Лемма 1. Любая пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ типа 3.23 эквивалентна одной и только одной из следующих пар:

1.	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$(1-\lambda)e_2$	$2(1-\lambda)e_3$	u_1	λu_2	$(2\lambda-1)u_3$
e_2	$(\lambda-1)e_2$	0	0	0	u_1	u_2
e_3	$2(\lambda-1)e_3$	0	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0
u_2	$-\lambda u_2$	$-u_1$	0	0	0	0
u_3	$(1-2\lambda)u_3$	$-u_2$	$-u_1$	0	0	0

2. $\lambda = 3/5$	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3	3. $\lambda = 1/2$	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$\frac{2}{5}e_2$	$\frac{4}{5}e_3$	u_1	$\frac{3}{5}u_2$	$\frac{1}{5}u_3$	e_1	0	$\frac{1}{2}e_2$	e_3	u_1	$\frac{1}{2}u_2$	0
e_2	$-\frac{2}{5}e_2$	0	0	0	u_1	u_2	e_2	$-\frac{1}{2}e_2$	0	0	0	u_1	u_2
e_3	$-\frac{4}{5}e_3$	0	0	0	0	u_1	e_3	$-e_3$	0	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0	u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0
u_2	$-\frac{3}{5}u_2$	$-u_1$	0	0	0	e_3	u_2	$-\frac{1}{2}u_2$	$-u_1$	0	0	0	e_2
u_3	$-\frac{1}{5}u_3$	$-u_2$	$-u_1$	0	$-e_3$	0	u_3	0	$-u_2$	$-u_1$	0	$-e_2$	0

4. $\lambda = 1/2$	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$(1/2)e_2$	e_3	u_1	$(1/2)u_2$	0
e_2	$-(1/2)e_2$	0	0	0	u_1	u_2
e_3	$-e_3$	0	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0
u_2	$-(1/2)u_2$	$-u_1$	0	0	0	$-e_2$
u_3	0	$-u_2$	$-u_1$	0	e_2	0

5. $\lambda = 1/2$	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$(1/2)e_2$	e_3	u_1	$(1/2)u_2$	0
e_2	$-(1/2)e_2$	0	0	0	u_1	u_2
e_3	$-e_3$	0	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	u_1
u_2	$-(1/2)u_2$	$-u_1$	0	0	0	$\alpha e_2 + u_2$
u_3	0	$-u_2$	$-u_1$	$-u_1$	$-\alpha e_2 - u_2$	0

6. $\lambda = 3/4$	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$(1/4)e_2$	$(1/2)e_3$	u_1	$(3/4)u_2$	$(1/2)u_3 + e_3$
e_2	$-(1/4)e_2$	0	0	0	u_1	u_2
e_3	$-(1/2)e_3$	0	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0
u_2	$-(3/4)u_2$	$-u_1$	0	0	0	0
u_3	$-(1/2)u_3 - e_3$	$-u_2$	$-u_1$	0	0	0

7. $\lambda = 0$	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	$2e_3$	u_1	0	$-u_3$
e_2	$-e_2$	0	0	$-e_3$	$u_1 - 2e_2$	u_2
e_3	$-2e_3$	0	0	0	$-e_3$	u_1
u_1	$-u_1$	e_3	0	0	u_1	0
u_2	0	$-u_1 + 2e_2$	e_3	$-u_1$	0	$-2u_3$
u_3	u_3	$-u_2$	$-u_1$	0	$2u_3$	0



Доказательство. Пусть $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ — базис \mathfrak{g} , где

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda - 1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Через \mathfrak{h} обозначим нильпотентную подалгебру алгебры Ли \mathfrak{g} , порожденную вектором e_1 . Рассмотрим следующие случаи:

1. $\lambda \notin \{0, 2/3, 3/4\}$. Тогда

$$\bar{\mathfrak{g}}^{(1-\lambda)}(\mathfrak{h}) \supset \mathbb{R}e_2, \bar{\mathfrak{g}}^{(0)}(\mathfrak{h}) \supset \mathbb{R}e_1, \bar{\mathfrak{g}}^{(2-2\lambda)}(\mathfrak{h}) \supset \mathbb{R}e_3, \bar{\mathfrak{g}}^{(1)}(\mathfrak{h}) \supset \mathbb{R}u_1,$$

$$\bar{\mathfrak{g}}^{(\lambda)}(\mathfrak{h}) \supset \mathbb{R}u_2, \bar{\mathfrak{g}}^{(2\lambda-1)}(\mathfrak{h}) \supset \mathbb{R}u_3,$$

$$[u_1, u_2] \in \bar{\mathfrak{g}}^{(1+\lambda)}(\mathfrak{h}), [u_1, u_3] \in \bar{\mathfrak{g}}^{(2\lambda)}(\mathfrak{h}), [u_2, u_3] \in \bar{\mathfrak{g}}^{(3\lambda-1)}(\mathfrak{h}).$$

В силу тождества Якоби пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ имеет вид

	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$(1-\lambda)e_2$	$2(1-\lambda)e_3$	u_1	λu_2	$(2\lambda-1)u_3$
e_2	$(\lambda-1)e_2$	0	0	0	u_1	u_2
e_3	$2(\lambda-1)e_3$	0	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0
u_2	$-\lambda u_2$	$-u_1$	0	0	0	$c_3 e_3$
u_3	$(1-2\lambda)u_3$	$-u_2$	$-u_1$	0	$-c_3 e_3$	0

где $c_3(\lambda - 3/5) = 0$, или

	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$(1/2)e_2$	e_3	u_1	$(1/2)u_2$	0
e_2	$-(1/2)e_2$	0	0	0	u_1	u_2
e_3	$-e_3$	0	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	$\beta_1 u_1$
u_2	$-(1/2)u_2$	$-u_1$	0	0	0	$c_2 e_2 + \beta_1 u_2$
u_3	0	$-u_2$	$-u_1$	$-\beta_1 u_1$	$-c_2 e_2 - \beta_1 u_2$	0

1.1. $\lambda \neq 1/2$.

1.1.1. $c_3 = 0$. Тогда пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ тривиальна.

1.1.2. $\lambda = 3/5, c_3 \neq 0$. Тогда пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна паре $(\bar{\mathfrak{g}}_2, \mathfrak{g}_2)$, эквивалентность показывает отображение $\pi : \bar{\mathfrak{g}}_2 \rightarrow \bar{\mathfrak{g}}$, где $\pi(e_1) = e_1, \pi(e_2) = c_3^{-1/3}e_2, \pi(e_3) = c_3^{-2/3}e_3, \pi(u_1) = c_3^{-4/3}u_1, \pi(u_2) = (1/c_3)u_2, \pi(u_3) = c_3^{-2/3}u_3$.

1.2. $\lambda = 1/2$.

1.2.1. $\beta_1 = c_2 = 0$. Тогда пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ тривиальна.

1.2.2. $\beta_1 = 0, c_2 \neq 0$. Тогда пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна паре $(\bar{\mathfrak{g}}_i, \mathfrak{g}_i)$, где $i = 3$ или $i = 4$ (отображение $\pi : \bar{\mathfrak{g}}_i \rightarrow \bar{\mathfrak{g}}$, где $\pi(e_j) = e_j, j = \overline{1, 3}, \pi(u_k) = |c_2|^{-1/2}u_k, k = \overline{1, 3}$, если $c_2 > 0$, то $i = 3$, если $c_2 < 0$, то $i = 4$).

1.2.3. $\beta_1 \neq 0$. Тогда пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна паре $(\bar{\mathfrak{g}}_5, \mathfrak{g}_5)$ посредством отображения $\pi : \bar{\mathfrak{g}}_5 \rightarrow \bar{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_i) = e_i, i = \overline{1, 3}, \pi(u_j) = (1/\beta_1)u_j, j = \overline{1, 3}$.

2. $\lambda = 3/4$. Имеем $\bar{\mathfrak{g}}^{(1/4)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_2, \bar{\mathfrak{g}}^{(0)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_1, \bar{\mathfrak{g}}^{(1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}u_1, \bar{\mathfrak{g}}^{(3/4)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}u_2,$

$$\bar{\mathfrak{g}}^{(1/2)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}u_3 \oplus \mathbb{R}e_3, [u_1, u_2] \in \bar{\mathfrak{g}}^{(7/4)}(\mathfrak{h}) \Rightarrow [u_1, u_2] = 0, [u_1, u_3] \in \bar{\mathfrak{g}}^{(3/2)}(\mathfrak{h}) \Rightarrow [u_1, u_3] = 0,$$

$$[u_2, u_3] \in \bar{\mathfrak{g}}^{(5/4)}(\mathfrak{h}) \Rightarrow [u_2, u_3] = 0.$$



В силу тождества Якоби пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ имеет вид

	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$(1/4)e_2$	$(1/2)e_3$	u_1	$(3/4)u_2$	$(1/2)u_3 + pe_3$
e_2	$-(1/4)e_2$	0	0	0	u_1	u_2
e_3	$-(1/2)e_3$	0	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0
u_2	$-(3/4)u_2$	$-u_1$	0	0	0	0
u_3	$-(1/2)u_3 - pe_3$	$-u_2$	$-u_1$	0	0	0

2.1. $p = 0$. Тогда пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ тривиальна.

2.2. $p \neq 0$. Тогда пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна паре $(\bar{\mathfrak{g}}_6, \mathfrak{g}_6)$, эквивалентность показывает отображение $\pi : \bar{\mathfrak{g}}_6 \rightarrow \bar{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_i) = e_i, i = \overline{1, 3}, \pi(u_j) = (1/p)u_j, j = \overline{1, 3}$.

3. $\lambda = 0$. Тогда $\bar{\mathfrak{g}}^{(1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_2 \oplus \mathbb{R}u_1, \bar{\mathfrak{g}}^{(0)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}u_2, \bar{\mathfrak{g}}^{(2)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_3, \bar{\mathfrak{g}}^{(-1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}u_3$ и $[u_1, u_2] \in \bar{\mathfrak{g}}^{(1)}(\mathfrak{h}) \Rightarrow [u_1, u_2] = a_2e_2 + \alpha_1u_1, [u_1, u_3] \in \bar{\mathfrak{g}}^{(0)}(\mathfrak{h}) \Rightarrow [u_1, u_3] = b_1e_1 + \beta_2u_2, [u_2, u_3] \in \bar{\mathfrak{g}}^{(-1)}(\mathfrak{h}) \Rightarrow [u_2, u_3] = \gamma_3u_3$. Учитывая тождество Якоби, получаем, что пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ имеет вид

	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	$2e_3$	u_1	0	$-u_3$
e_2	$-e_2$	0	0	pe_3	$u_1 + 2pe_2$	u_2
e_3	$-2e_3$	0	0	0	pe_3	u_1
u_1	$-u_1$	$-pe_3$	0	0	$-pu_1$	0
u_2	0	$-u_1 - 2pe_2$	$-pe_3$	pu_1	0	$2pu_3$
u_3	u_3	$-u_2$	$-u_1$	0	$-2pu_3$	0

3.1. $p = 0$. Тогда пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ тривиальна.

3.2. $p \neq 0$. Тогда пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна паре $(\bar{\mathfrak{g}}_7, \mathfrak{g}_7)$ посредством отображения $\pi : \bar{\mathfrak{g}}_7 \rightarrow \bar{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_1) = e_1, \pi(u_1) = u_1, \pi(e_2) = pe_2, \pi(u_2) = (1/p)u_2, \pi(e_3) = p^2e_3, \pi(u_3) = (1/p^2)u_3$.

4. $\lambda = 2/3$. Имеем $\bar{\mathfrak{g}}^{(1/3)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_2 \oplus \mathbb{R}u_3, \bar{\mathfrak{g}}^{(0)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_1, \bar{\mathfrak{g}}^{(2/3)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_3 \oplus \mathbb{R}u_2, \bar{\mathfrak{g}}^{(1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}u_1, [u_1, u_2] \in \bar{\mathfrak{g}}^{(5/3)}(\mathfrak{h}) \Rightarrow [u_1, u_2] = 0, [u_1, u_3] \in \bar{\mathfrak{g}}^{(4/3)}(\mathfrak{h}) \Rightarrow [u_1, u_3] = 0, [u_2, u_3] \in \bar{\mathfrak{g}}^{(1)}(\mathfrak{h}) \Rightarrow [u_2, u_3] = \gamma_1u_1$. В силу тождества Якоби пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ принимает вид

	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$(1/3)e_2$	$(2/3)e_3$	u_1	$(2/3)u_2$	$(1/3)u_3$
e_2	$-(1/3)e_2$	0	0	0	u_1	u_2
e_3	$-(2/3)e_3$	0	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0
u_2	$-(2/3)u_2$	$-u_1$	0	0	0	γ_1u_1
u_3	$-(1/3)u_3$	$-u_2$	$-u_1$	0	$-\gamma_1u_1$	0

Тогда пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна тривиальной паре $(\bar{\mathfrak{g}}_1, \mathfrak{g}_1)$, эквивалентность показывает отображение $\pi : \bar{\mathfrak{g}}_1 \rightarrow \bar{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_i) = e_i, i = \overline{1, 3}, \pi(u_1) = u_1, \pi(u_2) = u_2, \pi(u_3) = u_3 + \gamma_1e_2$.

Теперь осталось показать, что полученные пары не эквивалентны друг другу.

Поскольку $\dim D^2\bar{\mathfrak{g}}_1 \neq \dim D^2\bar{\mathfrak{g}}_2$, видим, что пары $(\bar{\mathfrak{g}}_1, \mathfrak{g}_1)$ и $(\bar{\mathfrak{g}}_2, \mathfrak{g}_2)$ не эквивалентны.

Пусть $\lambda = 3/4$. Рассмотрим гомоморфизмы $f_i : \bar{\mathfrak{g}}_i \rightarrow \mathfrak{gl}(5, \mathbb{R}), i = 1, 6$, где $f_i(x)$ — матрица отображения $ad|_{D\bar{\mathfrak{g}}_i}x$ в базисе $\{e_2, e_3, u_1, u_2, u_3\}$ пространства $D\bar{\mathfrak{g}}_i$. Так как подалгебры $f_i(\bar{\mathfrak{g}}_i)$ не сопряжены, можно заключить, что пары $(\bar{\mathfrak{g}}_1, \mathfrak{g}_1)$ и $(\bar{\mathfrak{g}}_6, \mathfrak{g}_6)$ не эквивалентны. Поскольку $\dim D^2\bar{\mathfrak{g}}_1 \neq \dim D^2\bar{\mathfrak{g}}_7$, видим, что пары $(\bar{\mathfrak{g}}_1, \mathfrak{g}_1)$ и $(\bar{\mathfrak{g}}_7, \mathfrak{g}_7)$ не эквивалентны.

Пусть $\lambda = 1/2$. Рассмотрим гомоморфизмы $f_i : \bar{\mathfrak{g}}_i \rightarrow \mathfrak{gl}(4, \mathbb{R}), i = 1, \overline{3, 5}$, где $f_i(x)$ — матрица отображения $ad|_{D\bar{\mathfrak{g}}_i}x$ в базисе $\{e_2, e_3, u_1, u_2\}$ пространства $\bar{\mathfrak{g}}_i$. Поскольку подалгебры $f_i(\bar{\mathfrak{g}}_i)$ не сопряжены, то пары $(\bar{\mathfrak{g}}_1, \mathfrak{g}_1), (\bar{\mathfrak{g}}_3, \mathfrak{g}_3), (\bar{\mathfrak{g}}_4, \mathfrak{g}_4), (\bar{\mathfrak{g}}_5, \mathfrak{g}_5)$ не эквивалентны друг другу. \square

Лемма 2. Если пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ не допускает инвариантных аффинных связностей, а \mathfrak{g} имеет вид 3.23, то $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна одной из пар 3.23.6, 3.23.7.



Доказательство. Пусть $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ — трехмерное однородное пространство типа 3.23.3, $\Lambda|_{\mathfrak{g}}$ — изотропное представление \mathfrak{g} . Пусть здесь и далее

$$\Lambda(u_1) = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{pmatrix}, \quad \Lambda(u_2) = \begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & q_{1,3} \\ q_{2,1} & q_{2,2} & q_{2,3} \\ q_{3,1} & q_{3,2} & q_{3,3} \end{pmatrix}, \quad \Lambda(u_3) = \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ r_{2,1} & r_{2,2} & r_{2,3} \\ r_{3,1} & r_{3,2} & r_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Отображение Λ — \mathfrak{g} -инвариантно. Следовательно, из $[\Lambda(e_3), \Lambda(u_1)] = \Lambda([e_3, u_1])$ получаем $[\Lambda(e_3), \Lambda(u_1)] = 0$. Тогда имеем $p_{3,1} = p_{3,2} = p_{2,1} = 0$, $p_{3,3} = p_{1,1}$. $[\Lambda(e_2), \Lambda(u_1)] = \Lambda([e_2, u_1])$, откуда получаем $[\Lambda(e_2), \Lambda(u_1)] = 0$, $p_{2,3} = p_{1,2}$, $p_{2,2} = p_{1,1}$. $[\Lambda(e_1), \Lambda(u_1)] = \Lambda(u_1)$, тогда $p_{1,1} = p_{1,2} = 0$. Если $[\Lambda(e_3), \Lambda(u_2)] = 0$, то $q_{3,1} = q_{3,2} = q_{2,1} = 0$, $q_{3,3} = q_{1,1}$. $[\Lambda(e_2), \Lambda(u_2)] = \Lambda(u_1)$, получаем $q_{2,3} = q_{1,2} + p_{1,3}$, $q_{2,2} = q_{1,1}$. $[\Lambda(e_1), \Lambda(u_2)] = (1/2)\Lambda(u_2)$, откуда $q_{1,1} = q_{1,3} = 0$. Если $[\Lambda(e_3), \Lambda(u_3)] = \Lambda(u_1)$, то $r_{3,1} = r_{3,2} = r_{2,1} = 0$, $r_{3,3} = r_{1,1} + p_{1,3}$. $[\Lambda(e_2), \Lambda(u_3)] = \Lambda(u_2)$, следовательно, $r_{2,2} = r_{1,1}$, $q_{1,2} = 0$, $r_{2,3} = r_{1,2}$. $[\Lambda(e_1), \Lambda(u_3)] = 0$, имеем $r_{1,2} = r_{1,3} = 0$, аффинная связность существует и имеет вид

$$\Lambda(u_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda(u_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda(u_3) = \begin{pmatrix} r_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & r_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & r_{1,1} + p_{1,3} \end{pmatrix}.$$

Тензор кривизны имеет вид

$$R(u_1, u_2) = 0, \quad R(u_1, u_3) = [\Lambda(u_1), \Lambda(u_3)] - \Lambda([u_1, u_3]) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3}^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R(u_2, u_3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3}^2 - 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

тензор кручения

$$T(u_1, u_2) = 0, \quad T(u_1, u_3) = \Lambda(u_1)(u_3)_m - \Lambda(u_3)(u_1)_m - [u_1, u_3]_m = (p_{1,3} - r_{1,1}, 0, 0),$$

$$T(u_2, u_3) = \Lambda(u_2)(u_3)_m - \Lambda(u_3)(u_2)_m - [u_2, u_3]_m = (0, p_{1,3} - r_{1,1}, 0).$$

Пусть $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ — трехмерное однородное пространство типа 3.23.6, отображение Λ \mathfrak{g} -инвариантно, следовательно, $[\Lambda(e_3), \Lambda(u_1)] = \Lambda([e_3, u_1])$. Откуда $[\Lambda(e_3), \Lambda(u_1)] = 0$. Имеем $p_{3,1} = p_{3,2} = p_{2,1} = 0$, $p_{3,3} = p_{1,1}$. Из $[\Lambda(e_2), \Lambda(u_1)] = \Lambda([e_2, u_1])$ получаем $[\Lambda(e_2), \Lambda(u_1)] = 0$, $p_{2,3} = p_{1,2}$, $p_{2,2} = p_{1,1}$. $[\Lambda(e_1), \Lambda(u_1)] = \Lambda(u_1)$, тогда $p_{1,1} = 0$. Если $[\Lambda(e_3), \Lambda(u_2)] = 0$, то $q_{3,1} = q_{3,2} = q_{2,1} = 0$, $q_{3,3} = q_{1,1}$. $[\Lambda(e_2), \Lambda(u_2)] = \Lambda(u_1)$, следовательно, $p_{1,2} = 0$, $q_{2,3} = q_{1,2} + p_{1,3}$, $q_{2,2} = q_{1,1}$. Если $[\Lambda(e_3), \Lambda(u_3)] = \Lambda(u_1)$, то $r_{3,1} = r_{3,2} = r_{2,1} = 0$, $r_{3,3} = r_{1,1} + p_{1,3}$. $[\Lambda(e_2), \Lambda(u_3)] = \Lambda(u_2)$, тогда $r_{2,2} = r_{1,1}$, $q_{1,2} = q_{1,1} = 0$, $r_{2,3} = r_{1,2} + q_{1,3}$. Если $[\Lambda(e_1), \Lambda(u_3)] = 0$, то $r_{1,2} = r_{1,3} = 0$. Учитывая $[\Lambda(e_1), \Lambda(u_3)] = (1/2)\Lambda(u_3) + \Lambda(e_3)$, имеем

$$\begin{pmatrix} -1/2r_{1,1} & -1/4r_{1,2} & -1 \\ 0 & -1/2r_{1,1} & -1/4r_{1,2} - 1/4q_{1,3} \\ 0 & 0 & -1/2r_{1,1} - 1/2p_{1,3} \end{pmatrix} = 0,$$

т. е. у уравнения нет решений, пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ не допускает аффинных связностей. Прямыми вычислениями получаем результаты для остальных пар типа 3.23. \square

Аналогично, если пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ не допускает аффинных связностей, а \mathfrak{g} имеет тип 3.19, то $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна одной из пар 3.19.2, 3.19.3, 3.19.5, 3.19.6, 3.19.8, 3.19.9, 3.19.10, 3.19.11, 3.19.12, 3.19.13, 3.19.15 [3]. Например, если $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ — трехмерное однородное пространство типа 3.19.2, то

$$\Lambda(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \Lambda(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$(\Lambda|_{\mathfrak{g}} = \lambda)$. Отображение Λ — \mathfrak{g} -инвариантно. Если $[\Lambda(e_3), \Lambda(u_1)] = \Lambda([e_3, u_1])$, то

$$[\Lambda(e_3), \Lambda(u_1)] = 0, \quad \begin{pmatrix} p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} - p_{1,1} \\ 0 & 0 & -p_{2,1} \\ 0 & 0 & -p_{3,1} \end{pmatrix} = 0, \quad p_{3,1} = p_{3,2} = p_{2,1} = 0, \quad p_{3,3} = p_{1,1}.$$

Если $[\Lambda(e_2), \Lambda(u_1)] = \Lambda([e_2, u_1])$, то

$$[\Lambda(e_2), \Lambda(u_1)] = -\Lambda(e_2), \quad \begin{pmatrix} 0 & p_{2,2} - p_{1,1} - 1 & p_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0, \quad p_{2,2} = p_{1,1} + 1, \quad p_{2,3} = 0.$$

Если $[\Lambda(e_1), \Lambda(u_1)] = \Lambda([e_1, u_1])$, то $[\Lambda(e_1), \Lambda(u_1)] = 0, p_{1,2} = 0$.

Поскольку $[\Lambda(e_3), \Lambda(u_2)] = 0, q_{3,1} = q_{3,2} = q_{2,1} = 0, q_{3,3} = q_{1,1}$; если $[\Lambda(e_2), \Lambda(u_2)] = \Lambda(u_1)$, то $\begin{pmatrix} -p_{1,1} & q_{2,2} - q_{1,1} & q_{2,3} - p_{1,3} \\ 0 & -p_{1,1} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & -p_{1,1} \end{pmatrix} = 0$, уравнение не имеет решений, пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ не допускает аффинных связностей.

Если пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ не допускает аффинных связностей, а \mathfrak{g} имеет тип 2.9, то $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна одной из пар 2.9.8, 2.9.9, 2.9.10, 2.9.17. Например, если $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ — трехмерное однородное пространство типа 2.9.17 [3], то

$$\Lambda(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

(так как $\Lambda|_{\mathfrak{g}} = \lambda$). Если Λ — \mathfrak{g} -инвариантно, то $[\Lambda(e_2), \Lambda(u_1)] = \Lambda([e_2, u_1])$. Следовательно, $[\Lambda(e_2), \Lambda(u_1)] = 0, p_{3,1} = p_{3,2} = p_{2,1} = 0, p_{3,3} = p_{1,1}$. Из $[\Lambda(e_1), \Lambda(u_1)] = \Lambda([e_1, u_1])$ следует $[\Lambda(e_1), \Lambda(u_1)] = \Lambda(u_1)$, тогда $p_{1,1} = p_{1,2} = p_{1,3} = p_{2,2} = p_{2,3} = 0$. Из $[\Lambda(e_2), \Lambda(u_2)] = \Lambda(e_1)$ следует, что $\begin{pmatrix} q_{3,1} - 1 & q_{3,2} & q_{3,3} - q_{1,1} \\ 0 & 2 & -q_{2,1} \\ 0 & 0 & -q_{3,1} + 1 \end{pmatrix} = 0$, пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ не допускает аффинных связностей. Прямыми вычислениями получаем результаты в остальных случаях.

Аналогично, если пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ не допускает аффинных связностей, а \mathfrak{g} имеет тип 4.6, то $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна паре 4.6.2 [3]. Если пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ не допускает аффинных связностей, а \mathfrak{g} имеет тип 5.10, то $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна одной из пар 5.10.3, 5.10.4, 5.10.7, 5.10.8, 5.10.9. Если \mathfrak{g} имеет тип 4.8, то $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна одной из пар 4.8.7, 4.8.8. Если \mathfrak{g} имеет тип 4.10, то $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна 4.10.2, 4.10.3. Если \mathfrak{g} имеет тип 4.11, то $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна 4.11.6, 4.11.7, 4.11.8, 4.11.9. Если \mathfrak{g} имеет тип 4.12, то $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна 4.12.2. Если \mathfrak{g} имеет тип 4.14, то $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна 4.14.2, 4.14.3, 4.14.4, 4.14.5. Если \mathfrak{g} имеет тип 4.20, то $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна 4.20.6, 4.20.7, 4.20.8, 4.20.9, 4.20.10, 4.20.11, 4.20.12, 4.20.13. Если \mathfrak{g} имеет тип 4.21, то $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна 4.21.8, 4.21.9, 4.21.10, 4.21.12, 4.21.13, 4.21.14, 4.21.15, 4.21.16, 4.21.17, 4.21.18, 4.21.19, 4.21.20, 4.21.21, 4.21.22, 4.21.23. Если \mathfrak{g} имеет тип 3.8, то $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна 3.8.4, 3.8.5, 3.8.6. Если \mathfrak{g} имеет тип 3.13, то $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна 3.13.7, 3.13.14, 3.13.15, 3.13.16, 3.13.17, 3.13.18, 3.13.19, 3.13.20, 3.13.21, 3.13.22, 3.13.23, 3.13.24, 3.13.25. Если \mathfrak{g} имеет тип 3.14, то $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна 3.14.4. Если \mathfrak{g} имеет тип 3.20, то $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна 3.20.6, 3.20.7, 3.20.8, 3.20.9, 3.20.10, 3.20.16, 3.20.17, 3.20.18, 3.20.19, 3.20.28, 3.20.29. Если \mathfrak{g} имеет тип 3.21, то $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна 3.21.2, 3.21.3, 3.21.4, 3.21.5. Если \mathfrak{g} имеет тип 3.22, то $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна 3.22.2. Если \mathfrak{g} имеет тип 3.24, то $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна 3.24.2. Если \mathfrak{g} имеет тип 3.25, то $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна 3.25.9, 3.25.10, 3.25.11, 3.25.12, 3.25.13, 3.25.14, 3.25.15, 3.25.16, 3.25.17, 3.25.18, 3.25.19, 3.25.20, 3.25.21, 3.25.22, 3.25.23, 3.25.24, 3.25.27, 3.25.28, 3.25.29, 3.25.31. Если \mathfrak{g} имеет тип 3.26, то $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна 3.26.2. Если \mathfrak{g} имеет тип 3.27, то $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна 3.27.5. Если \mathfrak{g} имеет тип 3.29, то $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна 3.29.2. Если \mathfrak{g} имеет тип 2.8, то $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна 2.8.8, 2.8.9, 2.8.10, 2.8.11. Если \mathfrak{g} имеет тип 2.13, то $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна 2.13.9.

Проводя аналогичные рассуждения для всех подалгебр, получаем, что других трехмерных изотропно-точных однородных пространств, не допускающих инвариантных связностей, кроме представленных выше, не существует. \square



Библиографический список

1. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М. : Наука, 1967. 664 с.
2. Nomizu K. Invariant affine connections on homogeneous spaces // Amer. J. Math. 1954. Vol. 76, № 1. P. 33–65. DOI: 10.2307/2372398.
3. Можей Н. П. Трёхмерные изотропно-точные однородные пространства и связности на них. Казань : Изд-во Казан. ун-та, 2015. 394 с.
4. Kobayashi S., Nomizu K. Foundations of differential geometry. N. Y. : John Wiley and Sons, 1963. Vol. 1. 340 p.; 1969. Vol. 2. 485 p.
5. Mozhey N. Invariant affine connections on three-dimensional homogeneous spaces with nonsolvable transformation group // Lobachevskii J. Math. 2014. Vol. 35, № 3. P. 218–240. DOI: 10.1134/S1995080214030093.
6. Komrakov B., Tchourioumov A., Doubrov B. Two-dimensional homogeneous spaces. Preprint series: Pure mathematics. 1993. № 17. 142 p. URL: <http://urn.nb.no/URN:NBN:no-47681> (дата обращения: 15.11.2015).

Образец для цитирования:

Можей Н. П. Трёхмерные однородные пространства, не допускающие инвариантных связностей // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 4. С. 413–421. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-413-421.

Three-dimensional Homogeneous Spaces, Not Admitting Invariant Connections

N. P. Mozhey

Natalya P. Mozhey, Belarussian State University of Informatics and Radioelectronics, 6, P. Brovki str., 220013, Minsk, Belarus, mozheynatalya@mail.ru

The purpose of the work is the classification of three-dimensional isotropy-faithful homogeneous spaces, not admitting invariant connections. The local classification of homogeneous spaces is equivalent to the description of effective pairs of Lie algebras. If there exists at least one invariant connection then the space is isotropy-faithful, but the isotropy-faithfulness is not sufficient for the space in order to have invariant connections. The peculiarity of techniques presented in the work is the application of purely algebraic approach, the compound of different methods of differential geometry, theory of Lie groups, Lie algebras and homogeneous spaces.

Key words: invariant connection, homogeneous space, transformation group, Lie algebra.

References

1. Rashevskii P. K. *Rimanova geometriia i tenzornyi analiz* [Riemannian geometry and tensor analysis]. Moscow, Nauka, 1967, 664 p. (in Russian).
2. Nomizu K. Invariant affine connections on homogeneous spaces. *Amer. J. Math.*, 1954, vol. 76, no. 1, pp. 33–65. DOI: 10.2307/2372398.
3. Mozhey N. P. *Trekhmernye izotropno-tochnye odnorodnye prostranstva i sviaznosti na nikh* [Three-dimensional isotropy-faithful homogeneous spaces and connections on them]. Kazan', Kazan' Univ. Press, 2015, 394 p. (in Russian).
4. Kobayashi S., Nomizu K. *Foundations of differential geometry*. New York, John Wiley and Sons, 1963, vol. 1, 340 p.; 1969, vol. 2, 485 p.
5. Mozhey N. Invariant affine connections on three-dimensional homogeneous spaces with nonsolvable transformation group. *Lobachevskii J. Math.*, 2014, vol. 35, no. 3, pp. 218–240. DOI: 10.1134/S1995080214030093.
6. Komrakov B., Tchourioumov A., Doubrov B. Two-dimensional homogeneous spaces. *Preprint series: Pure mathematics*, 1993, no. 17. 142 p. Available at: <http://urn.nb.no/URN:NBN:no-4768> (accessed 15.11.2015).

Please cite this article in press as:

Mozhey N. P. Three-dimensional Homogeneous Spaces, Not Admitting Invariant Connections. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 4, pp. 413–421 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-413-421.



УДК 512.546

О ФАКТОРТОПОЛОГИЯХ В ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПОЛУГРУППАХ И ГРУППАХ

С. Р. Султанов

Султанов Сергей Режепович, кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой математики и методики преподавания математических дисциплин, Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина, s.sultanov@rsu.edu.ru

В работе рассматривается вопрос определения факторполугруппы топологической полугруппы при помощи открытых отношений конгруэнтности на данной топологической полугруппе. Основываясь на этом подходе, получено описание всех открытых гомоморфных образов топологической полугруппы. Аналогичным образом данный подход применяется к описанию всех открытых гомоморфных образов топологической группы.

Ключевые слова: топологическая факторполугруппа, гомоморфизмы топологических полугрупп, топологическая факторгруппа.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-422-424

*Светлой памяти Учителя,
Виктора Владимировича Вагнера,
посвящается*

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, нормальные делители дискретной группы находятся во взаимно однозначном соответствии с отношениями конгруэнтности на ней, и факторгруппы по конгруэнтностям совпадают с факторгруппами по нормальным делителям [1, с. 46]. Аналогичным образом мы можем получить все факторполугруппы, рассматривая отношения конгруэнтности на данной полугруппе. Так, например, Виктор Владимирович Вагнер показывал, что все гомоморфные образы полугруппы исчерпываются (с точностью до изоморфизма) ее факторполугруппами по конгруэнтностям (стабильным отношениям эквивалентности в его терминологии, которой мы и будем придерживаться) на заданной полугруппе. Здесь мы покажем, что данный подход можно применить к определению топологической факторполугруппы и факторгруппы, и установим в связи с этим аналоги некоторых известных свойств.

Напомним некоторые определения и известные результаты. Пусть G — полугруппа и ε — стабильное отношение эквивалентности на полугруппе G , т.е. для любых элементов a, b, c, d полугруппы G из эквивалентностей $a \sim b$ и $c \sim d$ следует $ac \sim bd$. Определим операцию « \cdot » произведения классов в фактор-множестве G/ε , полагая для любых классов эквивалентности $\varepsilon(a)$ и $\varepsilon(b)$: $\varepsilon(a) \cdot \varepsilon(b) = \varepsilon(a' b')$, где a' и b' — произвольные элементы из классов $\varepsilon(a)$ и $\varepsilon(b)$ соответственно. Тогда фактор-множество G/ε с определенной выше операцией « \cdot » образует факторполугруппу полугруппы G .

1. ТОПОЛОГИЯ ФАКТОРПОЛУГРУППЫ

Перейдем к вопросу определения топологической факторполугруппы. Пусть G — топологическая полугруппа и ε — стабильное отношение эквивалентности на полугруппе G . Наделим фактор-множество G/ε фактортопологией [2, с. 147] и покажем, что если отношение эквивалентности ε является открытым на пространстве G , то определенная нами операция произведения классов « \cdot » будет непрерывной в факторполугруппе G/ε , наделенной фактортопологией. Действительно, пусть a^* , b^* — произвольные элементы факторпространства G/ε , U^* является открытой окрестностью элемента $a^* \cdot b^*$ в пространстве G/ε . Тогда множество $f^{-1}(U^*) = U$ является открытым в пространстве G , где f — естественное отображение пространства G на G/ε . Пусть $a^* = \varepsilon(a)$, $b^* = \varepsilon(b)$. Поскольку f — гомоморфизм полугруппы G на факторполугруппу G/ε , то $ab \in U$. Следовательно, найдутся открытые в пространстве G множества $V \ni a$ и $W \ni b$ такие, что $VW \subset U$. Тогда $f(VW) \subset U^*$, а поскольку $f(VW) = f(V) \cdot f(W)$, то $f(V)f(W) \subset U^*$. Заметим, что $f(V)$ и $f(W)$ являются открытыми окрестностями точек a^* и b^* факторпространства G/ε в силу открытости отображения f , и, следовательно, непрерывность операции « \cdot » в G/ε доказана.



Таким образом, мы установили что каждое открытое стабильное отношение эквивалентности на топологической полугруппе G будет определять *топологическую факторполугруппу* $(G/\varepsilon, \cdot)$, которую в дальнейшем мы будем называть факторполугруппой топологической полугруппы G .

2. ГОМОМОРФИЗМЫ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПОЛУГРУПП И ГРУПП

Докажем аналог известного для дискретной полугруппы свойства стабильных отношений эквивалентности.

Теорема 1. *Каждое стабильное открытое отношение эквивалентности на топологической полугруппе G определяет на ней открытый гомоморфизм, и обратно, каждому открытому гомоморфизму, определенному на топологической полугруппе G , будет соответствовать порожденное им открытое стабильное отношение эквивалентности на данной полугруппе.*

Доказательство. Пусть ε — стабильное открытое отношение эквивалентности на топологической полугруппе G . Тогда естественное отображение f пространства G на факторпространство G/ε является открытым гомоморфизмом топологической полугруппы G на ее факторполугруппу G/ε , и, следовательно, первая часть утверждения доказана. Далее, пусть g — открытый гомоморфизм топологической полугруппы G на топологическую полугруппу G' . Тогда гомоморфизм g определяет на полугруппе G стабильное отношение эквивалентности ε , задаваемое условием: $a \sim b$ тогда и только тогда, когда $g(a) = g(b)$ для всех элементов a и b из G . Далее заметим, что если U — открытое множество в G , то $g(U)$ открыто в G' , а тогда $g^{-1}(g(U))$ является открытым подмножеством G , совпадая при этом с объединением всех классов эквивалентности ε , пересекающихся с U , и, следовательно, отношение ε является открытым [3, с. 149]. Теорема доказана. \square

Полученный результат позволяет нам описать все открытые гомоморфизмы топологической полугруппы.

Теорема 2. *Открытые гомоморфные образы топологической полугруппы G исчерпываются (с точностью до изоморфизма) ее факторполугруппами по всем открытым стабильным отношениям эквивалентности на данной полугруппе G .*

Доказательство. Как было показано выше, каждая факторполугруппа G/ε топологической полугруппы G по открытому стабильному отношению эквивалентности ε на G является образом данной полугруппы G при открытом естественном гомоморфизме G на G/ε . Покажем, что других открытых гомоморфных образов у полугруппы G не существует (с точностью до изоморфизма). Пусть топологическая полугруппа G' является гомоморфным образом полугруппы G при некотором открытом гомоморфизме g . Тогда, как было показано, данный гомоморфизм порождает открытое стабильное отношение эквивалентности ε на полугруппе G , определяющее разбиение G на классы эквивалентности $\{g^{-1}(y)\}_{y \in G'}$. Заметим, что гомоморфизм g является факторотображением по следствию 2.4.8 [2, с. 149]. Тогда отображение \bar{g} факторпространства G/ε на пространство G' , определяемое формулой $\bar{g}(g^{-1}(y)) = y$ для каждого $y \in G'$, является гомеоморфизмом по теореме 2.4.3 [2, с. 148]. Заметим далее, что поскольку $\varepsilon(a) \cdot \varepsilon(b) = \varepsilon(ab)$ для всех $a, b \in G$, то $g^{-1}(a') \cdot g^{-1}(b') = g^{-1}(a'b')$ для любых $a'b' \in G'$, а тогда $\bar{g}(g^{-1}(a') \cdot g^{-1}(b')) = \bar{g}(g^{-1}(a'b')) = a'b' = \bar{g}(g^{-1}(a'))\bar{g}(g^{-1}(b'))$, и, следовательно, \bar{g} является гомоморфизмом полугруппы G/ε на G' . Таким образом, топологические полугруппы G/ε и G' будут изоморфны. Теорема доказана. \square

Перейдем к рассмотрению стабильных отношений эквивалентности, заданных на топологической группе G . Как известно, каждое такое отношение порождает в дискретной группе ее нормальный делитель, совпадающий с классом эквивалентных единице элементов группы, и обратно, каждый нормальный делитель дискретной группы задает на ней стабильное отношение эквивалентности. Также известно, что все открытые гомоморфные образы топологической группы G исчерпываются (с точностью до изоморфизма) всеми ее факторгруппами по нормальным делителям группы G [2, с. 123]. Опираясь на эти факты, покажем справедливость следующей теоремы.



Теорема 3. Открытые гомоморфные образы топологической группы G исчерпываются (с точностью до изоморфизма) ее факторгруппами G/ε по всем стабильным отношениям эквивалентности на группе G , обладающим замкнутыми классами эквивалентности.

Доказательство. Заметим, что между всеми нормальными делителями топологической группы G и стабильными отношениями эквивалентности на ней, обладающими замкнутыми классами эквивалентности, существует взаимно однозначное соответствие. Действительно, если N — нормальный делитель топологической группы G , то разбиение группы G на смежные классы по нормальному делителю N порождает на группе G стабильное отношение эквивалентности ε . Заметим, что множество $\varepsilon(e)$ будет замкнутым подмножеством G в силу равенства $\varepsilon(e) = N$, тогда каждый класс $\varepsilon(a) = aN$ также замкнут в пространстве G . Обратно, пусть ε — стабильное отношение эквивалентности на топологической группе G , и классы эквивалентности замкнуты в G . Тогда класс $\varepsilon(e)$ является нормальным делителем топологической группы G , и таким образом указанное соответствие установлено. Тогда если ε — стабильное отношение эквивалентности в группе G , обладающее замкнутыми классами эквивалентности, то класс $\varepsilon(e)$ является нормальным делителем топологической группы G и факторгруппа G/ε является открытым гомоморфным образом группы G при естественном отображении [2, с. 122]. Пусть далее топологическая группа G' является гомоморфным образом группы G при некотором открытом гомоморфизме g . Тогда ядро данного гомоморфизма, являясь замкнутым нормальным делителем группы G , порождает на ней стабильное отношение эквивалентности ε , обладающее замкнутыми классами эквивалентности, и группы G/ε и G' будут изоморфны по теореме 11 [2, с. 123]. Теорема доказана. \square

Библиографический список

1. Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. М.: Наука, 1982. 288 с.
2. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986. 752 с.
3. Понтрягин Л. С. Непрерывные группы. М.: Наука, 1984. 520 с.

Образец для цитирования:

Султанов С. Р. О фактортопологиях в топологических полугруппах и группах // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 4. С. 422–424. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-422-424.

On a Quotient Topology in Topological Semigroups and Groups

S. R. Sultanov

Sergey R. Sultanov, Ryazan State University, 46, Svobody str., Ryazan, Russia, s.sultanov@rsu.edu.ru

The paper discusses the definition of the topological factor semigroup using the open congruence relations on this topological semigroup. Based on this approach, a description of all open homomorphic images of topological semigroup is obtained. Similarly, this approach is used to describe all open homomorphic images of a topological group.

Key words: topological factor semigroup, homomorphisms of topological semigroup, topological factor group.

References

1. Kargapolov M. E., Merzlyakov U. E. *Osnovy teorii grupp* [Basics of group theory]. Moscow, Nauka, 1982. 288 p. (in Russian).
2. Engelking R. *Obshchaya topologiya* [General topology]. Moscow, Mir, 1986. 752 p. (in Russian).
3. Pontryagin L. S. *Nepreryvnye gruppy* [Continuous groups]. Moscow, Nauka, 1984. 520 p. (in Russian).

Please cite this article in press as:

Sultanov S. R. On a Quotient Topology in Topological Semigroups and Groups. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 4, pp. 422–424 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-422-424.



УДК 517.518.82

ПОЛИНОМЫ БЕРНШТЕЙНА ДЛЯ СТАНДАРТНОГО МОДУЛЯ НА СИММЕТРИЧНОМ ОТРЕЗКЕ

И. В. Тихонов¹, В. Б. Шерстюков², М. А. Петросова³

¹Тихонов Иван Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической физики, факультет ВМК, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, ivtikh@mail.ru

²Шерстюков Владимир Борисович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, shervb73@gmail.com

³Петросова Маргарита Арсеновна, аспирантка кафедры математического анализа, Московский педагогический государственный университет, petrosova05@mail.ru

Изучаются полиномы Бернштейна на симметричном отрезке. Установлены основные алгебраические факты, связанные с полиномами Бернштейна от стандартного модуля. В частности, на основе формулы Темпла получены рекуррентные соотношения, из которых строго выведено разложение Поповичу. Указаны удобные формулы для первой и второй производных. Как итог, полностью обоснована явная алгебраическая запись для полиномов Бернштейна от модуля. Отмечены некоторые следствия.

Ключевые слова: полиномы Бернштейна, аппроксимация модуля.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-425-435

ВВЕДЕНИЕ

Основные факты из теории классических полиномов Бернштейна на стандартном отрезке $[0, 1]$ представлены в [1–5]. В недавнем исследовании [6] (см. также обзор [7]) подробно изучены математические эффекты, связанные с полиномами Бернштейна для функции $f(x) = |2x - 1|$, т. е. для простого симметричного модуля, взятого на отрезке $[0, 1]$. Там же [6, с. 38] отмечено, что характер некоторых результатов может измениться при переносе ситуации на другой отрезок. В частности, полезно специально выделить *стандартный модуль*

$$f(x) = |x| \quad (1)$$

на симметричном отрезке $[-1, 1]$. В настоящей работе мы установим и систематически изложим все ключевые формулы, связанные с полиномами Бернштейна от функции (1). Исследование проведем непосредственно на $[-1, 1]$ без обращения к прежним результатам [6], полученным для $[0, 1]$.

Отметим, что случай симметричного отрезка $[-1, 1]$ в теории полиномов Бернштейна привлек внимание в последнее время в связи со своими характерными особенностями (см. [8]). В работе [9] подробно обсуждается специальное правило склеивания, действующее для полиномов Бернштейна на $[-1, 1]$. Используем некоторые соображения из [9].

Напомним, что для произвольной функции $f \in C[-1, 1]$ полиномы Бернштейна определяют формулой

$$B_n(f, x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{2k}{n} - 1\right) C_n^k (1+x)^k (1-x)^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2)$$

с независимой переменной $x \in \mathbb{R}$ и биномиальными коэффициентами C_n^k . Это так называемые *полиномы Бернштейна на симметричном отрезке* $[-1, 1]$.

Важную роль играет формула Темпла, действующая для разности двух последовательных полиномов Бернштейна. На симметричном отрезке для полиномов (2) формула Темпла приобретает вид

$$B_{n+1}(f, x) - B_n(f, x) = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^n Q_{n,k}(f) (1+x)^k (1-x)^{n-k+1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3)$$

с коэффициентами

$$Q_{n,k}(f) = C_{n+1}^k f\left(\frac{2k}{n+1} - 1\right) - C_n^k f\left(\frac{2k}{n} - 1\right) - C_n^{k-1} f\left(\frac{2(k-1)}{n} - 1\right). \quad (4)$$



Используя обозначения для разделенных разностей первого и второго порядков

$$[f; x_1, x_0] \equiv \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \quad [f; x_2, x_1, x_0] \equiv \frac{[f; x_2, x_1] - [f; x_1, x_0]}{x_2 - x_0},$$

можно перейти к эквивалентным выражениям

$$Q_{n,k}(f) = -\frac{2}{n+1} C_{n-1}^{k-1} \left(\left[f; \frac{2k}{n} - 1, \frac{2k}{n+1} - 1 \right] - \left[f; \frac{2k}{n+1} - 1, \frac{2(k-1)}{n} - 1 \right] \right) \quad (5)$$

и

$$Q_{n,k}(f) = -\frac{4}{n(n+1)} C_{n-1}^{k-1} \left[f; \frac{2k}{n} - 1, \frac{2k}{n+1} - 1, \frac{2(k-1)}{n} - 1 \right]. \quad (6)$$

При работе с формулами (4)–(6) полезно учитывать расположение точек

$$-1 \leq \frac{2(k-1)}{n} - 1 < \frac{2k}{n+1} - 1 < \frac{2k}{n} - 1 \leq 1, \quad k = 1, \dots, n,$$

верное при любом $n \in \mathbb{N}$. Подробнее о формуле Темпла на $[-1, 1]$ см. [9]. Будем основываться на перечисленных соотношениях при выводе ключевых формул, связанных с полиномами Бернштейна для стандартного модуля (1).

1. ПОЛИНОМЫ БЕРНШТЕЙНА ДЛЯ МОДУЛЯ

Для функции (1) определение полиномов Бернштейна (2) дает выражение

$$B_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \left| \frac{2k}{n} - 1 \right| C_n^k (1+x)^k (1-x)^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (7)$$

Полиномы (7) обозначаем просто $B_n(x)$ без указания на функцию f из формулы (1).

Прямые вычисления по правилу (7) приводят к результатам:

$$B_1(x) = 1,$$

$$B_2(x) = B_3(x) = \frac{1}{2} (1 + x^2),$$

$$B_4(x) = B_5(x) = \frac{1}{8} (3 + 6x^2 - x^4),$$

$$B_6(x) = B_7(x) = \frac{1}{16} (5 + 15x^2 - 5x^4 + x^6),$$

$$B_8(x) = B_9(x) = \frac{1}{128} (35 + 140x^2 - 70x^4 + 28x^6 - 5x^8),$$

$$B_{10}(x) = B_{11}(x) = \frac{1}{256} (63 + 315x^2 - 210x^4 + 126x^6 - 45x^8 + 7x^{10}),$$

$$B_{12}(x) = B_{13}(x) = \frac{1}{1024} (231 + 1386x^2 - 1155x^4 + 924x^6 - 495x^8 + 154x^{10} - 21x^{12}).$$

Объем проводимых вычислений быстро увеличивается с ростом номера $n \in \mathbb{N}$, и последние формулы из представленного списка сложно получить без компьютерной поддержки.

Установим общую алгебраическую запись по степеням переменной x , действующую для всех полиномов (7). Попутно отметим ряд других интересных фактов. Вывод нужных формул прямо из определения (7) представляется достаточно сложным. Используем обходной путь, связанный с формулой Темпла. Начнем со вспомогательных рекуррентных соотношений, показывающих, что происходит с полиномами (7) при последовательном увеличении номера $n \in \mathbb{N}$.

2. РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Всюду далее рассматриваем полиномы $B_n(x)$ из формулы (7). Базу исследования составляет такое утверждение.



Теорема 1. При всех $m \in \mathbb{N}$ справедливы равенства

$$B_{2m+1}(x) = B_{2m}(x), \quad (8)$$

$$B_{2m+2}(x) = B_{2m+1}(x) - \frac{1}{m+1} 2^{-2m-1} C_{2m}^m (1-x^2)^{m+1}. \quad (9)$$

Доказательство. Используем формулу Темпла (3) с коэффициентами $Q_{n,k}(f)$ в записи (5). Для функции (1) вычислим разделенные разности на $[-1, 1]$. Заметим, что $[f; x_1, x_0] = -1$ при $x_1, x_0 \in [-1, 0]$ и $[f; x_1, x_0] = 1$ при $x_1, x_0 \in [0, 1]$ всякий раз, когда $x_1 \neq x_0$. Учтем также, что

$$-1 \leq \frac{2(k-1)}{n} - 1 < \frac{2k}{n+1} - 1 < \frac{2k}{n} - 1 \leq 0, \quad k \leq \frac{n}{2},$$

и

$$0 \leq \frac{2(k-1)}{n} - 1 < \frac{2k}{n+1} - 1 < \frac{2k}{n} - 1 \leq 1, \quad k \geq \frac{n+2}{2}.$$

Далее надо различать два случая.

Пусть $n = 2m$. Тогда $n/2 = m$ и $(n+2)/2 = m+1$. По формуле (5) заключаем, что $Q_{n,k}(f) = 0$ при всех $k \leq m$ и при всех $k \geq m+1$, т.е. вообще при всех k от 1 до n . Принимая во внимание формулу Темпла (3), получаем равенство (8).

Пусть $n = 2m+1$. Тогда, кроме нулевых слагаемых при $k \leq n/2 = (2m+1)/2$ и $k \geq (n+2)/2 = (2m+3)/2$, в формуле (3) возникнет единственное ненулевое слагаемое при $k = m+1$ с коэффициентом

$$\begin{aligned} Q_{2m+1, m+1}(f) &= -\frac{1}{m+1} C_{2m}^m \left(\left[f; \frac{2(m+1)}{2m+1} - 1, 0 \right] - \left[f; 0, \frac{2m}{2m+1} - 1 \right] \right) = \\ &= -\frac{1}{m+1} C_{2m}^m (1 - (-1)) = -\frac{2}{m+1} C_{2m}^m. \end{aligned}$$

Подставляя данное значение в (3), получаем равенство (9). Теорема доказана. \square

Соотношение (8) для полиномов (7) есть проявление общего *правила склеивания*, действующего на $[-1, 1]$ для полиномов Бернштейна от кусочно-линейных функций с рациональными абсциссами точек излома (см. [9]). В силу свойства (8) изучаем далее лишь полиномы $B_{2m}(x)$ с четными номерами $n = 2m$.

Комбинируя (8) и (9) и замечая, что

$$\frac{1}{m+1} 2^{-2m-1} C_{2m}^m = \frac{1}{2m+1} 2^{-2(m+1)} C_{2m+2}^{m+1}, \quad m \in \mathbb{N},$$

получаем соответствующее рекуррентное соотношение

$$B_{2m+2}(x) = B_{2m}(x) - \frac{1}{2m+1} 2^{-2(m+1)} C_{2m+2}^{m+1} (1-x^2)^{m+1}, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (10)$$

Формула (10) позволяет быстро вывести ключевое представление для полиномов Бернштейна от функции (1), упомянутое без обоснования в работе Поповичу (Popoviciu) [10].

3. РАЗЛОЖЕНИЕ ПОПОВИЧУ

Следующее соотношение будем называть *разложением Поповичу* (ср. с [10, с. 54]).

Теорема 2. При любом $m \in \mathbb{N}$ справедлива формула

$$B_{2m}(x) = 1 - \sum_{k=1}^m \frac{1}{2k-1} 2^{-2k} C_{2k}^k (1-x^2)^k. \quad (11)$$

Доказательство. При $m = 1$ для полинома $B_2(x)$ имеем представление

$$B_2(x) = \frac{1}{2} (1+x^2) = 1 - \frac{1}{2} (1-x^2),$$

очевидно согласованное с (11). Дальнейшая индукция по $m \in \mathbb{N}$ также очевидна с учетом рекуррентного соотношения (10). Теорема доказана. \square



Тот же Поповичу указал в [10] на связь формулы (11) с известным разложением для стандартного модуля. Действительно, следуя идее Лебега [11], представим модуль следующим «биномиальным» рядом:

$$\begin{aligned} |x| = \sqrt{x^2} &= \sqrt{1 - (1 - x^2)} = 1 - \frac{1}{2} (1 - x^2) - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(2k-3)!!}{2^k k!} (1 - x^2)^k = \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \frac{(2k)!}{2^{2k} (k!)^2} (1 - x^2)^k \end{aligned}$$

с равномерной сходимостью при $|1 - x^2| \leq 1$ и расходимостью при $|1 - x^2| > 1$. В окончательном виде

$$|x| = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} 2^{-2k} C_{2k}^k (1 - x^2)^k, \quad x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]. \quad (12)$$

Согласно (11) полиномы $B_{2m}(x)$ совпадают с частичными суммами ряда (12). Отсюда следует такой результат.

Теорема 3. При $n \rightarrow \infty$ последовательность полиномов Бернштейна (7) сходится к функции (1) равномерно на отрезке $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ и расходится на \mathbb{R} всюду вне этого отрезка.

Доказательство. Сделанное утверждение становится очевидным, если учесть правило склеивания (8) и сравнить разложение (11) с равномерно сходящимся рядом (12). \square

Теорему 3 можно дополнительно усилить, осуществив естественный выход в комплексную плоскость. Заменяя в рассуждениях переменную $x \in \mathbb{R}$ комплексной переменной $z \in \mathbb{C}$, получим, что полиномы $B_{2m}(z)$ при $m \rightarrow \infty$ будут равномерно сходиться на компакте в \mathbb{C} , ограниченном лемнискойой

$$|1 - z^2| = 1, \quad (13)$$

в левой петле — к функции $f_1(z) = -z$, а в правой петле — к функции $f_2(z) = z$. Данный факт тесно связан с общей теорией Канторовича о сходимости полиномов Бернштейна в комплексной плоскости (ср. [1, с. 91–92]). Отрезок сходимости, упомянутый в теореме 3, является большой центральной осью для лемнискаты (13). Можно дополнительно уточнить характер сходимости полиномов Бернштейна внутри лемнискаты, но это выходит за рамки нашего исследования. Сейчас нас интересуют комбинаторные и алгебраические аспекты, возникающие при изучении полиномов (7).

4. ПРОИЗВОДНЫЕ ПОЛИНОМОВ БЕРНШТЕЙНА

С помощью разложения Поповичу можно получить удобные выражения для первой и второй производных от рассматриваемых полиномов Бернштейна.

Теорема 4. При любом $m \in \mathbb{N}$ справедливы формулы

$$B'_{2m}(x) = x \sum_{k=0}^{m-1} 2^{-2k} C_{2k}^k (1 - x^2)^k, \quad (14)$$

$$B''_{2m}(x) = 2^{-2m+1} C_{2m}^m m (1 - x^2)^{m-1}. \quad (15)$$

Доказательство. Продифференцировав разложение (11), получим

$$B'_{2m}(x) = x \sum_{k=1}^m \frac{k}{2k-1} 2^{-2k+1} C_{2k}^k (1 - x^2)^{k-1}.$$

Заметим, что

$$\frac{k}{2k-1} 2^{-2k+1} C_{2k}^k = 2^{-2(k-1)} C_{2k-2}^{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Поэтому

$$B'_{2m}(x) = x \sum_{k=1}^m 2^{-2(k-1)} C_{2k-2}^{k-1} (1 - x^2)^{k-1} = x \sum_{k=0}^{m-1} 2^{-2k} C_{2k}^k (1 - x^2)^k.$$



Равенство (14) доказано. Для второй производной имеем соответственно

$$\begin{aligned}
 B_{2m}''(x) &= \sum_{k=0}^{m-1} 2^{-2k} C_{2k}^k (1-x^2)^k - x^2 \sum_{k=0}^{m-1} 2^{-2k+1} C_{2k}^k k (1-x^2)^{k-1} = \\
 &= \sum_{k=0}^{m-1} 2^{-2k} C_{2k}^k (1-x^2)^k + (1-x^2-1) \sum_{k=0}^{m-1} 2^{-2k+1} C_{2k}^k k (1-x^2)^{k-1} = \\
 &= \sum_{k=0}^{m-1} (2k+1) 2^{-2k} C_{2k}^k (1-x^2)^k - \sum_{k=1}^{m-1} 2^{-2k+1} C_{2k}^k k (1-x^2)^{k-1} = \\
 &= \sum_{k=0}^{m-1} (2k+1) 2^{-2k} C_{2k}^k (1-x^2)^k - \sum_{k=0}^{m-2} (k+1) 2^{-2k-1} C_{2k+2}^{k+1} (1-x^2)^k.
 \end{aligned}$$

Поскольку

$$(k+1) 2^{-2k-1} C_{2k+2}^{k+1} = (2k+1) 2^{-2k} C_{2k}^k, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

то

$$\begin{aligned}
 B_{2m}''(x) &= \sum_{k=0}^{m-1} (2k+1) 2^{-2k} C_{2k}^k (1-x^2)^k - \sum_{k=0}^{m-2} (2k+1) 2^{-2k} C_{2k}^k (1-x^2)^k = \\
 &= (2m-1) 2^{-2(m-1)} C_{2m-2}^{m-1} (1-x^2)^{m-1} = 2^{-2m+1} C_{2m}^m m (1-x^2)^{m-1},
 \end{aligned}$$

что соответствует формуле (15). Теорема доказана. \square

Формула, подобная (15), без обоснований (и с опечаткой) также была отмечена в [10, с. 54] в качестве добавления к разложению (11). Несколько неожиданно, что при двукратном дифференцировании полинома $B_{2m}(x)$ происходят такие упрощения. Однако, результат допускает простое объяснение на качественном уровне.

Действительно, вторая производная от порождающей функции $f(x) = |x|$ в некотором естественном смысле совпадает с удвоенной δ -функцией. Сходимость же, присущая полиномам Бернштейна, обладает определенной устойчивостью по отношению к дифференцированию (см. [1, с. 25–27]). Разбираемый пример наглядно показывает, что такая устойчивость сохраняется при дифференцировании вплоть до обобщенных функций. В случае стандартного отрезка $[0, 1]$ этот момент обсуждался в [6, с. 16] (см. также [7, с. 149]). Для полноты картины проверим, что и сейчас полиномы $B_{2m}''(x)$ из формулы (15) образуют на $[-1, 1]$ классическую 2δ -образную последовательность, сходящуюся к $2\delta(x)$.

Базовые геометрические свойства очевидны: первый полином $B_2''(x) \equiv 1$ оказывается вырожденным, прочие же полиномы (15), являясь четными и непостоянными, строго положительны на $(-1, 1)$, обращаются в нуль при $x = \pm 1$ и имеют центральный максимум при $x = 0$. Остальное заключено в следующем утверждении.

Теорема 5. *Последовательность полиномов из формулы (15), взятая на $[-1, 1]$, обладает характерными свойствами 2δ -образной последовательности:*

1. $B_{2m}''(0) \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$;
2. $B_{2m}''(x) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ для любого $x \neq 0$ из отрезка $[-1, 1]$;
3. $\int_{-1}^1 B_{2m}''(x) dx = 2$ при всех $m \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Два первых свойства полиномов (15) без труда проверяются с помощью классической асимптотики

$$2^{-2m} C_{2m}^m \sim \frac{1}{\sqrt{m\pi}}, \quad m \rightarrow \infty, \quad (16)$$



и при учете значений выражения $1 - x^2$ в зависимости от выбора точки $x \in [-1, 1]$. При проверке третьего свойства, привлекая формулу (14), имеем

$$\int_{-1}^1 B_{2m}''(x) dx = B_{2m}'(1) - B_{2m}'(-1) = 1 - (-1) = 2, \quad m \in \mathbb{N},$$

что и требовалось показать. Означенный интеграл можно также вычислить непосредственно, исходя из представления (15), если сделать замену $x = 2t - 1$ и воспользоваться известным равенством

$$\int_0^1 t^p (1 - t)^q dt = \frac{p! q!}{(p + q + 1)!}, \quad p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Результат будет такой же. Теорема доказана. □

Любопытно, что последовательность полиномов (15) отличается лишь константой и способом нумерации от последовательности

$$P_m(x) \equiv \frac{1}{2} \frac{(2m + 1)!!}{(2m)!!} (1 - x^2)^m \left(= \frac{1}{2} B_{2m+2}''(x) \right), \quad m \in \mathbb{N}, \quad (17)$$

использованной Э. Ландау [12] в его доказательстве аппроксимационной теоремы Вейерштрасса. В связи с доказательством Ландау отметим содержательный обзор Валле Пуссена [13, с. 112], хотя полиномы (17) даны там с ошибкой в числовом множителе.

Итак, изучаемые полиномы Бернштейна (7) воплощают неожиданную связь трех основных подходов, принятых в литературе (см., например, [14, с. 101–110]) для доказательства теоремы Вейерштрасса. Связь с методом Лебега осуществляется посредством разложения (12) для функции $|x|$; связь с методом Ландау заложена в выражениях (15) для вторых производных $B_{2m}''(x)$; и наконец, связь с методом Бернштейна ясна из самого генезиса полиномов (7).

5. ЗНАЧЕНИЯ В НУЛЕ

При получении основного результата понадобится следующая информация о значениях полиномов Бернштейна в нуле.

Теорема 6. *При всех $m \in \mathbb{N}$ верны соотношения*

$$B_{2m}(0) = 2^{-2m} C_{2m}^m, \quad B_{2m}'(0) = 0. \quad (18)$$

Доказательство. По формуле (11) имеем

$$B_{2m}(0) = 1 - \sum_{k=1}^m \frac{1}{2k - 1} 2^{-2k} C_{2k}^k, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Воспользуемся тождеством

$$\frac{1}{2k - 1} C_{2k}^k = 4 C_{2k-2}^{k-1} - C_{2k}^k, \quad k \in \mathbb{N},$$

и получим

$$\begin{aligned} B_{2m}(0) &= 1 - \sum_{k=1}^m 2^{-2(k-1)} C_{2k-2}^{k-1} + \sum_{k=1}^m 2^{-2k} C_{2k}^k = \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{m-1} 2^{-2k} C_{2k}^k + \sum_{k=1}^m 2^{-2k} C_{2k}^k = 2^{-2m} C_{2m}^m. \end{aligned}$$

Значения $B_{2m}(0)$ найдены. Результат для $B_{2m}'(0)$ очевиден в силу явной записи (14), а также по соображениям четности полиномов $B_{2m}(x)$. Теорема доказана. □



Упомянем к месту, что значения полиномов Бернштейна в точке излома порождающего их модуля вычислялись по разным поводам многими авторами, начиная с Поповичу [10, с. 53]. Изложенный способ, основанный на разложении (11), предложен в обзоре [7, с. 154].

6. АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ЗАПИСЬ ПОЛИНОМОВ БЕРНШТЕЙНА

Установим итоговый результат, относящийся к явной алгебраической записи изучаемых полиномов Бернштейна.

Теорема 7. При любом $m \in \mathbb{N}$ справедлива формула

$$B_{2m}(x) = 2^{-2m} C_{2m}^m \left[1 + \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} C_m^k x^{2k} \right]. \quad (19)$$

Доказательство. Руководящая идея проста: исходим из того, что вторая производная $B_{2m}''(x)$ имеет компактное представление (15). Разложим по биному

$$(1-x^2)^{m-1} = \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j C_{m-1}^j x^{2j}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Подставляя в (15), запишем

$$B_{2m}''(x) = 2^{-2m+1} C_{2m}^m m \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j C_{m-1}^j x^{2j} = 2^{-2m+1} C_{2m}^m m! \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(-1)^j}{j!(m-1-j)!} x^{2j}.$$

Дважды проинтегрируем возникшее равенство с учетом начальных условий (18). Получим

$$\begin{aligned} B_{2m}(x) &= 2^{-2m} C_{2m}^m \left[1 + 2m! \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(-1)^j}{j!(m-1-j)!} \frac{x^{2j+2}}{(2j+1)(2j+2)} \right] = \\ &= 2^{-2m} C_{2m}^m \left[1 + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(-1)^j}{2j+1} \frac{m!}{(j+1)!(m-j-1)!} x^{2j+2} \right] = \\ &= 2^{-2m} C_{2m}^m \left[1 + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(-1)^j}{2j+1} C_m^{j+1} x^{2j+2} \right] = 2^{-2m} C_{2m}^m \left[1 + \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} C_m^k x^{2k} \right]. \end{aligned}$$

Теорема доказана. □

Явная формула (19) соответствует одному прежнему результату, отмеченному в работе [6, с. 38]. Способ рассуждения в [6] был принципиально иным и, в итоге, более сложным. Отметим также, что пример функции $f(x) = |x|$ как порождающей для полиномов Бернштейна (7) упоминался в классической монографии [14, с. 111] (ср. с № 3130 в задачнике Б. П. Демидовича). Однако форма записи для $B_{2m}(x)$, предложенная в [14], была весьма несовершенной и мало отличалась от исходного определения (7).

Как видно из нашей формулы (19), полиномы $B_{2m}(x)$ имеют характерную особенность: два младших слагаемых всегда положительны, а последующие — знакопеременны. Означенный эффект хорошо виден на примерах, представленных в параграфе 2. Допустима сокращенная запись

$$B_{2m}(x) = 2^{-2m} C_{2m}^m \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} C_m^k x^{2k}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (20)$$

очевидно согласованная с (19). Укажем еще на связи полученных результатов с некоторыми комбинаторными соотношениями.



7. КОМБИНАТОРНЫЕ СЛЕДСТВИЯ

Как известно, значения полиномов Бернштейна на концах исходного отрезка совпадают со значениями порождающей функции. Соответственно в нашем случае верно, что $B_{2m}(1) = 1$ при любом $m \in \mathbb{N}$. Подставляя $x = 1$ в представление (20) и преобразуя результат, приходим к тождеству

$$\sum_{k=0}^m \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} C_m^k = \frac{2^{2m}}{C_{2m}^m} = \frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{21}$$

Формула (21) согласована с общим правилом [15, пример 4.2.2.45] вида

$$\sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{k+a} C_m^k = \frac{m!}{a(a+1)\dots(a+m)}, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{22}$$

Для получения (21) надо подставить в (22) значение $a = -1/2$.

Нахождение в компактной форме значений $B_{2m}(x)$ в точках $x \in \mathbb{R}$, отличных от 0 и ± 1 , представляет серьезные трудности, возможно, даже не разрешимые. Однако согласно теореме 3 для полиномов $B_{2m}(x)$ известна точная область сходимости. Обращаясь к формуле (20), можем утверждать, что

$$2^{-2m} C_{2m}^m \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} C_m^k x^{2k} \rightarrow x \tag{23}$$

при $m \rightarrow \infty$ для любого $x \in [0, \sqrt{2}]$. Деляя подстановку $q = x^2$ и учитывая соотношение (16), получаем асимптотику

$$\sum_{k=0}^m \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} C_m^k q^k \sim \sqrt{m\pi q}, \quad m \rightarrow \infty, \tag{24}$$

верную при любом $q \in (0, 2]$. Асимптотика (24) равномерна по $q \in [\delta, 2]$ с фиксированным малым $\delta > 0$. Поскольку характер сходимости в формуле (23) можно конкретизировать, а выражение $2^{-2m} C_{2m}^m$ допускает точные оценки на основе (16), то и соотношение (24) можно подкрепить соответствующими двусторонними оценками, годными при всех $m \in \mathbb{N}$ (если, конечно, подобный результат будет представлять интерес).

Нам не удалось обнаружить аналогов формулы (24) в фундаментальном справочнике [15]. Имеющееся там правило [15, пример 4.2.3.20] вида

$$\sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{k+a} C_m^k q^k = q^{-a} \int_0^q t^{a-1} (1-t)^m dt, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{25}$$

применимо лишь при $a > 0$. Между прочим, явная формула (22) очевидно получена из (25) вычислением интеграла при $q = 1$ с последующим аналитическим продолжением на все значения $a \in \mathbb{C}$, кроме $a = 0, a = -1, \dots, a = -m$. Переход же от тождества (25) к асимптотике (24) представляется не вполне очевидным.

8. ПРОБЛЕМА РОСТА КОЭФФИЦИЕНТОВ

В связи с формулами, установленными для полиномов Бернштейна от стандартного модуля (1), возникает содержательное направление нового специального исследования. На наш взгляд, существенный интерес представляет задача о скорости роста коэффициентов полиномов $B_{2m}(x)$ в явной алгебраической записи (19). Требуется выделить максимальный по модулю коэффициент и по возможности точно выяснить его поведение при возрастании значения $m \in \mathbb{N}$. Аналогичные вопросы желательно разрешить и для других, «соседних», коэффициентов. Было бы полезно также оценить скорость роста при $m \rightarrow \infty$ суммы модулей всех коэффициентов в (19), т. е. суммы

$$\sigma_{2m} = 2^{-2m} C_{2m}^m \left[1 + \sum_{k=1}^m \frac{1}{2k-1} C_m^k \right], \quad m \in \mathbb{N}. \tag{26}$$

Подходящую асимптотику для суммы (26) целесообразно дополнить качественными двусторонними оценками, верными при всех $m \in \mathbb{N}$.



Предварительные результаты, представленные в [16], показывают, что случай симметричного отрезка $[-1, 1]$ обладает существенной спецификой по сравнению со случаем стандартного отрезка $[0, 1]$, на котором проведено подробное исследование [6]. В частности, на симметричном отрезке поведение коэффициентов первых полиномов $B_2(x)$, $B_4(x)$, ..., $B_{12}(x)$, перечисленных в параграфе 1 настоящей статьи, резко отличается от того, что будет наблюдаться для полиномов (19) при больших значениях $m \in \mathbb{N}$.

Отмеченные вопросы находятся в русле общих исследований [17–19] по скорости роста коэффициентов полиномов при равномерных аппроксимациях непрерывных функций.

Авторы признательны А. Ю. Трынину, обратившему внимание на связь наших задач с указанным общим направлением.

Библиографический список

1. *Lorentz G. G.* Bernstein Polynomials. N. Y. : Chelsea Publ. Comp., 1986. xi+134 p.
2. *Виденский В. С.* Многочлены Бернштейна : учеб. пособие к спецкурсу. Л. : ЛГПИ им. А. И. Герцена, 1990. 64 с.
3. *Натансон И. П.* Конструктивная теория функций. М.; Л. : ГИТТЛ, 1949. 688 с.
4. *Davis P. J.* Interpolation and Approximation. N. Y. : Dover, 1975. xvi+394 p.
5. *DeVore R. A., Lorentz G. G.* Constructive Approximation. Berlin ; Heidelberg ; N. Y. : Springer-Verlag, 1993. x+450 p.
6. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.* Приближение модуля полиномами Бернштейна // Вестн. Челяб. гос. ун-та. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 15, № 26. С. 6–40.
7. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А.* Полиномы Бернштейна : старое и новое // Математический форум. Т. 8, ч. 1. Исследования по математическому анализу. Владикавказ : ЮМИ ВНИЦ РАН и РСО-А, 2014. С. 126–175.
8. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А.* Случай симметричного отрезка в теории классических полиномов Бернштейна // Системы компьютерной математики и их приложения : материалы XV междунар. науч. конф. Смоленск : СмолГУ, 2014. Вып. 15. С. 184–186.
9. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А.* Правило склеивания для полиномов Бернштейна на симметричном отрезке // Изв. Саратов. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 3. С. 288–300. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-288-300.
10. *Rorovićiu T.* Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur // Mathematica (Cluj). 1935. Vol. 10. P. 49–54.
11. *Lebesgue A.* Sur l'approximation des fonctions // Bulletin des Sciences Mathématiques. 1898. Vol. 22. Première partie. P. 278–287.
12. *Landau E.* Über die Approximation einer stetigen Funktion durch eine ganze rationale Funktion // Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. 1908. Т. 25. P. 337–345.
13. *De la Vallée Poussin Ch.* On the approximation of functions of a real variable and on quasi-analytic functions. A course of three lectures delivered at the Rice Institute, December 16, 17 and 19, 1924 // The Rice Institute Pamphlet. 1925. Vol. 12, № 2. P. 105–172.
14. *Гончаров В. Л.* Теория интерполирования и приближения функций. М.; Л. : ГИТТЛ, 1954. 328 с.
15. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М. : Наука, 1981. 800 с.
16. *Петросова М. А.* О скорости роста максимальных коэффициентов в полиномах Бернштейна, взятых от симметричного модуля на симметричном отрезке // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 18-й междунар. Саратов. зимней школы. Саратов : Научная книга, 2016. С. 209–211.
17. *Stafney J. D.* A permissible restriction on the coefficients in uniform polynomial approximation to $C[0, 1]$ // Duke Math. J. 1967. Vol. 34, № 3. P. 393–396. DOI:10.1215/S0012-7094-67-03443-6.
18. *Roulier J. A.* Permissible bounds on the coefficients of approximating polynomials // J. Approx. Theory. 1970. Vol. 3, № 2. P. 117–122. DOI: 10.1016/0021-9045(70)90018-3.
19. *Гурарий В. И., Мелетиди М. А.* Об оценках коэффициентов полиномов, аппроксимирующих непрерывные функции // Функциональный анализ и его прилож. 1971. Т. 5, вып. 1. С. 73–75.

Образец для цитирования:

Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А. Полиномы Бернштейна для стандартного модуля на симметричном отрезке // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 4. С. 425–435. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-425-435.



Bernstein Polynomials for a Standard Module Function on the Symmetric Interval

I. V. Tikhonov¹, V. B. Sherstyukov², M. A. Petrosova³

¹Ivan V. Tikhonov, Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, GSP-1, 1-52, Leninskiye Gory, 119991, Moscow, Russia, ivtikh@mail.ru

²Vladimir B. Sherstyukov, National Research Nuclear University MEPhI, 31, Kashirskoe shosse, 115409, Moscow, Russia, shervb73@gmail.com

³Margarita A. Petrosova, Moscow Pedagogical State University, 1, M. Pirogovskaya str., 199296, Moscow, Russia, petrosova05@mail.ru

Bernstein polynomials are studied on a symmetric interval. Basic relations connected with Bernstein polynomials for a standard module function are received. By the Temp's formula we establish recurrence relations from which the Popoviciu's expansion is derived. Suitable formulas for the first and second derivatives are found. As a result an explicit algebraic form for Bernstein polynomials is obtained. We also notice some corollaries.

Key words: Bernstein polynomials, module function approximation.

References

1. Lorentz G. G. *Bernstein Polynomials*. New York, Chelsea Publ. Comp., 1986. xi+134 p.
2. Videnskii V. S. *Mnogochleny Bernshteina* [Bernstein Polynomials]. Posobie k spetskursu. Leningrad, LGPI, 1990. 64 p. (in Russian).
3. Natanson I. P. *Konstruktivnaya teoriya funktsii* [Constructive theory of functions]. Moscow, Leningrad, GITTL, 1949, 688 p. (in Russian).
4. Davis P. J. *Interpolation and Approximation*. New York, Dover, 1975, xvi+394 p.
5. DeVore R. A., Lorentz G. G. *Constructive Approximation*. Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1993, x+450 p.
6. Tikhonov I. V., Sherstyukov V. B. Priblizhenie modulya polinomami Bernshteina [The module function approximation by Bernstein polynomials]. *Vestnik ChelGU. Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2012, vol. 15, no. 26, pp. 6–40 (in Russian).
7. Tikhonov I. V., Sherstyukov V. B., Petrosova M. A. Polynomy Bernshteina: staroe i novoe [Bernstein Polynomials: the old and the new]. *Matematicheskii forum. Issledovaniya po matematicheskoy analizu* [Math Forum. Research on mathematical analysis]. Vladikavkaz, Publ. VNTs RAN, 2014, vol. 8, pt. 1, pp. 126–175 (in Russian).
8. Tikhonov I. V., Sherstyukov V. B., Petrosova M. A. Sluchai simmetrichnogo otrezka v teorii klassicheskikh polinomov Bernshteina [Symmetric interval case in the theory of classical Bernstein polynomials]. *Sistemy komp'yuternoi matematiki i ikh prilozheniya: materialy XV mezhdunarod. nauch. konf.* [Systems of computer mathematics and their applications: Proc. XV Intern. Sci. Conf.]. Smolensk, SmolGU, 2014, iss. 15, pp. 184–186 (in Russian).
9. Tikhonov I. V., Sherstyukov V. B., Petrosova M. A. Gluing rule for Bernstein polynomials on the symmetric interval. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2015, vol. 15, iss. 3, pp. 288–300 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-288-300.
10. Popoviciu T. Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur. *Mathematica (Cluj)*, 1935, vol. 10, pp. 49–54.
11. Lebesgue A. Sur l'approximation des fonctions. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 1898, vol. 22, première partie, pp. 278–287.
12. Landau E. Über die Approximation einer stetigen Funktion durch eine ganze rationale Funktion. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 1908, vol. 25, pp. 337–345.
13. De la Vallée Poussin Ch. On the approximation of functions of a real variable and on quasi-analytic functions. A course of three lectures delivered at the Rice Institute, December 16, 17 and 19, 1924. *The Rice Institute Pamphlet*, 1925, vol. 12, no. 2, pp. 105–172.
14. Goncharov V. L. *Teoriya interpolirovaniya i priblizheniya funktsii* [Theory of interpolation and approximation of functions]. Moscow, Leningrad, GITTL, 1954, 328 p. (in Russian).
15. Prudnikov A. P., Brychkov Ju. A., Marichev O. I. *Integraly i ryady. Elementarnye funktsii* [Integrals and series. Elementary functions]. Moscow, Nauka, 1981, 800 p. (in Russian).
16. Petrosova M. A. O skorosti rosta maksimal'nykh koefitsientov v polinomakh Bernshteina, vzyatykh ot simmetrichnogo modulya na simmetrichnom otrezke [On the maximum rate growth of coefficients in Bernstein polynomials which are taken from the symmetric module on a symmetric interval]. *Sovremennye problemy teorii funktsii i ikh prilozheniya: materialy 18-i mezhdunar. Sarat. zimnei shkoly* [Contemporary Problems of Function Theory and Their Applications: Proc. 18th Intern. Saratov Winter School]. Saratov, Nauchnaya kniga, 2016, pp. 209–211 (in Russian).
17. Stafney J. D. A permissible restriction on the coefficients in uniform polynomial approximation to $C[0,1]$. *Duke Math. J.*, 1967, vol. 34, no. 3, pp. 393–396. DOI: 10.1215/S0012-7094-67-03443-6.



18. Roulier J. A. Permissible bounds on the coefficients of approximating polynomials. *J. Approx. Theory*, 1970, vol. 3, no. 2, pp. 117–122. DOI: 10.1016/0021-9045(70)90018-3.
19. Gurarii V. I., Meletidi M. A. On estimates of the coefficients of polynomials approximating continuous functions. *Funct. Anal. Appl.* 1971, vol. 5, iss. 1, pp. 60–62. DOI: 10.1007/BF01075850.

Please cite this article in press as:

Tikhonov I. V., Sherstyukov V. B., Petrosova M. A. Bernstein Polynomials for a Standard Module Function on the Symmetric Interval. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 4, pp. 425–435 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-425-435.

УДК 517.52

ПРИЗНАК ДИНИ – ЛИПШИЦА ДЛЯ ОБОБЩЁННЫХ СИСТЕМ ХААРА

В. И. Щербаков

Щербаков Виктор Иннокентьевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, Московский технический университет связи и информатики (МТУСИ), kafmathan@mail.ru (для В. И. Щербакова)

В работе рассматриваются обобщённые системы Хаара, порождённые (вообще говоря, неограниченной) последовательностью $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ и определённые на модифицированном отрезке $[0, 1]^*$, т. е. на отрезке $[0, 1]$ с «раздвоенными» $\{p_n\}$ — рациональными точками. Основной результат данной работы — установление поточечной оценки между абсолютной величиной разности между непрерывной в заданной точке функции и её n -й частичной суммой Фурье и «поточечным» модулем непрерывности (это понятие (поточечный модуль непрерывности $\omega_n(x, f)$) также определяется в данной работе) заданной функции. На основании этой «поточечной» оценки устанавливается равномерная оценка абсолютной величины разности между функцией и её частичными суммами Фурье и модулем непрерывности данной функции. Установлено также достаточное условие поточечной и равномерной ограниченности частичных сумм Фурье по обобщённой системе Хаара для заданной непрерывной функции. На основании этих оценок устанавливается признак сходимости ряда Фурье по обобщённой системе Хаара, аналогичный признаку Дини – Липшица. Показана также неулучшаемость полученного в работе условия. Для любых $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ с $\sup_n p_n = \infty$ построен пример непрерывной на $[0, 1]^*$ функции, ряд Фурье которой по обобщённой системе Хаара, порождённой последовательностью $\{p_n\}$, ограниченно расходится в некоторой фиксированной точке. Данный результат может быть применён и на нульмерных компактных абелевых группах.

Ключевые слова: абелева группа, модифицированный отрезок $[0, 1]$, непрерывность на модифицированном отрезке $[0, 1]$, системы характеров, системы Прайса, обобщённые системы Хаара, ядра Дирихле, признак Дини – Липшица.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-435-448

1. ВВЕДЕНИЕ. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть \mathbb{N} — множество целых неотрицательных чисел, $p_0 = 1$, $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ — целочисленная последовательность с $p_n \geq 2$, $m_n = \prod_{k=0}^n p_k$, $n \in \mathbb{N}$. Всякое число $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ единственным образом можно представить в виде

$$n = \sum_{k=0}^s a_k m_k = a_s m_s + n', \quad (1)$$

где a_k , s и n' — целые с $0 \leq a_k \leq p_{k+1} - 1$, $1 \leq a_s \leq p_{s+1} - 1$ (т. е. $m_s \leq n \leq m_{s+1} - 1$) и $0 \leq n' \leq m_s - 1$.

Рассмотрим систему целочисленных последовательностей $G = \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} | x_n \in \{0, 1, \dots, p_n - 1\}\}$ с операцией $\dot{+}$ покоординатного сложения по модулю p_n : $\{x_n\} \dot{+} \{y_n\} = \{(x_n + y_n) \bmod p_n\}$, относительно которой G является абелевой группой, пусть « $\dot{-}$ » — обратная операция.

Окрестностями нуля в G являются подгруппы $G_n = \{\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in G | x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0\}$, $G_0 = G$, смежные классы $x \dot{+} G_n$ будут окрестностями точки $x \in G$. Подгруппы G_n образуют убывающую последовательность

$$G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \dots \supset G_n \supset \dots, \quad \bigcap_{n=0}^{\infty} G_n = \{0_G\},$$



и фактор-группа G_{n-1}/G_n имеет порядок p_n ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, 0_G — нулевой элемент группы G , то есть $0_G = \{0, 0, \dots, 0, \dots\}$). Таким образом, G стала нульмерной компактной абелевой группой, которую часто называют группой Виленкина [1, 2].

Относительно топологии, заданной цепочкой подгрупп (G_n) , определяется предел и непрерывность на G .

Обозначим

$$\omega_n(x, f) = \sup_{t \in G_n} |f(x \dot{+} t) - f(x)| \text{ и } \omega_n(f) = \sup_{x \in G} \omega_n(x, f). \quad (2)$$

Невозрастающую последовательность $\{\omega_n(f)\}_{n=0}^\infty$ называют *модулем непрерывности* функции $f(t)$. Очевидно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n(f) = 0$, если $f(t)$ непрерывна на G .

Отображение

$$M : x = \{x_n\}_{n=1}^\infty \mapsto M(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{x_k}{m_k} \quad (3)$$

переводит группу G на отрезок $[0, 1]$ с нарушением взаимной однозначности в p_n -ично рациональных точках. Его иногда называют отображением Монна [3, 4]. Последовательности

$$x = \{l_1, l_2, \dots, l_{n-1}, l_n, 0, 0, \dots\}, \quad (4)$$

$$y = \{l_1, l_2, \dots, l_{n-1}, l_n - 1, p_{n+1} - 1, p_{n+2} - 1, \dots, p_{n+k} - 1, \dots\} \quad (5)$$

при отображении Монна переходят в одно и то же число l/m_n . Если это число l/m_n считать дважды: как правое (4), так и левое (5), то отрезок $[0, 1]$ с такими точками называют *модифицированным отрезком* и обычно обозначают через $[0, 1]^*$. Такой модифицированный отрезок является геометрической моделью группы Виленкина.

Меру μ на G вначале определяют на полукольце смежных классов $x \dot{+} G_n$ как $\mu(x \dot{+} G_n) = 1/m_n$ и затем продолжают по схеме Каратеодори. Полученная таким образом мера инвариантна относительно сдвигов и на борелевских множествах совпадает с мерой Хаара. Эту меру будем обозначать через dx . По данной мере по схеме Лебега строится абсолютно сходящийся интеграл $\int_G f(x) dx$.

Положим $e_n = \underbrace{\{0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots\}}_{n-1}$. Систему $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ ($e_1 = \{1, 0, 0, \dots, 0, \dots\}$) назовём *базисной*.

Очевидно, что для $x = \{x_n\}_{n=1}^\infty \in G$ справедливо равенство

$$x = x_1 e_1 \dot{+} x_2 e_2 \dot{+} \dots \dot{+} x_n e_n \dot{+} \dots$$

($l e_n = \underbrace{\{0, 0, \dots, 0, l, 0, 0, \dots\}}_{n-1}$). Используя базисную последовательность $\{e_n\}_{n=1}^\infty$, имеем

$$G_n = \bigcup_{j=0}^{p_{n+1}-1} (j e_{n+1} \dot{+} G_n) \quad \text{и} \quad G = G_0 = \bigcup_{j_1=0}^{p_1-1} \dots \bigcup_{j_n=0}^{p_n-1} (j_1 e_1 \dot{+} j_2 e_2 \dot{+} \dots \dot{+} j_n e_n \dot{+} G_n).$$

Смежный класс $j_1 e_1 \dot{+} j_2 e_2 \dot{+} \dots \dot{+} j_n e_n \dot{+} G_n$ при отображении Монна переходит в отрезок $\left[\frac{k}{m_n}, \frac{k+1}{m_n}\right]$, где k связано с числами j_1, \dots, j_n равенством

$$k = j_n + j_{n-1} p_n + j_{n-2} p_{n-1} p_n + \dots + j_1 p_2 \dots p_n, \quad j_l \in \overline{0; p_l - 1}.$$

Далее будем обозначать $l e_n \dot{+} G_n = G_{l,n}$, $l \in \overline{0, p_n - 1}$. Очевидно, что

$$M(G_{l,n}) = \left[\frac{l}{m_n}, \frac{l+1}{m_n} \right] \quad \text{и} \quad M(G_n \setminus G_{n+1}) = \left[\frac{1}{m_{n+1}}, \frac{1}{m_n} \right]. \quad (6)$$

Положим

$$\tilde{x}_0 = 0, \quad \tilde{x}_n = \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{m_k}. \quad (7)$$



2. ОБОБЩЁННЫЕ СИСТЕМЫ ХААРА И УОЛША

Пусть (названия систем даются в п. 7.1) $\Psi = \{\psi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, где $\psi_0(x) \equiv 1$, $r_k(x) = \psi_{m_k}(x) = \exp \frac{2i\pi x_{k+1}}{p_{k+1}}$, если $k = 0, 1, 2, \dots$ и $\psi_n(x) = \prod_{k=0}^s (r_k(x))^{a_k}$, где a_k и s определены формулой (1). Как будет сказано в п. 7.1, иногда $r_k(x)$ называют функциями Радемахера. Пусть $\{\psi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ — полная ортонормированная система непрерывных на группе G функций со свойствами

$$\psi_n(x \dot{+} y) = \psi_n(x) \times \psi_n(y), \quad |\psi_n(x)| \equiv 1. \quad (8)$$

Рассмотрим ещё одну полную ортонормированную систему непрерывных на группе G кусочно-постоянных функций

$$\Gamma = \{\gamma_n(x)\}_{n=0}^{\infty}: \gamma_0(x) \equiv 1, \\ \gamma_n(x) = \gamma_{a_s m_s + n'}(x) = \begin{cases} \sqrt{m_s} \exp \frac{2i\pi a_s x_{s+1}}{p_{s+1}}, & \text{если } n' = \tilde{x}_s m_s, \\ 0, & \text{если } n' \neq \tilde{x}_s m_s, \end{cases} \quad (9)$$

где \tilde{x}_s определены формулой (7), а s, a_s, n' — равенством (1).

3. ЯДРА ДИРИХЛЕ ПО ОБОБЩЁННЫМ СИСТЕМАМ ХААРА И УОЛША И ИХ ВЗАИМОСВЯЗЬ

Напомним, что n -е ядро Дирихле по ортонормированной системе функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ вычисляется по формуле

$$D_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k(x) \overline{\varphi_k(t)}.$$

Так как $|\psi_n(x)| \equiv 1$, то $\overline{\psi_k(t)} = \frac{1}{\psi_k(t)} = \psi_k(\dot{-}t)$, и, используя формулу (8), для системы Ψ имеем

$$D_n(x, t) = \sum_{k=0}^{n-1} \psi_k(x) \overline{\psi_k(t)} = \sum_{k=0}^{n-1} \psi_k(x \dot{-}t) = D_n(x \dot{-}t),$$

т. е. здесь можно считать, что

$$D_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \psi_k(x), \quad (10)$$

и тогда $D_n(\dot{-}x) = \overline{D_n(x)}$.

В дальнейшем ядра Дирихле по системе Ψ будем обозначать как $D_n(x \dot{-}t)$ (либо $D_n(x)$ (как функцию одной переменной)), а по системам Γ — как $D_n(x, t)$.

Справедливы следующие теоремы (см. [5, равенства (22), (23)]).

Теорема А. Ядра Дирихле для систем $\Psi = \{\psi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ и $\Gamma = \{\gamma_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ с номерами $j m_n$ ($j = 1, 2, \dots, p_{n+1} - 1$) совпадают, т. е.

$$D_{j m_n}(x, t) = D_{j m_n}(x \dot{-}t). \quad (11)$$

Теорема В. Для систем $\Gamma = \{\gamma_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ либо $D_n(x, t) = D_{a_s m_s + n'}(x, t) = D_{a_s m_s}(x, t)$, либо $D_n(x, t) = D_{a_s m_s + n'}(x, t) = D_{(a_s + 1) m_s}(x, t)$, а точнее

$$D_n(x, t) = \begin{cases} D_{a_s m_s}(x, t), & \text{если } x \dot{-}t \in G_s, \quad n' \leq \tilde{x}_s m_s = \tilde{t}_s m_s, \\ D_{(a_s + 1) m_s}(x, t), & \text{если } x \dot{-}t \in G_s, \quad n' > \tilde{x}_s m_s = \tilde{t}_s m_s, \\ D_{a_s m_s}(x, t) = 0, & \text{если } x \dot{-}t \in G \setminus G_s, \end{cases} \quad (12)$$

числа a_s, m_s и n' определяются формулой (1).

Известно также, что (см., например, [1, 6–8])

$$D_{m_n}(x) = \begin{cases} m_n, & \text{если } x \in G_n, \\ 0, & \text{если } x \in G \setminus G_n. \end{cases} \quad (13)$$



Если j – целое $1 \leq j \leq p_{n+1} - 1$, то

$$D_{jm_n}(x) = D_{m_n}(x) \frac{1 - (r_n(x))^j}{1 - r_n(x)} \quad (14)$$

и (так как для $x \in G_{n+1}$, $k < m_{n+1}$: $\psi_k(x) = 1$ имеем $D_{jm_n}(x) = \sum_{k=0}^{jm_n-1} \psi_k(x) = jm_n$)

$$D_{jm_n}(x) = \begin{cases} jm_n, & \text{если } x \in G_{n+1}, \\ m_n \frac{1 - (r_n(x))^j}{1 - r_n(x)}, & \text{если } x \in G_n \setminus G_{n+1}, \\ 0, & \text{если } x \in G \setminus G_n. \end{cases} \quad (15)$$

4. S-МАЖОРАНТА И ЕЁ ИНТЕГРАЛЬНАЯ ОЦЕНКА

Определим функцию

$$S(x) = \frac{m_n}{\sin \frac{\pi x_{n+1}}{p_{n+1}}}, \quad (16)$$

где x_{n+1} – первый отличный от нуля (слева) элемент последовательности $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ (т.е. $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, $x_{n+1} \neq 0$, если $x \in G \setminus G_1$, для $x_1 \neq 0$ будет $n = 0$).

В [6] $S(x)$ обозначена как $q(x)$. Функцию $S(x)$ можно определить и так:

$$S(x) = \frac{m_n}{\sin \frac{\pi l}{p_{n+1}}}, \quad \text{если } x \in G_{l,n+1}, \quad l = 1, 2, \dots, p_{n+1} - 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (17)$$

т.е. $G_{l,n+1} \subset G_n \setminus G_{n+1}$, а смежные классы $G_{l,n}$ определены в (6).

Рассмотрим множества

$$G_{n,+} = \bigcup_{l=1}^{[p_{n+1}/2]} G_{l,n+1} \quad \text{и} \quad G_+ = \bigcup_{n=0}^{\infty} G_{n,+} \quad (18)$$

($[x]$ означает целую часть действительного числа x), а также

$$G_{n,-} = \dot{-}G_{n,+} \quad \text{и} \quad G_- = \dot{-}G_+ = \bigcup_{n=0}^{\infty} G_{n,-}. \quad (19)$$

Отметим, что

$$G_{n,+} \cup G_{n,-} = G_n \setminus G_{n+1}, \quad G_+ \cup G_- = G \setminus \{0_G\}, \quad (20)$$

$$G_{n,+} \cap G_{n,-} = \begin{cases} G_{l, \frac{p_{n+1}}{2}, n+1}, & \text{если } p_{n+1} \text{ – чётное,} \\ \emptyset, & \text{если } p_{n+1} \text{ – нечётное.} \end{cases} \quad (21)$$

Очевидно, что $S(x)$ обладает свойством групповой чётности:

$$S(\dot{-}x) = S(x). \quad (22)$$

Сравним теперь $S(x)$ со «стандартной» мажорантой $1/M(x)$.

Если $x \in G_{l,n+1}$, $l = 1, 2, \dots, p_{n+1} - 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$, то (см. равенство (6)) $M(x) \in \left[\frac{l}{m_{n+1}}; \frac{l+1}{m_{n+1}} \right]$ и $\frac{m_{n+1}}{2l} \leq \frac{m_{n+1}}{l+1} \leq \frac{1}{M(x)} \leq \frac{m_{n+1}}{l}$.

Поэтому для $x \in G_{l,n+1} \subset G_{n,+}$, т.е. $l \leq \left[\frac{p_{n+1}}{2} \right]$, тогда $\frac{\pi l}{p_{n+1}} \leq \frac{\pi}{2}$ и $\sin \frac{\pi l}{p_{n+1}} \geq \frac{2}{\pi} \times \frac{\pi l}{p_{n+1}}$,

$$S(x) = \frac{m_n}{\sin \frac{\pi l}{p_{n+1}}} \leq \frac{m_n}{\frac{2}{\pi} \frac{\pi l}{p_{n+1}}} = \frac{m_n p_{n+1}}{2l} = \frac{m_{n+1}}{2l} \leq \frac{1}{M(x)}, \quad (23)$$

а если $x \in G_{l,n+1} \subset G_n \setminus G_{n+1}$ (или $l \in \overline{0, p_{n+1} - 1}$), то

$$S(x) = \frac{m_n}{\sin \frac{\pi l}{p_{n+1}}} \geq \frac{m_n p_{n+1}}{\pi l} = \frac{m_{n+1}}{\pi l} \geq \frac{1}{\pi M(x)}. \quad (24)$$



А ввиду того что обе части неравенства (24) не зависят от n , то оно справедливо при *всех* $x \neq 0$.

Оценим $\int_{G_n \setminus G_{n+1}} S(x) dx$.

1. Оценка сверху. Имеем $\int_{G_n \setminus G_{n+1}} S(x) dx \leq \int_{G_{n,+}} S(x) dx + \int_{G_{n,-}} S(x) dx$. Во втором слагаемом делаем подстановку $x = \dot{-}t$. Используя далее формулы (22) и (23), получим

$$\begin{aligned} \int_{G_n \setminus G_{n+1}} S(x) dx &\leq 2 \int_{G_{n,+}} S(x) dx \leq 2 \int_{G_{n,+}} \frac{dx}{M(x)} \leq \\ &\leq 2 \int_{G_n \setminus G_{n+1}} \frac{dx}{M(x)} = 2 \int_{1/m_{n+1}}^{1/m_n} \frac{du}{u} = 2 \ln \frac{m_{n+1}}{m_n} = 2 \ln p_{n+1} \end{aligned} \quad (25)$$

(в последнем интеграле сделана подстановка $u = M(t)$ и использовано равенство (6)).

2. Оценка снизу. Из неравенства (24) имеем:

$$\int_{G_n \setminus G_{n+1}} S(x) dx \geq \frac{1}{\pi} \int_{G_n \setminus G_{n+1}} \frac{dx}{M(x)} = \frac{1}{\pi} \ln p_{n+1}. \quad (26)$$

Мы показали, что имеет место следующая

Лемма 1. Для любого целого n выполнено неравенство

$$\frac{1}{\pi} \ln p_{n+1} \leq \int_{G_n \setminus G_{n+1}} S(x) dx \leq 2 \ln p_{n+1}. \quad (27)$$

Справедлива также следующая лемма.

Лемма 2. Для всех $x, t \in G$ и целых n верна оценка

$$|D_n(x, t)| \leq S(x \dot{-} t). \quad (28)$$

Доказательство. Из теоремы В (равенства (12)) непосредственно получаем равенства

$$1 - e^{2i\alpha} = -2i \sin \alpha e^{i\alpha}, \quad (29)$$

формул (8), (15) и (17) для $x \in G_s \setminus G_{s+1}$ имеем

$$\begin{aligned} |D_n(x, t)| &= |D_{j_s m_s}(x, t)| = |D_{j_s m_s}(x \dot{-} t)| = m_s \frac{|1 - (r_s(x \dot{-} t))^{j_s}|}{|1 - r_s(x \dot{-} t)|} = \\ &= m_s \frac{\left| 1 - \exp\left(\frac{2i\pi(x_{s+1} - t_{s+1})j_s}{p_{s+1}}\right) \right|}{\left| 1 - \exp\left(\frac{2i\pi(x_{s+1} - t_{s+1})}{p_{s+1}}\right) \right|} = m_s \frac{\left| \sin \frac{\pi(x_{s+1} - t_{s+1})j_s}{p_{s+1}} \right|}{\left| \sin \frac{\pi(x_{s+1} - t_{s+1})}{p_{s+1}} \right|} \leq \frac{m_s}{\sin \frac{\pi(x_{s+1} - t_{s+1})}{p_{s+1}}} = S(x \dot{-} t), \end{aligned}$$

так как в зависимости от n' (см. (12)) $j_s = a_s$ либо $j_s = a_s + 1$. □

А из формул (8), (10), (11) и (12) получим, что для всех $x, t \in G$ и целых n

$$\begin{aligned} |D_n(x, t)| &= |D_{j_s m_s}(x, t)| = |D_{j_s m_s}(x \dot{-} t)| = \left| \sum_{k=0}^{j_s m_s - 1} \psi_k(x) \right| \leq \\ &\leq j_s m_s \leq (a_s + 1) m_s \leq p_{s+1} m_s \leq m_{s+1}. \end{aligned} \quad (30)$$

5. ФОРМУЛИРОВКИ ОСНОВНЫХ ТЕОРЕМ

Пусть $S_n(x, f)$ n -я частичная сумма Фурье по системе Γ . Справедлива

Теорема 1. Для всех целых n и любого $x \in G$ произвольной интегрируемой на группе G и непрерывной в точке $x \in G$ функции $f(t)$ имеет место неравенство

$$|S_n(x, f) - f(x)| \leq (1 + 2 \ln p_{s+1}) \omega_s(x, f), \quad (31)$$

где n и s связаны формулой (1), а $\omega_n(x, f)$ — модуль непрерывности $f(t)$ (см. (2)).



Из теоремы 1 легко вытекают следующие выводы.

Следствие 1. Для любой непрерывной на группе G функции $f(t)$, всех $x \in G$ и натуральных n справедлива оценка

$$|S_n(x, f) - f(x)| \leq (1 + 2 \ln p_{s+1}) \omega_s(f), \quad (32)$$

где n и s связаны формулой (1), а $\omega_n(f)$ — модуль непрерывности $f(t)$ (см. (2)).

Как будет упомянуто в п. 7.1, следствие 1 можно получить из некоторых результатов [9].

Следствие 2. Если $\omega_n(x, f) = o\left(\frac{1}{\ln p_{n+1}}\right)$, то ряд Фурье по системе Γ от удовлетворяющей условиям теоремы 1 функции $f(t)$ сходится к ней в точке x .

Следствие 3 (признак Дини – Липшица по обобщённым системам Хаара). Если

$$\omega_n(f) = o\left(\frac{1}{\ln p_{n+1}}\right), \quad (33)$$

то ряд Фурье по системе Γ от непрерывной на G функции $f(t)$ сходится к ней равномерно на G .

Следствие 4. В случае $\omega_n(x, f) = O\left(\frac{1}{\ln p_{n+1}}\right)$ частичные суммы Фурье от удовлетворяющей условиям теоремы 1 функции $f(t)$ по системе Γ ограничены в точке x .

Следствие 5. Если $\sup_n p_n < \infty$, то ряд Фурье по системе Γ от любой непрерывной на группе G функции $f(t)$ сходится к ней равномерно на G .

Свойство 5 было известно ранее, см. условие (51) в п. 7.2.

Отметим, что условие (33) не улучшается, ибо имеет место

Теорема 2. В случае $\sup_n p_n = \infty$ для любой точки $x \in G$ существует непрерывная на группе G функция, модуль непрерывности которой $\omega_n(x, f) = O\left(\frac{1}{\ln p_{n+1}}\right)$, однако её ряд Фурье по системе Γ расходится (ввиду следствия 4 — ограниченно) в точке x .

6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Известно, что n -я частичная сумма Фурье от функции $f(t)$ в точке x по ортонормированной системе $\Phi = \{\varphi_n(t)\}_{n=0}^\infty$ можно найти по формуле

$$S_n^{(\Phi)}(x, f) = \int_0^1 f(t) D_n(x, t) dt,$$

где $D_n(x, t)$ — ядра Дирихле.

Тогда для системы Γ : $S_n^{(\Gamma)}(x, f) = \int_G f(t) D_n(x, t) dt$.

Рассмотрим $S_n^{(\Gamma)}(x, f) - f(x)$. Ввиду того, что $\int_G D_n(x, t) dt = 1$, получаем

$$\begin{aligned} S_n^{(\Gamma)}(x, f) - f(x) &= \int_G f(t) D_n(x, t) dt - f(x) \int_G D_n(x, t) dt = \int_G (f(t) - f(x)) D_n(x, t) dt = \\ &= \int_{x \dot{+} G_{s+1}} (f(t) - f(x)) D_n(x, t) dt + \int_{x \dot{+} G_s \setminus G_{s+1}} (f(t) - f(x)) D_n(x, t) dt + \int_{x \dot{+} G \setminus G_s} (f(t) - f(x)) D_n(x, t) dt. \end{aligned}$$

Исходя из равенства (12) для третьего слагаемого в полученной формуле справедливы равенства:

$$\int_{x \dot{+} G \setminus G_s} (f(t) - f(x)) D_n(x, t) dt = \int_{x \dot{-} t \in G \setminus G_s} (f(t) - f(x)) D_n(x, t) dt = 0.$$



Мы показали, что

$$S_n^{(\Gamma)}(x, f) - f(x) = \int_{x \dot{-} t \in G_{s+1}} (f(t) - f(x)) D_n(x, t) dt + \int_{x \dot{-} t \in G_s \setminus G_{s+1}} (f(t) - f(x)) D_n(x, t) dt. \quad (34)$$

Первое слагаемое в равенстве (34) оценим исходя из (30):

$$\begin{aligned} 0 \leq & \left| \int_{x \dot{-} t \in G_{s+1}} (f(t) - f(x)) D_n(x, t) dt \right| \leq \int_{x \dot{-} t \in G_{s+1}} |f(t) - f(x)| |D_n(x, t)| dt \leq \\ & \leq \omega_{s+1}(x, f) \int_{x \dot{-} t \in G_{s+1}} |D_n(x, t)| dt \leq \omega_{s+1}(x, f) m_{s+1} \int_{x \dot{-} t \in G_{s+1}} dt = \omega_s(x, f) \leq \omega_s(x, f), \end{aligned} \quad (35)$$

так как мера $G_{s+1} : \mu(G_{s+1}) = \frac{1}{m_{s+1}}$, а последовательность $\{\omega_n(f)\}_{n=0}^{\infty}$ (см. формулу (2)) не убывает.

Применяя формулы (27) и (28), рассмотрим второй интеграл в (34)

$$\begin{aligned} 0 \leq & \left| \int_{x \dot{-} t \in G_s \setminus G_{s+1}} (f(t) - f(x)) D_n(x, t) dt \right| \leq \int_{x \dot{-} t \in G_s \setminus G_{s+1}} |f(t) - f(x)| |D_n(x, t)| dt \leq \\ & \leq \omega_s(x, f) \int_{x \dot{-} t \in G_s \setminus G_{s+1}} S(x \dot{-} t) dt \leq 2\omega_s(f) \ln p_{s+1}. \end{aligned} \quad (36)$$

Подставляя (35) и (36) в (34), получим неравенство (31). Теорема доказана. \square

7. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

7.1. Построение контрпримера в случае, когда последовательность $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет бесконечную подпоследовательность, состоящую только из нечётных чисел

Пусть p_{n+1} – нечётное, а $j_n = \frac{p_{n+1}-1}{2}$. Тогда из равенства (29), формулы (15) и теоремы А найдём по системе $\Gamma D_{j_n m_n}(x, t)$ при $x \dot{-} t \in G_{4l+1, n+1} \subset G_n \setminus G_{n+1}$ (т. е. l – целое с $0 \leq l \leq \frac{p_{n+1}-2}{4}$):

$$\begin{aligned} D_{j_n m_n}(x, t) &= D_{j_n m_n}(x \dot{-} t) = m_n \frac{1 - (r_n(x \dot{-} t))^{j_n}}{1 - r_n(x \dot{-} t)} = m_n \frac{1 - \exp \frac{2i\pi(4l+1)j_n}{p_{n+1}}}{1 - \exp \frac{2i\pi(4l+1)}{p_{n+1}}} = \\ &= m_n \frac{-2i \sin \frac{\pi(4l+1)j_n}{p_{n+1}} \exp \left(i \frac{\pi(4l+1)j_n}{p_{n+1}} \right)}{-2i \sin \frac{\pi(4l+1)}{p_{n+1}} \exp \left(i \frac{\pi(4l+1)}{p_{n+1}} \right)} = m_n \frac{\sin \frac{\pi(4l+1)(p_{n+1}-1)}{2p_{n+1}}}{\sin \frac{\pi(4l+1)}{p_{n+1}}} e^{i \frac{\pi(4l+1)(j_n-1)}{p_{n+1}}} = \\ &= m_n \frac{\sin \left(\frac{\pi(4l+1)p_{n+1}}{2p_{n+1}} - \frac{\pi(4l+1)}{2p_{n+1}} \right)}{2 \sin \frac{\pi(4l+1)}{2p_{n+1}} \cos \frac{\pi(4l+1)}{2p_{n+1}}} e^{i \frac{\pi(4l+1)(p_{n+1}-3)}{2p_{n+1}}} = m_n \frac{\sin \left(2\pi l + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi(4l+1)}{2p_{n+1}} \right)}{2 \sin \frac{\pi(4l+1)}{2p_{n+1}} \cos \frac{\pi(4l+1)}{2p_{n+1}}} e^{i \frac{\pi(4l+1)(p_{n+1}-3)}{2p_{n+1}}} = \\ &= m_n \frac{\cos \frac{\pi(4l+1)}{2p_{n+1}}}{2 \sin \frac{\pi(4l+1)}{2p_{n+1}} \cos \frac{\pi(4l+1)}{2p_{n+1}}} e^{i \frac{\pi(4l+1)(p_{n+1}-3)}{2p_{n+1}}} = \frac{m_n}{2 \sin \frac{\pi(4l+1)}{2p_{n+1}}} e^{i \frac{\pi(4l+1)(p_{n+1}-3)}{2p_{n+1}}}. \end{aligned}$$

Мы показали, что для $x \in G_{4l+1, n+1}$, $l = 0, 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{p_{n+1}-2}{4} \right\rfloor$ справедливо равенство

$$D_{j_n m_n}(x, t) = \frac{m_n}{2 \sin \frac{\pi(4l+1)}{2p_{n+1}}} e^{i \frac{\pi(4l+1)(p_{n+1}-3)}{2p_{n+1}}}. \quad (37)$$

Пусть $\{p_{n_k+1}\}_{k=1}^{\infty}$ – бесконечная возрастающая подпоследовательность последовательности $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$, состоящая только из нечётных чисел, и такая, что

$$p_{n_k+1} > 12. \quad (38)$$

Так как p_{n_k+1} – нечётные, то числа

$$j_k = \frac{p_{n_k+1} - 1}{2} \quad (39)$$

целые.

Рассмотрим функцию

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\ln p_{n_k+1}} e^{-i \frac{\pi(4l+1)(p_{n_k+1}-3)}{2p_{n_k+1}}}, & \text{если } x^{-}t \in G_{4l+1, n_k+1}, \quad l = 0, 1, 2, \dots, \left[\frac{p_{n_k+1}-2}{4} \right], \quad k = 1, 2, \dots, \\ 0, & \text{для остальных } t. \end{cases}$$

Так как $\overline{\lim}_{t \rightarrow x} |f(t)| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln p_{n_k+1}} = 0 = f(x)$, то функция $f(t)$ непрерывна на группе G и $\omega_{n_k}(x, f) \leq \frac{1}{\ln p_{n_k+1}}$. В [9–11] показано, что для систем Γ (обобщённых систем Хаара) будет

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{m_n}(x, f) = f(x). \tag{40}$$

Найдём частичную сумму Фурье $S_{j_k m_{n_k}}(x, f)$ по системе Γ (j_k определено в (39))

$$\begin{aligned} S_{j_k m_{n_k}}^{(\Gamma)}(x, f) &= \int_G f(t) D_{j_k m_{n_k}}(x, t) dt = \\ &= \int_{x^{-}t \in G_{n_k+1}} f(t) D_{j_k m_{n_k}}(x, t) dt + \int_{x^{-}t \in G_{n_k} \setminus G_{n_k+1}} f(t) D_{j_k m_{n_k}}(x, t) dt + \int_{x^{-}t \in G \setminus G_{n_k}} f(t) D_{j_k m_{n_k}}(x, t) dt. \end{aligned}$$

Ввиду формулы (15) и теоремы А, третье слагаемое в правой части последнего равенства обращается в нуль. Таким образом, мы показали, что

$$S_{j_k m_{n_k}}^{(\Gamma)}(x, f) = \int_{x^{-}t \in G_{n_k+1}} f(t) D_{j_k m_{n_k}}(x, t) dt + \int_{x^{-}t \in G_{n_k} \setminus G_{n_k+1}} f(t) D_{j_k m_{n_k}}(x, t) dt. \tag{41}$$

Исходя из теоремы А и (15) оценим первое слагаемое в (41) (в (39) j_{n_k} обозначено через j_k)

$$\begin{aligned} \left| \int_{x^{-}t \in G_{n_k+1}} f(t) D_{j_k m_{n_k}}(x, t) dt \right| &\leq |j_k m_{n_k}| \int_{x^{-}t \in G_{n_k+1}} |f(t)| dt \leq \frac{p_{n_k+1}-1}{2} m_{n_k} \int_{x^{-}t \in G_{n_k+1}} |f(t)| dt < \\ &< \frac{p_{n_k+1} m_{n_k}}{\ln p_{n_k+1}} \int_{x^{-}t \in G_{n_k+1}} dt = \frac{m_{n_k+1}}{m_{n_k+1} \ln p_{n_k+1}} = \frac{1}{\ln p_{n_k+1}}, \end{aligned}$$

ибо мера множества $\mu(G_{n_k+1}) = \frac{1}{m_{n_k+1}}$.

Мы получили неравенство

$$\left| \int_{x^{-}t \in G_{n_k+1}} f(t) D_{j_k m_{n_k}}(x, t) dt \right| \leq \frac{1}{\ln p_{n_k+1}}. \tag{42}$$

Второе слагаемое в формуле (41) оцениваем исходя из равенства (37):

$$\begin{aligned} \left| \int_{x^{-}t \in G_{n_k} \setminus G_{n_k+1}} f(t) D_{j_k m_{n_k}}(x, t) dt \right| &= \left| \sum_{l=0}^{\left[\frac{p_{n_k+1}-2}{4} \right]} \int_{x^{-}t \in G_{4l+1, n_k+1}} f(t) D_{j_k m_{n_k}}(x, t) dt \right| = \\ &= \left| \frac{1}{\ln p_{n_k+1}} \sum_{l=0}^{\left[\frac{p_{n_k+1}-2}{4} \right]} \int_{x^{-}t \in G_{4l+1, n_k+1}} e^{-i \frac{\pi(4l+1)(p_{n_k+1}-3)}{2p_{n_k+1}}} \frac{m_{n_k}}{2 \sin \frac{\pi(4l+1)}{2p_{n_k+1}}} e^{i \frac{\pi(4l+1)(p_{n_k+1}-3)}{2p_{n_k+1}}} dt \right| = \\ &= \frac{m_{n_k}}{2 \ln p_{n_k+1}} \sum_{l=0}^{\left[\frac{p_{n_k+1}-2}{4} \right]} \frac{1}{\sin \frac{\pi(4l+1)}{2p_{n_k+1}}} \int_{x^{-}t \in G_{4l+1, n_k+1}} dt \geq \frac{m_{n_k}}{2 m_{n_k+1} \ln p_{n_k+1}} \sum_{l=0}^{\left[\frac{p_{n_k+1}-2}{4} \right]} \frac{2 p_{n_k+1}}{\pi(4l+1)} > \end{aligned}$$



$$> \frac{2m_{n_k} p_{n_k+1}}{2\pi m_{n_k+1} \ln p_{n_k+1}} \sum_{l=0}^{\left[\frac{p_{n_k+1}-2}{4}\right]} \frac{1}{4(l+1)} > \frac{\ln \left[\frac{p_{n_k+1}-2}{4}\right]}{4\pi \ln p_{n_k+1}} > \frac{\ln \left(\frac{p_{n_k+1}-2}{4} - 1\right)}{4\pi \ln p_{n_k+1}} = \frac{\ln(p_{n_k+1} - 6) - \ln 4}{4\pi \ln p_{n_k+1}}.$$

Показано неравенство

$$\left| \int_{x \cdot t \in G_{n_k} \setminus G_{n_k+1}} f(t) D_{j_k m_{n_k}}(x, t) dt \right| > \frac{\ln(p_{n_k+1} - 6) - \ln 4}{4\pi \ln p_{n_k+1}}. \quad (43)$$

Ввиду условия (38) $p_{n_k+1} - 6 > p_{n_k+1} - \frac{p_{n_k+1}}{2} = \frac{p_{n_k+1}}{2}$. Поэтому из (43) имеем

$$\left| \int_{x \cdot t \in G_{n_k} \setminus G_{n_k+1}} f(t) D_{j_k m_{n_k}}(x, t) dt \right| > \frac{\ln p_{n_k+1} - \ln 8}{4\pi \ln p_{n_k+1}} = \frac{1}{4\pi} - \frac{\ln 8}{4\pi \ln p_{n_k+1}}. \quad (44)$$

Подставляя неравенства (44) и (42) в (41), получим

$$|S_{j_k m_{n_k}}^{(\Gamma)}(x, f)| \geq \frac{1}{4\pi} - \frac{\ln 8}{4\pi \ln p_{n_k+1}} - \frac{1}{\ln p_{n_k+1}}, \quad (45)$$

т. е. $S_{j_k m_{n_k}}^{(\Gamma)}(x, f)$ не стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$. Сопоставляя это с равенством (40), выводим, что ряд Фурье по системе Γ в точке от функции $f(t)$ расходится (ограниченно). Теорема 2 доказана в случае, если последовательность $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ имеет бесконечную подпоследовательность, состоящую только из нечётных чисел.

7.2. Построение контрпримера в случае, когда последовательность $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ не удовлетворяет условию п. 7.1

Пусть число p_{n+1} – чётное, а $j_n = \frac{p_{n+1}}{2}$. Найдём $D_{j_n m_n}(x, t)$ для $x \cdot t \in G_{4l+1, n+1} \subset G_n \setminus G_{n+1}$ (или $l = 0, 1, 2, \dots, \left[\frac{p_{n+1}-2}{4}\right]$). Используя равенство (15) и теорему А, а также формулу (29), имеем

$$\begin{aligned} D_{j_n m_n}(x, t) &= D_{j_n m_n}(x \cdot t) = m_n \frac{1 - (r_n(x \cdot t))^{j_n}}{1 - r_n(x \cdot t)} = m_n \frac{1 - \exp\left(\frac{2i\pi(4l+1)j_n}{p_{n+1}}\right)}{1 - \exp\left(\frac{2i\pi(4l+1)}{p_{n+1}}\right)} = \\ &= m_n \frac{-2i \sin \frac{\pi(4l+1)j_n}{p_{n+1}}}{-2i \sin \frac{\pi(4l+1)}{p_{n+1}}} e^{\frac{i\pi(4l+1)j_n}{p_{n+1}}} e^{-\frac{i\pi(4l+1)}{p_{n+1}}} = m_n \frac{\sin \frac{\pi(4l+1)p_{n+1}}{2p_{n+1}}}{\sin \frac{\pi(4l+1)}{p_{n+1}}} e^{\frac{i\pi(4l+1)(j_n-1)}{p_{n+1}}} = \\ &= m_n \frac{\sin \frac{\pi(4l+1)}{2}}{\sin \frac{\pi(4l+1)}{p_{n+1}}} e^{\frac{i\pi(4l+1)(p_{n+1}-2)}{2p_{n+1}}} = \frac{m_n \sin\left(2\pi l + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin \frac{\pi(4l+1)}{p_{n+1}}} e^{\frac{i\pi(4l+1)(p_{n+1}-2)}{2p_{n+1}}}. \end{aligned}$$

Мы показали, что для $x \cdot t \in G_{4l+1, n+1} \subset G_n \setminus G_{n+1}$, т. е. l – целое с $0 \leq l \leq \left[\frac{p_{n+1}-2}{4}\right]$ и $j_n = \frac{p_{n+1}}{2}$

$$D_{j_n m_n}(x, t) = \frac{m_n}{\sin \frac{\pi(4l+1)}{p_{n+1}}} e^{\frac{i\pi(4l+1)(p_{n+1}-2)}{2p_{n+1}}}. \quad (46)$$

Пусть неограниченная последовательность $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ не удовлетворяет условию п. 7.1. Это означает, что всякая её бесконечная подпоследовательность (а она должна быть, так как $\sup p_n = \infty$) может содержать не более чем конечное число нечётных чисел. Отбросив их, получим бесконечную подпоследовательность, состоящую только из чётных чисел. Перейдя в ней, в случае необходимости, к подпоследовательности, построим бесконечную возрастающую подпоследовательность $\{p_{n_k+1}\}_{k=1}^{\infty}$, состоящую только из чётных чисел и удовлетворяющей условию (38). Рассмотрим функцию

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\ln p_{n_k+1}} e^{-\frac{i\pi(4l+1)(p_{n_k+1}-2)}{2p_{n_k+1}}}, & \text{если } x \cdot t \in G_{4l+1, n_k+1} \subset G_{n_k} \setminus G_{n_k+1}, \\ & l = 0, 1, 2, \dots, \left[\frac{p_{n_k+1}-2}{4}\right], k = 1, 2, 3, \dots, \\ 0, & \text{для остальных } t. \end{cases}$$



Аналогично п. 7.1 показываем, что функция $f(t)$ непрерывна на группе G и её частичные суммы Фурье удовлетворяют условию (40). Положим

$$j_k = \frac{p_{n_k+1}}{2}. \tag{47}$$

Рассмотрим $\int_{x \cdot t \in G_{4l+1, n_k+1}} f(t) D_{j_k m_{n_k}}(x, t) dt$. Из равенства (46) получим

$$\begin{aligned} & \int_{x \cdot t \in G_{4l+1, n_k+1}} f(t) D_{j_k m_{n_k}}(x, t) dt = \\ &= \frac{1}{\ln p_{n_k+1}} \times \frac{m_{n_k}}{\sin \frac{\pi(4l+1)}{p_{n_k+1}}} \times \int_{x \cdot t \in G_{4l+1, n_k+1}} e^{\frac{i\pi(4l+1)(p_{n_k+1}-2)}{2p_{n_k+1}}} e^{-\frac{i\pi(4l+1)(p_{n_k+1}-2)}{2p_{n_k+1}}} dt \geq \\ & \geq \frac{m_{n_k}}{\ln p_{n_k+1} \frac{\pi(4l+1)}{p_{n_k+1}}} \int_{x \cdot t \in G_{4l+1, n_k+1}} dt = \frac{m_{n_k} p_{n_k+1}}{\pi(4l+1) \ln p_{n_k+1} m_{n_k+1}} = \frac{1}{\pi(4l+1) \ln p_{n_k+1}}. \end{aligned}$$

Мы доказали формулу

$$\int_{x \cdot t \in G_{4l+1, n_k+1}} f(t) D_{j_k m_{n_k}}(x, t) dt \geq \frac{1}{\pi(4l+1) \ln p_{n_k+1}} \tag{48}$$

(неравенство (48), в частности, означает, что его левая часть всегда действительна).

Теперь рассмотрим $S_{j_k m_{n_k}}^{(\Gamma)}(x, f)$:

$$\begin{aligned} S_{j_k m_{n_k}}^{(\Gamma)}(x, f) &= \int_G f(t) D_{j_k m_{n_k}}(x, t) dt = \int_{x \cdot t \in G_{n_k+1}} f(t) D_{j_k m_{n_k}}(x, t) dt + \\ &+ \int_{x \cdot t \in G_{n_k} \setminus G_{n_k+1}} f(t) D_{j_k m_{n_k}}(x, t) dt + \int_{x \cdot t \in G \setminus G_{n_k}} f(t) D_{j_k m_{n_k}}(x, t) dt. \end{aligned} \tag{49}$$

Ввиду равенства (12) последнее слагаемое в (49) обращается в нуль. Мы показали, что

$$S_{j_k m_{n_k}}^{(\Gamma)}(, f) = \int_{x \cdot t \in G_{n_k+1}} f(t) D_{j_k m_{n_k}}(x, t) dt + \int_{x \cdot t \in G_{n_k} \setminus G_{n_k+1}} f(t) D_{j_k m_{n_k}}(x, t) dt. \tag{50}$$

Первое слагаемое в (50) оценим исходя из теоремы А и равенства (15) (j_k определены в (47)):

$$\begin{aligned} \left| \int_{x \cdot t \in G_{n_k+1}} f(t) D_{j_k m_{n_k}}(x, t) dt \right| &= j_k m_{n_k} \left| \int_{x \cdot t \in G_{n_k+1}} f(t) dt \right| \leq \frac{p_{n_k+1} m_{n_k}}{2} \int_{x \cdot t \in G_{n_k+1}} |f(t)| dt \leq \\ &\leq \frac{m_{n_k+1}}{2 \ln p_{n_k+1}} \int_{x \cdot t \in G_{n_k+1}} dt \leq \frac{m_{n_k+1}}{\ln p_{n_k+1}} \times \frac{1}{m_{n_k+1}} = \frac{1}{\ln p_{n_k+1}}, \end{aligned}$$

так как мера $\mu(G_{n_k+1}) = \frac{1}{m_{n_k+1}}$.

Заметим, что равенства (41) и (50) идентичны.

Мы показали, что первое слагаемое в (50) удовлетворяет неравенству (42).

Используя определение функции $f(t)$ (перед формулой (47)), рассмотрим второй интеграл в правой части равенства (50). Из неравенства (48) имеем

$$\int_{x \cdot t \in G_{n_k} \setminus G_{n_k+1}} f(t) D_{j_k m_{n_k}}(x, t) dt = \sum_{l=0}^{\left[\frac{p_{n_k+1}-2}{4} \right]} \int_{x \cdot t \in G_{4l+1, n_k+1}} f(t) D_{j_k m_{n_k}}(x, t) dt \geq$$



$$\geq \frac{1}{\pi \ln p_{n_k+1}} \sum_{l=0}^{\left[\frac{p_{n_k+1}-2}{4} \right]} \frac{1}{4(l+1)} \geq \frac{\ln \left[\frac{p_{n_k+1}-2}{4} \right]}{4\pi \ln p_{n_k+1}} \geq \frac{\ln \left(\frac{p_{n_k+1}-2}{4} - 1 \right)}{4\pi \ln p_{n_k+1}} = \frac{\ln(p_{n_k+1} - 6) - \ln 4}{4\pi \ln p_{n_k+1}}.$$

Итак, второе слагаемое в (50) оценивается неравенством (43). Рассуждая далее как в п. 7.1, мы приходим к выводу, что ряд Фурье по системе Γ от функции $f(t)$ в точке x расходится (ограниченно). Теорема 2 полностью доказана. \square

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. О БОЛЕЕ РАННИХ РЕЗУЛЬТАТАХ И ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Систему Ψ рассматривали Н. Я. Виленкин [1] для простых p_n как систему характеров нульмерной компактной абелевой группы и Прайс (Price) [12] на отрезке $[0, 1]$ (условия простоты p_n Прайс не накладывал). В данной работе система Ψ рассматривается на группе последовательностей G , которая отображением Монна взаимно-однозначно переводится на модифицированный отрезок $[0, 1]^*$ с сохранением меры и интеграла Лебега. Условие простоты на числа из последовательности $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ не накладывается, а базисный элемент e_n выбирается не произвольный из смежного класса в G_{n-1}/G_n , как в нульмерных компактных абелевых группах, а строго задан. Поэтому рассматриваемую в работе систему Ψ лучше называть системой Прайса.

Для $p_n \equiv p$ система Ψ переходит в систему Крестенсона (Chrestenson) [13] (либо Крестенсона – Леви); для $p_n \equiv 2$ – в систему Уолша (Walsh) [14] $W = \{w_n\}_{n=0}^\infty$ в нумерации Пэли (Paley) [15].

При $p_n \equiv 2$ функции $r_n(x) = \psi_{m_n}(x) = w_{2^n}(x)$ рассматривались Радемахером (Rademacher) [16]. Поэтому их часто называют функциями Радемахера (для систем Виленкина либо Прайса).

Систему Γ на отрезке $[0; 1]$ рассматривали (по-видимому, впервые) Б. И. Голубов и А. И. Рубинштейн [10] (с ограничением $\sup_n p_n < \infty$) и Б. И. Голубов [9] (без ограничений на последовательность $\{p_n\}_{n=0}^\infty$; сама система Γ обозначена в честь Б. И. Голубова). В случае $p_n \equiv 2$ последовательность функций $\{\gamma_n(x)\}_{n=0}^\infty$ является системой Хаара (Haar) [17] $H = \{h_n(x)\}_{n=0}^\infty$. На нульмерной компактной абелевой группе система $\{\gamma_n(x)\}_{n=0}^\infty$ была рассмотрена С. Ф. Лукомским [11]. Следует отметить, что, как показывает теорема 2, система типа Хаара Γ в отличие от системы Хаара H при $\sup_n p_n = \infty$ уже не является системой сходимости.

Так как двусторонняя оценка S -мажоранты (27) не зависит от выбора базисных элементов $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ (хотя сама S -мажоранта к ним привязана), а при доказательстве теоремы 1 используется только эта оценка S -мажоранты, то теорему 1 и все следствия из неё (в том числе и следствие 2 – признак Дини – Липшица по системам типа Хаара) можно распространить и на группы Виленкина.

С. Ф. Лукомский [11] показал, что если выполнено условие

$$\omega_n(f) = o\left(\frac{1}{p_{n+1}}\right), \tag{51}$$

то ряд Фурье по обобщённой системе Хаара от непрерывной на группе G функции $f(t)$ сходится к ней равномерно на G , откуда, в частности, легко вывести и следствие 5 (ранее получено в [11]). В [11] результат рассматривался на нульмерных компактных абелевых группах. Теорема 1 (точнее – следствие 3) является улучшением условия (51), а теорема 2 показывает, что отменить (51) (либо хотя бы улучшить (33)) уже нельзя.

Интегральные оценки ядер Дирихле (функции Лебега) по обобщённым системам Хаара на нульмерных компактных группах найдены также Н. Е. Комиссаровой [18].

Для систем Ψ условие Дини – Липшица было получено в [8], где показано, что если

$$\omega_n(f) = o\left(\frac{1}{\ln m_{n+1}}\right),$$

то ряд Фурье по системе Виленкина от непрерывной на группе G функции $f(t)$ сходится к ней равномерно на G , а также в случае $\sup_n p_n = \infty$ существует непрерывная на группе G функция $f(t)$, такая, что $\omega_n(f) = O\left(\frac{1}{\ln m_{n+1}}\right)$, однако её ряд Фурье по системе Виленкина расходится в точке $x = 0$.



Не лишне было бы упомянуть, что следствие 1 можно получить из установленного Б. И. Голубовым [9, формула (4.10)] неравенства

$$\|f(t) - S_n(t, f)\|_{C(G)} \leq (1 + L_s)E_s^\infty(f),$$

где n и s связаны соотношением (1), L_n — константа Лебега (Комиссаровой [18] было показано, что $L_n = O(\ln n)$), а $E_n^\infty(f)$ — наилучшее приближение в метрике $C(G)$ непрерывной на G функции $f(t)$ полиномом n -й степени по обобщённой системе Хаара $\{\gamma_n(t)\}_{n=0}^\infty$. Однако в данной работе приведено иное доказательство с получением соответствующей *поточечной* оценки для непрерывной в заданной точке (и совсем не обязательно на группе G) функции $f(t)$ (теорема 1).

Автор выражает благодарность Б. И. Голубову, Т. П. Лукашенко, С. Ф. Лукомскому, В. А. Скворцову и Д. В. Фуфаеву за ценные советы и замечания, С. А. Маненкову, А. Ю. Кудрявцеву и А. И. Шканаеву за помощь при оформлении работы, а также организаторам 17-й Международной Саратовской зимней математической школы [19] за предоставленную возможность сделать доклад и изложить основные результаты данной работы.

Библиографический список

1. Виленкин Н. Я. Об одном классе полных ортогональных систем // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1947. Т. 11, № 4. С. 363–400.
2. Агаев Г. Н., Виленкин Н. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И. Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нульмерных группах. Баку : ЭЛМ, 1981. 180 с.
3. Monna A. F. Analyse Non-Archimédienne. Berlin ; Heidelberg ; N.Y. : Springer-Verlag, 1970. 118 с.
4. Хренников А. Ю., Шелкович В. М. Современный p -адический анализ и математическая физика. Теория и приложения. М. : Физматгиз, 2012. 452 с.
5. Щербаков В. И. Расходимость рядов Фурье по обобщённым системам Хаара в точках непрерывности функции // Изв. вузов. Сер. матем. 2016. № 1. С. 49–68.
6. Щербаков В. И. О поточечной сходимости рядов Фурье по мультипликативным системам // Вестн. МГУ. Сер. Математика, механика. 1983. № 2. С. 37–42.
7. Onneweer C. W., Waterman D. Uniform convergence of Fourier Series on groups // Michigan Math. J. 1971. Vol. 18, iss. 3. P. 265–273.
8. Щербаков В. И. Признак Дини – Липшица и сходимость рядов Фурье по мультипликативным системам // Analysis Math. 1984. Vol. 10, iss. 1. P. 133–150.
9. Голубов Б. И. Об одном классе полных ортогональных систем // Сиб. матем. журн. 1968. Т. IX, № 2. С. 297–314.
10. Голубов Б. И., Рубинштейн А. И. Об одном классе систем сходимости // Матем. сб. Нов. сер. 1966. Т. 71, вып. 1. С. 96–115.
11. Лукомский С. Ф. О рядах Хаара на компактной нульмерной группе // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 1. С. 24–29.
12. Price J. J. Certain groups of orthogonal step functions // Canadian J. Math. 1957. Vol. 9, iss. 3. P. 417–425.
13. Chrestenson H. E. A class of generalized Walsh's functions // Pacific J. Math. 1955. Vol. 5, iss. 1. P. 17–31.
14. Walsh J. L. A constructive of normal orthogonal functions // Amer. J. Math. 1923. Vol. 49, iss. 1. P. 5–24.
15. Paley R. E. A. C. A remarkable series of orthogonal functions // Proc. London Math. Soc. 1932. Vol. 36. P. 241–264.
16. Rademacher H. Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunctionen // Math. Ann. 1922. B. 87, № 1–2. P. 112–130.
17. Haar A. Zur Theorie der Orthogonalischen Functionensysteme // Math. Ann. 1910. B. 69. P. 331–371.
18. Комиссарова Н. Е. Функции Лебега по системе Хаара на нульмерных компактных группах // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 3. С. 30–36.
19. Щербаков В. И. Признак Дини – Липшица по обобщённым системам Хаара // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 17-й междунар. Саратов. зимн. шк. Саратов : Научная книга, 2014. С. 307–308.

Образец для цитирования:

Щербаков В. И. Признак Дини – Липшица для обобщённых систем Хаара // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 4. С. 435–448. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-435-448.



Dini – Lipschitz Test on the Generalized Haar Systems

V. I. Shcherbakov

Victor I. Shcherbakov, Moscow Technical University of Communication and Information, 32, Narodnogo Opolchenija str., 123995, Moscow, Russia, kafmathan@mail.ru (for Shcherbakov V. I.)

Generalized Haar systems, which are generated (generally speaking, unbounded) by a sequence $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ and which is defined on the modification segment $[0, 1]^*$, that is on a segment $[0, 1]$, where $\{p_n\}$ — rational points are calculated two times and which is a geometrical representation of zero-dimensional compact Abelian group are considering in this work. The main result of this work is a setting of the pointwise estimation between of an absolute value of difference between continuous in the given point function and it's n -s particular Fourier sums and “pointwise” module of continuity of this function (this notion (“pointwise” module of continuity $\omega_n(x, f)$) is also defined in this work). Based on this a uniform estimation between an absolute value of difference between a continuous on the $[0, 1]^*$ function and it's particular Fourier Sums and the module of continuity of this function is established. A sufficient condition of the pointwise and uniformly boundedness of particular Fourier Sums by generalized Haar's systems for the given continuous function is established too. Based on this estimation we establish a test of convergence of Fourier Series with respect to generalized Haar's systems analogous Dini – Lipschitz test. The unimprovement of the test, which is obtained in this work, is showed too. For any $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ with $\sup_n p_n = \infty$ a model of the continuous on $[0, 1]^*$ function, which Fourier Series by generalized Haar's system, which generated by sequence $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ boundly diverges in some fixed point, is constructed. This result may be applied to the zero-dimention compact Abelian groups.

Key words: Abelian group, modification segment $[0; 1]$, a continuous functions on the modification segment $[0; 1]$, characters systems, Price's systems, a generalized Haar's systems, Dirichler's kernels, Dini – Lipschitz's test .

References

1. Vilenkin N. Ya. On a class of complete orthonormal systems. *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.*, 1947, vol. 11, no. 4, pp. 363–400 (in Russian).
2. Agaev G. N., Vilenkin N. Ya., Dzaferli G. M., Rubinstein A. I. *Mul'tiplicativnye sistemi funkciy i garmonicheskij analiz na nul'mernyh gruppah* [Multiplicative Systems of Functions and Harmonic Analysis on Zero-dimensional Groups]. Baku, ELM, 1981, 180 p. (in Russian).
3. Monna A. F. *Analyse Non-Archimédienne*. Berlin, Heidelberg, N. Y., Springer-Verlag, 1970, 118 p.
4. Khrennikov A. Y., Shelkovich V. M. *Sovremenniy p -addicheskiy analiz i matematicheskaja fizika. Teoria i prilozhenija* [The Moderne p -additional Analysis and Mathematical Phisics. Theory and Applications]. Moscow, Fizmatgiz, 2012, 452 p. (in Russian).
5. Shcherbakov V. I. Divergence of the Fourier series by generalized Haar systems at points of continuity of a function. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2016, vol. 60, no. 1, pp. 42–59. DOI: 10.3103/S1066369X16010059.
6. Shcherbakov V. I. About Pointwise convergence of the Fourier Series with Respect to Multiplicative Systems. *Vestn. MSU, Ser. Math., Mech.*, 1983, iss. 2, pp. 37–42 (in Russian).
7. Onneweer C. W., Waterman D. Uniform convergence of Fourier Series on groups. *Michigan Math. J.*, 1971, vol. 18, iss. 3, pp. 265–273.
8. Shcherbakov V. I. Dini – Lipschitz Test and Convergence of Fourier Series which Respect to Multiplicative Systems. *Analysis Math.*, 1984, vol. 10, iss. 1, pp. 133–150 (in Russian).
9. Golubov B. I. About One Class of the Complete Orthogonal Systems. *Sib. Math. J.*, 1968, vol. IX, no. 2, pp. 297–314 (in Russian).
10. Golubov B. I., Rubinshtein A. I. A class of convergence systems. *Mat. Sb. (N.S.)*, 1966, vol. 71, iss. 1, pp. 96–115 (in Russian).
11. Lukomskii S. F. Haar series on compact zero-dimensional abelian group. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2009, vol. 9, iss. 1, pp. 24–29 (in Russian).
12. Price J. J. Certain groups of orthogonal step functions. *Canadian J. Math.*, 1957, vol. 9, iss. 3, pp. 417–425.
13. Chrestenson H. E. A class of generalized Walsh's functions. *Pacific J. Math.*, 1955, vol. 5, iss. 1, pp. 17–31.
14. Walsh J. L. A constructive of normal orthogonal functions. *Amer. J. Math.*, 1923, vol. 49, iss. 1, pp. 5–24.
15. Paley R. E. A. C. A remarkable series of orthogonal functions. *Proc. London Math. Soc.*, 1932, vol. 36, pp. 241–264.
16. Rademacher H. Enige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunctionen. *Math. Ann.*, 1922, B. 87, no. 1–2, pp. 112–130.
17. Haar A. Zur Theorie der Orthogonalischen Functionensysteme. *Math. Ann.*, 1910, B. 69, pp. 331–371.
18. Komissarova N. E. Lebesgue functions for Haar system on compact zero-dimensional group. *Izv.*



Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform., 2012, vol. 13, iss. 3, pp. 30–36 (in Russian).

19. Shcherbakov V. I. Priznak Dini – Lipschitz po obobshchennym sistemam Haara [Dini-Lipschitz Test on the Generalized Haar's Systems]. *Sovremennyye problemy teorii funktsii i ikh prilozheniia : materialy 17-i mezhdunar. Sarat. zimn. shk.* [Contemporary Problems of Function Theory and Their Applications : Proc. 17th Intern. Saratov Winter School], Saratov, Nauchnaya kniga, 2014, pp. 307–308 (in Russian).

aly 17-i mezhdunar. Sarat. zimn. shk. [Contemporary Problems of Function Theory and Their Applications : Proc. 17th Intern. Saratov Winter School], Saratov, Nauchnaya kniga, 2014, pp. 307–308 (in Russian).

Please cite this article in press as:

Shcherbakov V. I. Dini – Lipschitz Test on the Generalized Haar Systems. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 4, pp. 435–448 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-435-448.

МЕХАНИКА

УДК 539.3

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПАРАМЕТРОВ ЗАКРЕПЛЕНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ БАЛКИ ПРИ НАЛИЧИИ ЗАТУХАНИЯ

А. О. Ватульян¹, Л. В. Васильев²

¹Ватульян Александр Ованесович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теории упругости, Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Владикавказский научный центр РАН (ЮМИ), vatulyan@math.sfedu.ru

²Васильев Леонид Викторович, магистр кафедры теории упругости, Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, leninid@mail.ru

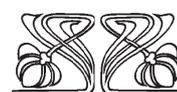
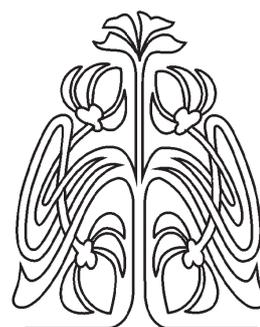
Определение характеристик твердых тел по дополнительным данным об амплитудах смещений или резонансным значениям в последние годы все чаще привлекает внимание исследователей. Среди такого типа задач особый интерес вызывают задачи, связанные с определением параметров, входящих в граничные условия и характеризующих взаимодействие исследуемого тела с окружающими телами. В настоящей работе исследуется задача об определении параметров граничных условий в балке, представлен новый подход к решению обратной задачи о реконструкции параметров опирания неоднородной вязкоупругой балки с вязкоупругими связями на правом конце и жестким закреплением на левом конце на основе анализа амплитуды и сдвига фазы смещения в двух точках на фиксированной частоте. Использован принцип соответствия для составления дифференциального уравнения колебаний на основе модели стандартного вязкоупругого тела. Представлен способ сведения задачи к каноническому виду. Составлены вспомогательные задачи Коши для численного решения как прямой, так и обратной задачи методом пристрелки. В рамках представленной модели проведены вычислительные эксперименты по восстановлению 4 параметров, характеризующих вязкоупругие связи в краевых условиях. Проанализировано влияние изменения параметров на резонансную частоту и амплитуду смещений. Проведена оценка влияния зашумления входных данных на реконструкцию искомым параметров. Отмечено, что представленный способ реконструкции позволяет восстанавливать параметры в граничных условиях с достаточно высокой точностью.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение 4-го порядка с переменными коэффициентами, краевые условия, колебания, реконструкция, вязкоупругость.

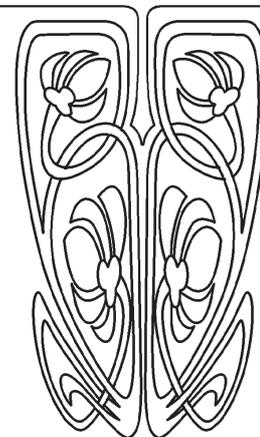
DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-449-456

ВВЕДЕНИЕ

Задачи об определении характеристик твердых тел по дополнительным данным об амплитудах смещений или резонансным значениям в последние годы все чаще привлекают внимание специалистов. Среди этого класса задач наиболее разработанным является класс граничных обратных задач по реконструкции параметров в граничных условиях. В реальных конструкциях часто характер закрепления на некоторой части границы оказывается отличным от канонического и моделируется некоторой упругой или вязкоупругой связью, причем для расчетов на прочность и колебания которой необходимо определить характеристики этой связи. Среди методов,



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





позволяющих оценить характеристики упругих систем, следует в первую очередь отметить акустические; в [1, 2] изложены теоретические основы низкочастотных акустических методов контроля. Отметим, что подобная задача для упругой балки с постоянной жесткостью была рассмотрена ранее [3–5], причем в этом случае можно выписать аналитическое решение, например через функции Крылова, соответственно составить частотное уравнение в явном виде и далее на основе анализа аналитических зависимостей определять искомые параметры на основе данных о нескольких резонансных частотах. В случае переменной жесткости анализировать аналитические зависимости при произвольных законах неоднородности не представляется возможным ввиду их отсутствия, однако можно реализовать построение численного решения с любой степенью точности на основе введения некоторых специальных задач Коши, порожденных исходной краевой задачей. В то же время вопрос об эффективности реконструкции параметров опирания при наличии затухания остается открытым. В настоящей работе представлен метод восстановления параметров закрепления вязкоупругого стержня с переменной жесткостью, жестко закрепленного на левом конце и имеющего вязкоупругие связи на другом конце при известных смещениях, заданных (измеренных) в двух точках. Применен принцип соответствия для составления дифференциального уравнения собственных колебаний на основе модели стандартного вязкоупругого тела. Представлен способ сведения задачи к каноническому виду. Составлены вспомогательные задачи Коши для численного решения как прямой, так и обратной задачи методом пристрелки. Поскольку искомые параметры вязкоупругости содержатся только в граничных условиях, то произведена оценка влияния этих параметров на амплитуду смещения точек балки и разработан эффективный способ их реконструкции, представлены результаты вычислительных экспериментов.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим колебания неоднородной вязкоупругой балки длины L . Будем считать, что левый конец балки зашпелен, а правый — оперт, причем опора имеет вязкоупругие свойства. Для общего случая уравнение колебаний упругой балки переменной жесткости имеет вид [6]

$$(E(x)Jy''(x))'' - \rho F \omega^2 y(x) = q, \quad (1)$$

где q — распределенная нагрузка. Для изучения колебаний балки из вязкоупругого материала будем использовать модель стандартного вязкоупругого тела [7], для которого определяющее соотношение имеет вид

$$n\dot{\sigma} + \sigma = En\dot{\varepsilon} + H\varepsilon, \quad (2)$$

где n — время релаксации, σ — напряжение, E — мгновенный модуль упругости, ε — деформация, H — длительный модуль упругости. Будем использовать принцип соответствия [7], согласно которому для изучения колебаний балки из вязкоупругого материала в уравнении (1) необходимо заменить модуль упругости комплексной функцией частоты координаты аналогично [8]. Вводя безразмерный параметр

$$k^4 = \frac{\rho_0 F_0 l^4}{G_0} \omega^2$$

и выражая

$$\omega = \frac{k^2}{l^2} \sqrt{\frac{G_0}{\rho_0 F_0}}$$

(G_0 — характерная жесткость, ρ_0 — характерная плотность материала, F_0 — характерная площадь поперечного сечения), получим, что в силу принципа соответствия необходимо заменить $E(x)$ на динамический модуль:

$$G_0 f(\xi, k) = G_0 \frac{h(\xi) + ik^2 c g(\xi)}{1 + ik^2 c},$$

где $h(\xi) = \frac{H(\xi)}{G_0}$, $g(\xi) = \frac{E(\xi)}{G_0}$, $k^2 c = n\omega$, $\xi = \frac{x}{l}$ — безразмерная координата, причем $g(\xi) > h(\xi)$. Тогда аналог уравнения (1) для вязкоупругого случая имеет вид

$$(f(\xi, k)y''(\xi))'' - k^4 y(\xi) = q_0, \quad (3)$$



где $q_0 = \frac{q}{G_0}$. Вязкоупругую связь на конце $\xi = 1$ будем характеризовать 4 параметрами вязкоупругости. Тогда граничные условия для уравнения (3) примут вид

$$\begin{cases} y(0) = 0, \\ y'(0) = 0 \\ f(1, k)y''(1, k) - F_1(k)y'(1, k) = 0, \\ (f(1, k)y''(1, k))' + F_2(k)y(1, k) = 0, \end{cases} \quad (4)$$

где $F_1(k)$ и $F_2(k)$ — комплексные функции вида

$$F_i(k) = \frac{\beta_i(1 + ick^2 q_i)}{1 + ick^2},$$

β_i, q_i, c — параметры вязкоупругости (далее считаем параметр c заданным). Для решения краевой задачи (3), (4) используем метод стрельбы [9]. Приведем (3) к каноническому виду:

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = \frac{y_3}{f(\xi, k)}, \\ y_3' = y_4, \\ y_4' = k^4 y_1 + q_0, \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} y_1(0, k) = 0, \\ y_2(0, k) = 0, \\ f(1, k)y_3(1, k) - F_1(k)y_2(1, k) = 0, \\ f(1, k)'y_4(1, k) + F_2(k)y_1(1, k) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Решение краевой задачи (5), (6) получается путем формирования линейной комбинации решений с разными начальными условиями:

$$y = y_0 + y^1 c_1 + y^2 c_2. \quad (7)$$

Здесь y_0 — есть частное решение неоднородной задачи (6) с начальными условиями:

$$y_1^0(0) = 0, \quad y_2^0(0) = 0, \quad y_3^0(0) = 0, \quad y_4^0(0) = 0,$$

y_1 и y_2 — есть решения вспомогательных задач Коши для системы (6) при $q_0 = 0$ с начальными условиями:

$$1) \quad y_1^1(0) = 0, \quad y_2^1(0) = 0, \quad y_3^1(0) = 0, \quad y_4^1(0) = 1,$$

$$2) \quad y_1^2(0) = 0, \quad y_2^2(0) = 0, \quad y_3^2(0) = 1, \quad y_4^2(0) = 0.$$

Удовлетворяя граничным условиям исходной задачи, получим, что c_1 и c_2 определяются из решения следующей алгебраической системы:

$$\begin{cases} f(1, k)(y_3^0(1, k) + y_3^1(1, k)c_1 + y_3^2(1, k)c_2) - F_1(k)(y_2^0(1, k) + y_2^1(1, k)c_1 + y_2^2(1, k)c_2) = 0, \\ f(1, k)'(y_4^0(1, k) + y_4^1(1, k)c_1 + y_4^2(1, k)c_2) + F_2(k)(y_1^0(1, k) + y_1^1(1, k)c_1 + y_1^2(1, k)c_2) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Проведена серия численных экспериментов для прямой задачи при законах неоднородности $h(\xi) = \xi^2 + 0.2$, $g(\xi) = 1 + \xi$, $c = 0.01$. Амплитуда смещения при резонансном значении максимальна в вязкоупругом случае и принимает конечное значение в отличие от упругого случая, так как имеется затухание, обусловленное вязкоупругостью балки. Приведем сравнение амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) для упругого и вязкоупругого случая, которое представлено на рис. 1.

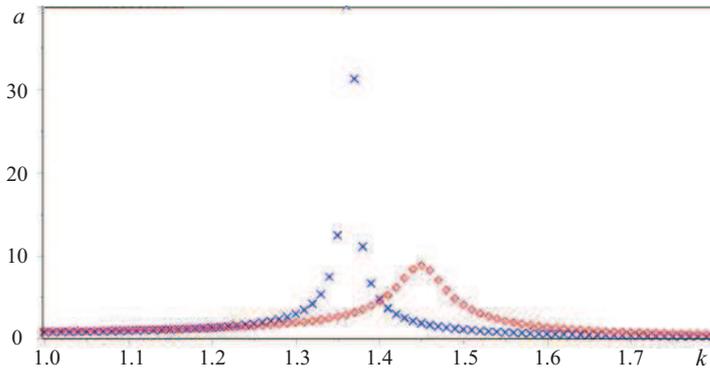


Рис. 1. АЧХ упругой и вязкоупругой балки

Крестики на рис. 1 обозначают амплитуды смещений для упругого случая, а кружочки для вязкоупругого, таким образом, вязкоупругие свойства балки на значение резонанса и значение амплитуды влияет достаточно сильно. Обозначим $a = |y(1, k)|$.

На рис. 2 изображены кривые, характеризующие участок АЧХ, соответствующий первому резонансу для разных параметров q_1 . Кривая, соответствующая $q_1 = 1$, обозначена квадратиками, $q_1 = 2$ — крестиками, $q_1 = 3$ — кружочками.

На рис. 3 изображены кривые, характеризующие участок АЧХ, соответствующий первому резонансу для разных параметров b_1 . Кривая, соответствующая $b_1 = 1$, обозначена точками, $b_1 = 0.6$ — плюсами, $b_1 = 0.3$ — крестиками, $b_1 = 0$ — кружочками.

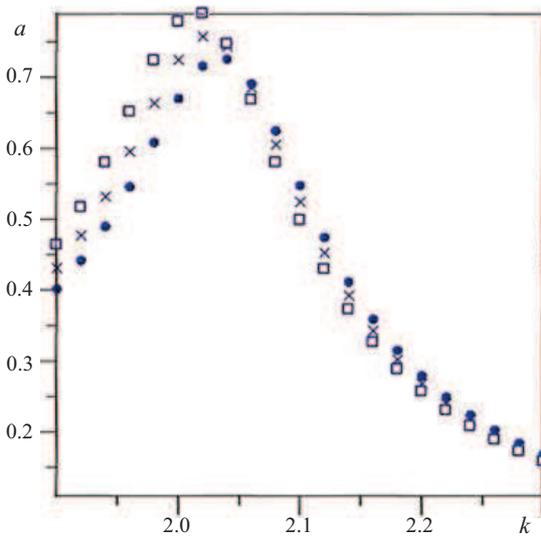


Рис. 2. Зависимость АЧХ от параметра q_1

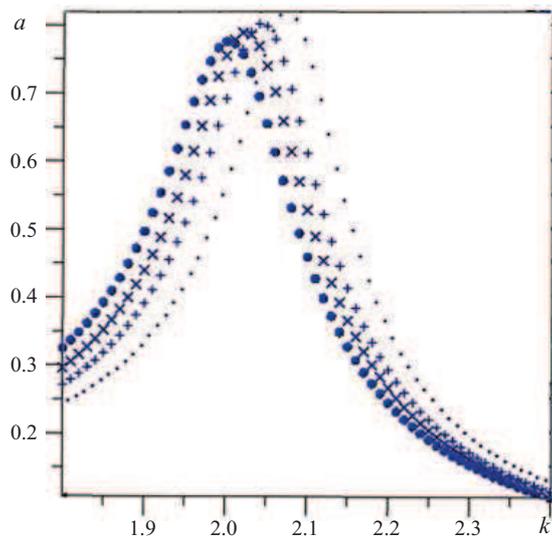


Рис. 3. Зависимость АЧХ от параметра b_1

На рис. 4 изображена АЧХ для неоднородности вида $h(\xi) = -\xi^2 + 1.2$, $g(\xi) = 1.3 + \xi$.

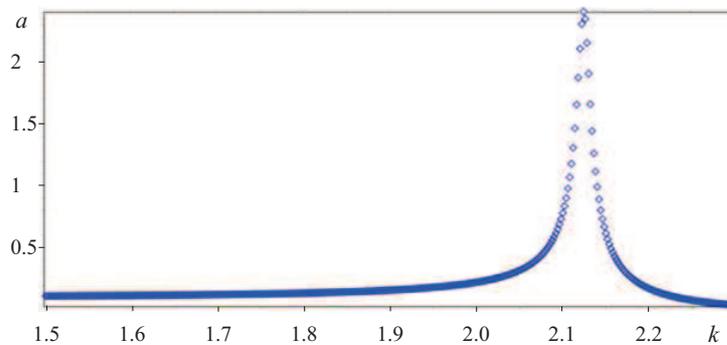


Рис. 4. АЧХ при $h(\xi) = -\xi^2 + 1.2$, $g(\xi) = 1.3 + \xi$

Таким образом, вид функций $h(\xi)$ и $g(\xi)$ существенно влияет на резонансную частоту и амплитуду колебаний.



2. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

Рассмотрим несколько способов восстановления параметров, входящих в граничные условия. Пусть известны две резонансные частоты и комплексные значения перемещений. Тогда можно при помощи метода пристрелки восстановить неизвестные параметры β_1 и β_2 . Решая систему (8) относительно параметров c_1 и c_2 , получаем

$$c_1 = -\frac{b}{P} \quad \text{и} \quad c_2 = \frac{d}{P},$$

где

$$P = a_0 + a_1 F_1(k) + a_2 F_2(k) + a_3 F_1(k) F_2(k),$$

$$a_0 = f(1, k) f'(1, k) (y_4^2(1, k) y_3^1(1, k) - y_3^2(1, k) y_4^1(1, k)), \quad a_1 = f'(1, k) (y_3^2(1, k) y_1^1(1, k) - y_1^2(1, k) y_3^1(1, k)),$$

$$a_2 = f(1, k) (y_4^2(1, k) y_2^1(1, k) - y_2^2(1, k) y_4^1(1, k)), \quad a_3 = y_2^2(1, k) y_1^1(1, k) - y_1^2(1, k) y_2^1(1, k),$$

$$b = b_0 + b_1 F_1(k) + b_2 F_2(k) + b_3 F_1(k) F_2(k),$$

$$b_0 = f(1, k) f'(1, k) (y_4^0(1, k) y_3^2(1, k) - y_3^0(1, k) y_4^2(1, k)), \quad b_1 = f'(1, k) (y_4^0(1, k) y_2^2(1, k) - y_2^0(1, k) y_4^2(1, k)),$$

$$b_2 = f(1, k) (y_3^0(1, k) y_1^2(1, k) - y_1^0(1, k) y_3^2(1, k)), \quad b_3 = y_1^0(1, k) y_2^2(1, k) - y_2^0(1, k) y_1^2(1, k),$$

$$d = d_0 + d_1 F_1(k) + d_2 F_2(k) + d_3 F_1(k) F_2(k),$$

$$d_0 = f(1, k) f'(1, k) (y_4^0(1, k) y_3^2(1, k) - y_3^0(1, k) y_4^2(1, k)), \quad d_1 = f'(1, k) (y_4^0(1, k) y_2^1(1, k) - y_2^0(1, k) y_4^1(1, k)),$$

$$d_2 = f(1, k) (y_3^0(1, k) y_1^1(1, k) - y_1^0(1, k) y_3^1(1, k)), \quad d_3 = y_1^0(1, k) y_2^1(1, k) - y_2^0(1, k) y_1^1(1, k).$$

Решения содержат в себе $F_1(k)$ и $F_2(k)$. Подставляя эти выражения в (7), получим формулы для расчета прогиба балки в произвольной точке. Будем считать, что для восстановления неизвестных параметров вязкоупругости известны две резонансные частоты и смещения в них, на основании этих данных составим систему двух уравнений

$$\begin{cases} PA_1 = -(y_2^2(1, k_1) F_2(k_1) + f(1, k_1)' y_3^2(1, k_1)) y_1^1(1, k_1) + (y_2^1(1, k_1) F_2(k_1) + f(1, k_1)' y_3^1(1, k_1)) y_1^2(1, k_1), \\ PA_2 = -(y_2^2(1, k_2) F_2(k_2) + f(1, k_2)' y_3^2(1, k_2)) y_1^1(1, k_2) + (y_2^1(1, k_2) F_2(k_2) + f(1, k_2)' y_3^1(1, k_2)) y_1^2(1, k_2), \end{cases} \quad (9)$$

где A_1 и A_2 — известные комплексные значения амплитуд. Решая систему (9), получаем два набора решений. Пример вычислительного эксперимента по реконструкции параметров вязкоупругости приведен в табл. 1.

Таблица 1

Результаты реконструкции

Заданные β_1 и β_2	Восстановленные β_1 и β_2
$\beta_1 = 0.2, \beta_2 = 0.3$	$\beta_1 = 0.2004, \beta_2 = 0.2994$ $\beta_1 = 31.384, \beta_2 = -2.4799$

Отметим, что такой подход, как и в упругом случае, дает два набора параметров. Учитывая, что β_1 и β_2 положительны по физическому смыслу, то второе решение можно отбросить. Также можно восстанавливать β_1 и β_2 , если известно только одно резонансное значение k . При этом получим систему типа (9) путем разбиения условий на вещественную и мнимую части, но при такой схеме реконструкции возникает ещё 4 фантомных решения; результаты реконструкции представлены в табл. 2. Это свидетельствует о том, что для однозначной реконструкции искомым параметрам необходимо иметь информацию о двух амплитудах.

Представленный выше подход приводит к нелинейной проблеме при реконструкции параметров вязкоупругости. Заметим, что можно составить простые линейные уравнения для нахождения неизвестных параметров и уже восстанавливать четыре различных параметра, тогда как восстановление более трех параметров в указанном выше способе вызывает трудности из-за нелинейности уравнений. Для этого необходимо знать амплитуды, измеренные в двух точках балки на одной частоте, в этом случае составим систему из двух уравнений относительно амплитуд:

$$\begin{cases} A_1 = y_1^0(\xi_1) + c_1 y_1^1(\xi_1) + c_2 y_1^2(\xi_1), \\ A_2 = y_1^0(\xi_2) + c_1 y_1^1(\xi_2) + c_2 y_1^2(\xi_2). \end{cases} \quad (10)$$

Таблица 2

Результаты реконструкции

Заданные β_1 и β_2	Восстановленные β_1 и β_2
$\beta_1 = 0.2, \beta_2 = 0.3$	$\beta_1 = 0.2407, \beta_2 = 0.2575$ $\beta_1 = 0.2132, \beta_2 = 0.2860$ $\beta_1 = 0.2227, \beta_2 = -0.2915$ $\beta_1 = -1434.3, \beta_2 = -2.7329$ $\beta_1 = 0.2227, \beta_2 = -0.29158$



Решая (10) относительно c_1 и c_2 и подставляя полученные соотношения в (8), необходимо разделить уравнения в системе на мнимую и вещественную части и получить систему уравнений, линейно зависящих от искомым параметров вязкоупругости

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(f(1, k)(y_3^0(1, k) + y_3^1(1, k)c_1 + y_3^2(1, k)c_2) - F_1(k)(y_2^0(1, k) + y_2^1(1, k)c_1 + y_2^2(1, k)c_2)) = 0, \\ \operatorname{Im}(f(1, k)(y_3^0(1, k) + y_3^1(1, k)c_1 + y_3^2(1, k)c_2) - F_1(k)(y_2^0(1, k) + y_2^1(1, k)c_1 + y_2^2(1, k)c_2)) = 0, \\ \operatorname{Re}(f(1, k)'(y_4^0(1, k) + y_4^1(1, k)c_1 + y_4^2(1, k)c_2) + F_2(k)(y_1^0(1, k) + y_1^1(1, k)c_1 + y_1^2(1, k)c_2)) = 0, \\ \operatorname{Im}(f(1, k)'(y_4^0(1, k) + y_4^1(1, k)c_1 + y_4^2(1, k)c_2) + F_2(k)(y_1^0(1, k) + y_1^1(1, k)c_1 + y_1^2(1, k)c_2)) = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Были проведены численные испытания по восстановлению для функций, удовлетворяющих условию $\int_0^1 h_1(\xi) d\xi = \int_0^1 h_2(\xi) d\xi$. В табл. 3 представлены результаты при известных функциях $h_1(\xi) = \xi^2 + 0.5333$, $g(\xi) = 1.3 + \xi$, $c = 0.01$. В табл. 4 представлены результаты для $h_2(\xi) = -\xi^2 + 1.2$, $g(\xi) = 1.3 + \xi$, $c = 0.01$.

Результаты реконструкции

Таблица 3

k		2.01	2.32	2.23	2.19
Комплексное смещение	$\xi = 0.5$	0.0415 - 0.1489i	0.0737 - 0.3419i	0.0323 - 0.2697i	0.0485 - 0.2525i
	$\xi = 1$	0.1380 - 0.3375i	0.2428 - 1.0174i	0.1189 - 0.7631i	0.1634 - 0.7033i
Заданные	β_1	0.2	2	2.2	1.3
	β_2	0.3	3	1.3	1.3
	q_1	1.2	1.1	1.1	1.3
	q_2	1.3	1.4	1.8	1.3
Реконструкция	β_1	0.2074	2.0044	2.2031	1.3293
	β_2	0.3001	2.9925	1.2989	1.2867
	q_1	0.9970	1.1153	1.1848	1.3427
	q_2	1.2660	1.4062	1.7340	1.2816

Результаты реконструкции

Таблица 4

k		2.12	2.38	2.31	2.28
Комплексное смещение	$\xi = 0.5$	0.2241 + 0.9055i	0.3860 + 0.7267i	0.3191 + 0.7432i	0.0784 + 0.2352i
	$\xi = 1$	1.1202 + 2.3020i	0.1033 + 0.2407i	0.0783 + 0.2514i	0.3180 + 0.6887i
Заданные	β_1	0.2	2	2.2	1.3
	β_2	0.3	3	1.3	1.3
	q_1	1.2	1.1	1.1	1.3
	q_2	1.3	1.4	1.8	1.3
Реконструкция	β_1	0.1925	3.0209	2.2163	1.2813
	β_2	0.3022	1.9917	1.2951	1.2987
	q_1	1.3125	1.0914	1.0417	1.3103
	q_2	1.3269	1.4118	1.8381	1.2852

Для выявления влияния погрешностей эксперимента на результаты реконструкции проведен вычислительный эксперимент. Проведено зашумление входных параметров при помощи аддитивной случайной добавки, результаты экспериментов представлены в табл. 5.

Результаты реконструкции

Таблица 5

k		2.28	2.28	2.28	2.28
Комплексное смещение	$\xi = 0.5$	0.0784 + 0.2352i	0.0784 + 0.2352i	0.0784 + 0.2352i	0.0784 + 0.2342i
	$\xi = 1$	0.3181 + 0.6887i	0.3181 + 0.6886i	0.3179 + 0.6886i	0.3180 + 0.6897i
Заданные	β_1	1.3	1.3	1.3	1.3
	β_2	1.3	1.3	1.3	1.3
	q_1	1.3	1.3	1.3	1.3
	q_2	1.3	1.3	1.3	1.3
Реконструкция	β_1	1.3068	1.3343	1.3901	0.8325
	β_2	1.2981	1.2923	1.2693	1.4713
	q_1	1.5353	1.5255	0.8612	4.8804
	q_2	1.2241	1.2322	1.4684	0.5734



Результаты вычислительных экспериментов свидетельствуют о том, что при амплитуде зашумления порядка 10^{-3} искажения делают невозможным восстановление q_1 и q_2 .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлен новый способ оценки упругости опор балок переменной жесткости в упругом и вязкоупругом случаях по резонансным частотам. Получен метод восстановления параметров податливости опоры для различных типов неоднородности балки при известном резонансном значении и соответствующих ему амплитудах с достаточной точностью. Результаты вычислительных экспериментов позволили сделать вывод о том, что в вязкоупругом случае восстановление параметров происходит с меньшей точностью, чем в упругом случае.

Библиографический список

1. Углов А. Л., Ерофеев В. И., Смирнов А. Н. Акустический контроль оборудования при изготовлении и эксплуатации. М. : Наука, 2009. 279 с.
2. Глаголевский Б. А., Москаленко И. Б. Низкочастотные акустические методы контроля в машиностроении. Л. : Машиностроение, 1977. 203 с.
3. Ахтямов А. М. Теория идентификации краевых условий и её приложения. М. : Физматлит, 2009. 272 с.
4. Ахтямов А. М., Муфтахов А. В., Ахтямова А. А. Об определении закрепления и нагрузки одного из концов стержня по собственным частотам его колебаний // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2013. Вып 3. С. 114–129.
5. Ватульян А. О., Васильев Л. В. Об определении параметров упругого закрепления неоднородной балки // Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2015. Вып. 3. С. 14–20.
6. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем. М. : Машиностроение, 1970. 736 с.
7. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. М. : Мир, 1974. 340 с.
8. Богачев И. В., Ватульян А. О. Обратные коэффициентные задачи для диссипативных операторов и идентификация свойств вязкоупругих материалов // Владикавказ. матем. журн. 2012. Т. 14, вып. 3. С. 31–44.
9. Калиткин Н. Н. Численные методы : учеб. пособие. СПб. : БХВ-Петербург, 2011. 586 с.

Образец для цитирования:

Ватульян А. О., Васильев Л. В. Об определении параметров закрепления неоднородной балки при наличии затухания // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 4. С. 449–456. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-449-456.

Determination of Attaching Parameters of Inhomogeneous Beams in the Presence of Damping

A. O. Vatulyan¹, L. V. Vasilev²

¹Alexandr O. Vatulyan, Southern Federal University, 105, B. Sadovaia str., 344006, Rostov-on-Don, Russia; Vladikavkaz Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, 22, Markusa str., 362008, Vladikavkaz, Russia, vatulyan@math.sfedu.ru

²Leonid V. Vasilev, Southern Federal University, 105, B. Sadovaia str., 344006, Rostov-on-Don, Russia, leninid@mail.ru

Characterization of solids by additional data on displacements amplitudes or resonance frequencies have been increasingly attracting attention of researchers in recent years. Among the tasks of this type, the problems associated with definition of parameters describing boundary conditions and characterizing an interaction of the body studied with the surrounding bodies are of particular interest. In this paper, we investigate the problem of determining the parameters of the boundary conditions in a beam. We propose a new approach to solve the inverse problem of a reconstruction of the bearing parameters of an inhomogeneous viscoelastic beam with viscoelastic bonds on the right end and being fixed at the left end based on the analysis of the amplitude and shift phase of the displacement at two points at a fixed frequency. We have used the principle of conformity to derive the differential equation of oscillations based on the standard model of viscoelastic body. We present a way of reduction of the original problem to the canonical form. We have formulated the auxiliary Cauchy problems for a numerical solution of both direct and inverse problems by the false position method. Within the framework of the present model, we have performed the computational experiments to restore 4 parameters characterizing the viscoelastic bonds in the boundary conditions. We have analyzed the influence of changes in the parameters on the resonant frequency and on the displacements amplitude. The influence of the input data noise on the reconstruction of the desired parameters is investigated. It is revealed that the method proposed for the reconstruction of the unknown parameters can be employed in order to their retrieval in the boundary conditions with high accuracy.

Key words: differential equation of order 4 with variable coefficients, boundary conditions, vibrations, reconstruction, viscoelasticity.



References

1. Uglov A. L., Erofeev V. I., Smirnov A. N. *Akusticheskiy kontrol' oborudovaniya pri izgotovlenii i ehkspluatatsii* [Acoustic control equipment in manufacturing and operation]. Moscow, Nauka, 2009. 279 p. (in Russian).
2. Glagolevskij B. A., Moskalenko I. B. *Nizkochastotnye akusticheskie metody kontrolya v mashinostroenii* [Low-frequency acoustic methods of inspection in mechanical engineering]. Leningrad, Mashinostroenie, 1977. 203 p. (in Russian).
3. Akhtyamov A. M. *Teoriya identifikatsii kraevykh usloviy i eyo prilozheniya* [The theory of identification of boundary conditions and applications]. Moscow, Fizmatlit, 2009. 272 p. (in Russian).
4. Ahtyamov A. M., Muftahov A. V., Ahtyamova A. A. Ob opredelenii zakrepleniya i nagruzhenosti odnogo iz koncov sterzhnya po sobstvennym chastotam ego kolebanij [Determination of loading and fixation of one end of the rod based on the natural frequencies]. *Vestn. Udmurtsk. un-ta. Matem. Mekh. Komp'yut. nauki*, 2013, vol. 3, pp. 114–129 (in Russian).
5. Vatulyan A. O., Vasilev L. V. Ob opredelenii parametrov uprugogo zakrepleniya neodnorodnoy balki [Determination of the parameters of an inhomogeneous beam elastic fixation]. *Ekologicheskij vestnik nauchnykh centrov CHEHS*, 2015, no. 3, pp. 14–20 (in Russian).
6. Philippov A. P. *Kolebaniya deformiruemyykh sistem* [Oscillations of deformable systems]. Moscow, Mashinostroenie, 1970. 736 p. (in Russian).
7. Kristensen R. *Voedenie v teoriyu vyazkoprugosti* [Introduction to the of viscoelasticity theory]. Moscow, Mir, 1974. 340 p. (in Russian).
8. Bogachev I. V., Vatulyan A. O. Obratnye koeffitsientnye zadachi dlya dissipativnykh operatorov i identifikatsiya svoystv vyazkoprugih materialov [The inverse coefficient problem for dissipative operators and identification of the properties of viscoelastic materials]. *Vladikavkazskiy matematicheskij zhurnal*, 2012, vol. 14, iss. 3, pp. 31–44 (in Russian).
9. Kalitkin N. N. *Chislennyye metody : ucheb. posobie* [Numerical methods. Tutorial]. St. Petersburg, BHV-Petersburg, 2011. 586 p. (in Russian).

Please cite this article in press as:

Vatulyan A. O., Vasilev L. V. Determination of Attaching Parameters of Inhomogeneous Beams in the Presence of Damping. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 4, pp. 449–456 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-449-456.

УДК 539.3

ИЗГИБ МНОГОСВЯЗНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ПЛИТ С КРИВОЛИНЕЙНЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ

С. А. Калоеров¹, А. И. Занько²

¹Калоеров Стефан Алексеевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории упругости и вычислительной математики, Донецкий национальный университет, kaloerov@mail.ru

²Занько Алена Игоревна, аспирант кафедры теории упругости и вычислительной математики, Донецкий национальный университет, all53700@mail.ru

Предложен приближенный метод определения напряженного состояния тонких плит с криволинейными отверстиями, заключающийся в использовании комплексных потенциалов теории изгиба анизотропных плит, аппроксимации контуров отверстий дугами эллипсов и берегами прямолинейных разрезов, конформных отображений, в представлении комплексных потенциалов рядами Лорана и определении неизвестных коэффициентов рядов обобщенным методом наименьших квадратов. Изотропные плиты рассматриваются как частный случай анизотропных плит. Численные исследования проведены для плиты с квадратными и треугольными отверстиями. Исследованиями установлена высокая степень точности получаемых результатов. Отмечены значительные отличия известных в литературе результатов от полученных данным подходом.

Ключевые слова: анизотропная пластинка, изотропная пластинка, криволинейное отверстие, комплексные потенциалы, обобщенный метод наименьших квадратов.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-456-464

ВВЕДЕНИЕ

Для плит с круговыми или эллиптическими контурами в свое время были разработаны методы решения задач определения напряженного состояния, основывающиеся на представлении исходных



комплексных потенциалов рядами Лорана и по полиномам Фабера и определении их коэффициентов методом рядов [1–3]. Эти методы с некоторой достоверностью давали значения искомых величин, правда, для достаточно неблизких расстояний между контурами. Для случаев же плит с криволинейными отверстиями имеются лишь отдельные исследования, результаты которых далеки от истинных.

Нашими исследованиями установлено, что в случае плоской задачи теории упругости для изотропной пластинки с отверстием в форме многоугольника из существующих методов наиболее точные результаты дает метод, использующий функции Колосова – Мусхелишвили с построением конформных отображений

$$\omega(\zeta) = R \left(\zeta + \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{\zeta^k} \right), \quad (1)$$

где R, c_k — постоянные, определяемые из геометрических характеристик контура отверстия. При этом для достижения достаточной точности в отображающей функции нужно оставлять довольно большое количество слагаемых, а комплексные потенциалы определять из граничных условий методом интегралов типа Коши [4]. Но для анизотропной пластинки с криволинейным отверстием точки при соответствующих аффинных преобразованиях и конформных отображениях переходят в различные точки, и метод интегралов типа Коши не применим. Эта тенденция сохраняется и в случае многосвязных плит. Существующие для указанных случаев методы решения задач, связанные с применением метода малого параметра для преобразования уравнений контуров и использованием метода рядов при удовлетворении граничным условиям, приводят к значительным погрешностям получаемых результатов и на сегодняшний день мало эффективны при решении современных задач инженерной практики. В наших работах [5, 6] предложено аппроксимировать криволинейные контуры дугами эллипсов и берегами прямолинейных разрезов, а для удовлетворения граничным условиям использовать дискретный метод наименьших квадратов [5] или обобщенный метод наименьших квадратов (ОМНК) [6]. Наиболее простым при численной реализации оказывается ОМНК. В данной статье последний подход использован для решения задач об изгибе анизотропных плит с произвольными криволинейными контурами. При этом изотропные плиты рассматривались как частный случай анизотропных плит. Численные исследования проведены для плит с квадратным и треугольным отверстиями. Исследовано влияние упругих характеристик материалов плит и геометрических характеристик отверстий на значения изгибающих моментов.

1. ПОСТАНОВКА И МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Рассмотрим занимающую многосвязную область, тонкую анизотропную плиту с эллиптическими отверстиями L_l ($l = \overline{1, L}$) с полуосями a_l, b_l центрами в точках (x_{0l}, y_{0l}) и углами φ_l между положительным направлением оси Ox и полуосями a_l (рис. 1).

Плита находится под действием распределенных поперечных усилий p_l и изгибающих моментов m_l на контурах L_l и моментов $M_x^\infty, M_y^\infty, H_{xy}^\infty$, действующих на бесконечности. В общем случае эллипсы L_l могут переходить в прямолинейные разрезы, располагаться произвольно относительно друг друга, в том числе касаться, пересекаться, образуя контуры сложной конфигурации, аппроксимируемые дугами эллипсов и берегами прямолинейных разрезов.

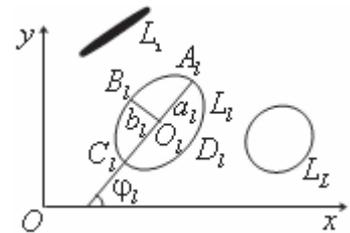


Рис. 1. Многосвязная плита

Определение напряженно-деформированного состояния рассматриваемой плиты при использовании комплексных потенциалов теории изгиба [1, 3, 7] сводится к нахождению комплексных потенциалов $W_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 2}$) из соответствующих граничных условий. Эти функции определены в многосвязных областях S_k , получаемых из заданной области S аффинными преобразованиями:

$$z_k = x + \mu_k y, \quad (2)$$

где μ_k — корни характеристического уравнения

$$D_{22}\mu^4 + 4D_{26}\mu^3 + 2(D_{12} + 2D_{66})\mu^2 + 4D_{16}\mu + D_{11} = 0, \quad (3)$$

$D_{ij} = b_{ij}D_0$ — жесткости материала плиты;

$$b_{11} = (a_{22}a_{66} - a_{26}^2) / \Delta, \quad b_{12} = (a_{16}a_{26} - a_{12}a_{66}) / \Delta,$$



$$\begin{aligned} b_{16} &= (a_{12}a_{26} - a_{16}a_{22}) / \Delta, & b_{22} &= (a_{11}a_{66} - a_{16}^2) / \Delta, \\ b_{26} &= (a_{12}a_{16} - a_{26}a_{11}) / \Delta, & b_{66} &= (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) / \Delta, \\ \Delta &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{vmatrix}, \end{aligned} \quad (4)$$

a_{ij} — коэффициенты деформаций материала, $D_0 = 2h^3/3$, h — полутолщина плиты.

Многосвязные области S_k ограничены контурами L_{kl} , соответствующими контурам L_l области S при указанных аффинных преобразованиях. Используя методы конформных отображений и разложений функций в ряды Лорана для производных этих функций, получаем выражения вида [5, 7, 8]

$$W'_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^L (A_{kl} z_k + B_{kl}) \ln(z_k - z_{kl}) + \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{kln}}{\zeta_{kl}^n}, \quad (5)$$

в которых Γ_k — постоянные, определяемые из системы уравнений

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \Gamma_k &= C_{11} M_x^\infty + C_{21} M_y^\infty + C_{31} H_{xy}^\infty, & 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \mu_k \Gamma_k &= C_{12} M_x^\infty + C_{22} M_y^\infty + C_{32} H_{xy}^\infty, \\ 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \mu_k^2 \Gamma_k &= C_{13} M_x^\infty + C_{23} M_y^\infty + C_{33} H_{xy}^\infty, & 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \frac{1}{\mu_k} \Gamma_k &= 0, \\ C_{11} &= (2D_{22}D_{66} - 2D_{26}^2) / \Delta_1, & C_{21} &= (2D_{16}D_{26} - 2D_{12}D_{66}) / \Delta_1, \\ C_{31} &= (2D_{12}D_{26} - 2D_{12}D_{22}) / \Delta_1, & C_{12} &= (D_{12}D_{26} - D_{16}D_{22}) / \Delta_1, \\ C_{22} &= (2D_{12}D_{16} - 2D_{11}D_{26}) / \Delta_1, & C_{32} &= (D_{11}D_{22} - D_{12}^2) / \Delta_1, \\ C_{13} &= (2D_{16}D_{26} - 2D_{12}D_{66}) / \Delta_1, & C_{23} &= (2D_{12}D_{66} - 2D_{16}^2) / \Delta_1, \\ \Delta_1 &= \begin{vmatrix} D_{11} & 2D_{12} & 2D_{16} \\ D_{12} & 2D_{26} & 2D_{22} \\ D_{16} & 2D_{66} & D_{26} \end{vmatrix}, \end{aligned} \quad (6)$$

A_{kl}, B_{kl} — постоянные, определяемые из решения систем уравнений

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) i A_{kl} = \left(0, 0, 0, \frac{P_l}{2\pi D_{11}} \right), \quad (7)$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) i B_{kl} = \left(0, 0, -\frac{M_{xl}}{2\pi D_{22}}, -\frac{M_{yl}}{2\pi D_{11}} \right), \quad (8)$$

P_l и M_{xl}, M_{yl} — главный вектор и компоненты главного момента относительно начала координат усилий и моментов, приложенных к контуру L_l , ζ_{kl} — переменные, определяемые из конформных отображений

$$z_k = z_{kl} + R_{kl} \left(\zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right) \quad (9)$$

внешности единичного круга $|\zeta_{kl}| \geq 1$ на внешности эллипсов L_{kl} ,

$$\begin{aligned} z_{kl} &= x_{0l} + \mu_k y_{0l}, \\ R_{kl} &= [a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + i b_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)] / 2, \\ m_{kl} &= [a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - i b_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)] / 2R_{kl}, \end{aligned} \quad (10)$$

a_{kln} — неизвестные постоянные, определяемые из граничных условий. В случае прямолинейного разреза в последних соотношениях нужно принять $b_l = 0$.

Конформные отображения можно построить и по координатам концов осей эллипсов $L_l (x_{A_l}, y_{A_l}, (x_{B_l}, y_{B_l}), (x_{C_l}, y_{C_l}), (x_{D_l}, y_{D_l})$. В этом случае в формулах (10) нужно принять

$$a_l = \frac{1}{2} \sqrt{(x_{A_l} - x_{C_l})^2 + (y_{A_l} - y_{C_l})^2}, \quad b_l = \frac{1}{2} \sqrt{(x_{B_l} - x_{D_l})^2 + (y_{B_l} - y_{D_l})^2},$$



$$x_{0l} = \frac{x_{A_l} + x_{C_l}}{2}, \quad y_{0l} = \frac{y_{A_l} + y_{C_l}}{2}, \quad \varphi_l = \arctg \left(\frac{y_{A_l} - y_{C_l}}{x_{A_l} - x_{C_l}} \right). \quad (11)$$

При решении задач возникает необходимость аппроксимации части криволинейного контура в виде сторон угла в окрестности его вершины $A_l (x_{A_l}, y_{A_l})$ дугой окружности L'_l , вписанной в этот угол с центром на биссектрисе угла (рис. 2).

Обозначим углы между положительным направлением оси Ox и сторонами угла A_l через φ_l и φ_{l+1} . Тогда угол A_l будет равен $\varphi_{l+1} - \varphi_l$. Поэтому угол наклона указанной биссектрисы к оси Ox $\varphi'_l = (\varphi_l + \varphi_{l+1}) / 2$. Выбрав на сторонах угла отрезки δ_l от вершины угла для радиуса вписанной окружности и координат ее центра, будем иметь

$$\begin{aligned} a'_l &= \delta_l \operatorname{tg} ((\varphi_{l+1} - \varphi_l) / 2), \quad |O'_l A_l| = \sqrt{\delta_l^2 + a'^2_l}, \\ x'_{0l} &= x_{A_l} - |O'_l A_l| \sin ((\varphi_l + \varphi_{l+1}) / 2), \\ y'_{0l} &= y_{A_l} - |O'_l A_l| \cos ((\varphi_l + \varphi_{l+1}) / 2). \end{aligned}$$

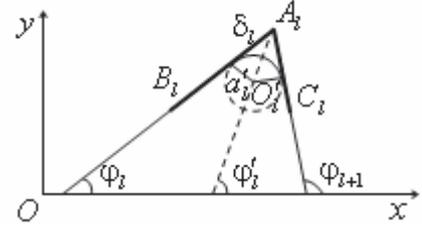


Рис. 2. Аппроксимация части криволинейного контура дугой окружности

Зная координаты x'_{0l}, y'_{0l} центра O'_l вписанной окружности L'_l , его радиус a'_l и угол φ'_l между осью Ox и биссектрисой угла A_l и принимая, что $a'_l = b'_l$, по формулам (9) и (10) найдем функцию, отображающую внешность единичного круга на внешность окружности L'_l , вписанной в угол A_l .

Неизвестные постоянные a_{kln} , входящие в функции (5), будем определять из граничных условий на контурах L_l [1, 3, 7]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 g_{kli} W'_k(z_k) = f_{li} \quad i = 1, 2, \quad (12)$$

в которых

$$\begin{aligned} g_{k11} &= p_k / \mu_k, \quad g_{k12} = q_k, \\ f_{l1} &= - \int_0^s f_l dx - \int_0^s m_l dy + c_{l1} dx + c_{l1}, \quad f_{l2} = - \int_0^s m_l dx - \int_0^s f_l dy + c_{l2} dy + c_{l2}, \\ p_k &= D_{11} + 2D_{16}\mu_k + D_{12}\mu_k^2, \quad q_k = D_{12} + 2D_{26}\mu_k + D_{22}\mu_k^2, \quad f_l(s) = - \int_0^s p_l(s) ds, \end{aligned}$$

c_l — вещественные, c_{il} — комплексные постоянные.

Граничным условиям (12) будем удовлетворять обобщенным методом наименьших квадратов [9]. Для многосвязных областей этим условиям удобнее удовлетворять в дифференциальной форме. Продифференцировав условия (12) по дуге контура, выбрав на контурах плиты набор точек $t_{lm} (x_{lm}, y_{lm})$ ($m = \overline{1, M_l}$) и удовлетворив в них этим условиям, получим

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^{\infty} g_{kli} \delta_k \varphi'_{kln}(t_{klm}) &= \frac{df_{li}(t_{lm})}{ds} - \\ - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \delta_k \left\{ g_{kli} \Gamma_k + \sum_{l=1}^L \left[A_{kl} l n (z_k - z_{kl}) + \frac{(A_{kl} z_k + B_{kl})}{z_k - z_{kl}} \right] \right\}, \\ l &= \overline{1, L}, \quad m = \overline{1, M_l}, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (13)$$

где $\delta_k = \frac{dz_k}{ds}$, $\varphi'_{kln} = - \frac{n}{\zeta_{kl}^{n-1} R_{kl} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl})}$, $t_{klm} = x_{lm} + \mu_k y_{lm}$.

Систему (13) дополним уравнениями однозначности прогиба [7] для каждого отверстия

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 i a_{kl1} R_{kl} = 0, \quad l = \overline{1, L}. \quad (14)$$



После нахождения псевдорешений дополненной системы уравнений (13) с использованием сингулярных разложений [6] постоянные a_{klm} , а следовательно, и функции $W'_k(z_k)$, будут известными и по ним можно вычислять изгибающие моменты и перерезывающие силы в любой точке плиты [1, 3, 7]

$$(M_x, M_y, H_{xy}) = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (p_k, q_k, r_k) W''_k(z_k), \quad (N_x, N_y) = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (\mu_k s_k, -s_k) W'''_k(z_k). \quad (15)$$

Здесь $r_k = D_{16} + 2D_{66}\mu_k + D_{26}\mu_k^2$, $s_k = -D_{16} - (D_{12} + 2D_{66})\mu_k - 3D_{26}\mu_k^2 - D_{22}\mu_k^3$.

2. РЕШЕНИЕ ЧАСТНЫХ ЗАДАЧ

Приведенный подход был использован для решения задач о напряженном состоянии плит с отверстиями различной конфигурации. Далее описаны некоторые из полученных результатов для плит с квадратными и треугольными отверстиями. При проведении расчетов количество членов в рядах (5) и точек на контурах M_l , для которых составлялись уравнения (13), увеличивалось до тех пор, пока граничные условия на контурах не удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности (пока значения моментов на площадках, касательных к контурам, не удовлетворяли условию $M_n < 10^{-3}$). Для такого удовлетворения граничным условиям, как показали численные исследования, необходимо было в указанных рядах оставлять от 40 до 50 членов, на каждом из контуров брать от 200 до 500 «коллокационных точек». Далее описаны некоторые из полученных результатов для плиты из КАСТ-В изотропный (материал М1) [10], стеклопластика косоугольной намотки (материал М2) [10], сосны (материал М3) [1]. Коэффициенты деформаций a_{ij} для этих материалов приведены в табл. 1.

Таблица 1

Постоянные материалов					
Материал	$a_{11} \cdot 10^{-4}$, МПа ⁻¹	$a_{22} \cdot 10^{-4}$, МПа ⁻¹	$a_{12} \cdot 10^{-4}$, МПа ⁻¹	$a_{66} \cdot 10^{-4}$, МПа ⁻¹	a_{11}/a_{22}
М1	72.100	72.100	-8.600	161.500	1.000
М2	10.000	2.800	-0.770	27.000	3.571
М3	2.381	0.100	-0.024	1.333	23.810

При этом для того, чтобы использовать приведенное выше решение для изотропной плиты коэффициент деформации материала a_{12} , равный $-8,600 \cdot 10^{-4}$, в расчетах заменялся на $-8,605 \cdot 10^{-4}$, т. е. на значение, незначительно отличающееся от табличного. В противном случае при решении задачи возникнет деление на ноль, так как корни характеристического уравнения (3) для изотропного материала будут двукратными и равными i и $-i$.

Пусть плита ослаблена квадратным отверстием со сторонами длиной $2a$, параллельными осям координат (рис. 3). Контур отверстия свободен от усилий. На бесконечности изгибающие моменты соответственно равны $M_y^\infty = m_y$, $M_x^\infty = H_{xy}^\infty = 0$. Стороны квадрата будем представлять внешними берегами разрезов L_1, L_2, L_3, L_4 вдоль сторон, с концами в точках A, B, C, D . В этом случае в приведенном решении нужно принять

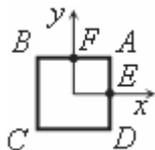


Рис. 3. Квадратное отверстие в плите

$$L = 4, \quad A(a, a), \quad B(-a, a), \quad C(-a, -a), \quad D(a, -a), \\ a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a.$$

Расчеты проводились без аппроксимации сторон вблизи вершины углов и с их аппроксимацией. При проведении расчетов вместо равных нулю полюсей b_l считалось, что $b_l/a_l = 10^{-4}$. Это уменьшает вычислительные погрешности. В рассматриваемом случае если обозначать через δ отрезки на сторонах от вершин углов до точек их закругления, будем иметь

$$a'_l = \delta, \quad |O'_l A_l| = \sqrt{2}\delta, \\ \begin{aligned} x'_{01} &= a - \delta, & y'_{01} &= a - \delta, & x'_{02} &= -a + \delta, & y'_{02} &= a - \delta, \\ x'_{03} &= -a + \delta, & y'_{03} &= -a + \delta, & x'_{04} &= a - \delta, & y'_{04} &= -a + \delta. \end{aligned}$$

В табл. 2 приведены значения изгибающих моментов M_s по контуру отверстия на площадках, перпендикулярных ему (M_y — для вертикальных сторон, M_x — для горизонтальных сторон) в точках с указанными координатами с точностью до интенсивности приложенных моментов m_y как множителя.



Таблица 2

Значения моментов по контуру квадратного отверстия в плите из различных материалов

ϑ°	Координаты точек	Без закругления в углах	С закруглением при δ		Без закругления в углах	С закруглением при δ	
			0.01	0.005		0.01	0.005
		Материал М1			Материал М2		
0	1.0001, 0.0000	1.3173	1.3159	1.3169	1.5115	1.5052	1.5159
15	1.0001, 0.2588	1.3301	1.3421	1.3394	1.5250	1.5598	1.5429
30	1.0001, 0.5736	1.4058	1.4117	1.4141	1.6238	1.6423	1.6459
44.9956	0.9998, 1.0000	13.4327	–	–	16.8064	–	–
45	0.9971, 0.9971	–	3.5483	–	–	2.2968	–
45	0.9985, 0.9985	–	–	4.3247	–	–	2.7517
45.0044	1.0000, 0.9998	–2.6345	–	–	–2.5382	–	–
60	0.5736, 1.0001	0.2633	0.2535	0.2531	0.2357	0.2286	0.2316
75	0.2588, 1.0001	0.2687	0.2639	0.2598	0.2452	0.2335	0.2331
90	0.0000, 1.0001	0.2681	0.2622	0.2673	0.2479	0.2488	0.2524

Окончание табл. 2

ϑ°	Координаты точек	Без закругления в углах	С закруглением при δ	
			0.01	0.005
		Материал М3		
0	1.0001, 0.0000	1.6034	1.6002	1.6085
15	1.0001, 0.2588	1.6379	1.6522	1.6475
30	1.0001, 0.5736	1.7621	1.7475	1.7498
44.9956	0.9998, 1.0000	21.3145	–	–
45	0.9971, 0.9971	–	2.7712	–
45	0.9985, 0.9985	–	–	3.0246
45.0044	1.0000, 0.9998	–0.7640	–	–
60	0.5736, 1.0001	0.0733	0.0709	0.0712
75	0.2588, 1.0001	0.0745	0.0702	0.0709
90	0.0000, 1.0001	0.0739	0.0759	0.0743

Рассматривались случаи квадрата с прямыми углами (без закруглений), а также квадрат с закругленными углами вблизи вершин с малыми значениями радиусов (равных в данном случае отрезкам от вершин углов) закруглений δ . В табл. 2 координаты точек и значения δ отнесены к полудлине a стороны квадрата.

На рис. 4 изображены графики распределения этих моментов для точек отрезков EA и AF на сторонах. Для остальных частей сторон квадрата значения моментов легко восстанавливаются по имеющейся симметрии. Кривые 1, 2, 3 соответствуют плите из материалов М1, М2, М3.

Из данных табл. 2 и рис. 4 видно, что при приближении к вершинам квадрата значения моментов стремятся к бесконечности, вдоль горизонтальных сторон к $-\infty$, вдоль вертикальных сторон — к $+\infty$, причем рост моментов вдоль вертикальных сторон больше, чем убывание вдоль горизонтальных сторон. Аппроксимация сторон углов вблизи вершин снимает особенность моментов в этих точках, причем чем меньше радиус закругления, тем больше значения моментов в вершинах (закругленных). Чем выше «степень анизотропии» (отличие a_{11}/a_{22} от 1), тем больше значения моментов вдоль вертикальной стороны и меньше вдоль горизонтальной стороны.

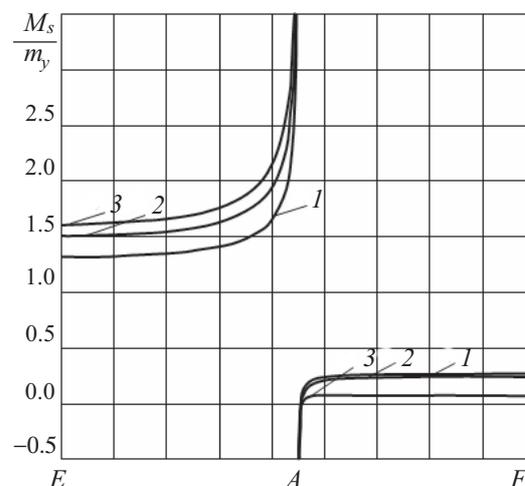


Рис. 4. Графики распределения изгибающих моментов в плите с одним квадратным отверстием

Заметим, что с целью сравнения результатов с известными из литературы для плиты из березовой фанеры с квадратным отверстием при всестороннем изгибе [11] исследования проводились и для этого случая. Значения изгибающих моментов, полученные в работе [11], оказались значительно отличными от наших вблизи вершин. Они достаточно близки к полученным нами лишь в точках, близких к серединам сторон квадрата.

Пусть бесконечная плита имеет два квадратных отверстия со сторонами длины $2a$, параллельными осям координат (рис. 5). Стороны квадратов будем представлять внешними берегами разрезов $L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6, L_7, L_8$ вдоль сторон, т.е. с концами A_1, B_1, C_1, D_1 и A_2, B_2, C_2, D_2 . Расстояние между отверстиями обозначим через c . В этом случае $L = 8, A_1(a, a), B_1(-a, a), C_1(-a, -a), D_1(a, -a), A_2(3a + c, a), B_2(a + c, a), C_2(a + c, -a), D_2(3a + c, -a), a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = a_8 = a$.

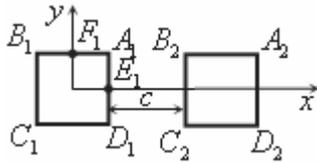


Рис. 5. Два квадратных отверстия в плите

Расчеты проводились без аппроксимации сторон вблизи вершин углов и с их аппроксимацией. При проведении расчетов вместо равных нулю полуосей b_l считалось, что $b_l/a_l = 10^{-4}$.

В рассматриваемом случае если обозначать через δ отрезки на сторонах от вершин углов до точек их закругления, будем иметь

$$a'_i = \delta, \quad |O'_i A_i| = \sqrt{2}\delta,$$

$$\begin{aligned} x'_{01} &= a - \delta, & y'_{01} &= a - \delta, & x'_{02} &= -a + \delta, & y'_{02} &= a - \delta, \\ x'_{03} &= -a + \delta, & y'_{03} &= -a + \delta, & x'_{04} &= a - \delta, & y'_{04} &= -a + \delta, \\ x'_{05} &= 3a + c - \delta, & y'_{05} &= a - \delta, & x'_{06} &= -a + c + \delta, & y'_{06} &= a - \delta, \\ x'_{07} &= a + c + \delta, & y'_{07} &= -a + \delta, & x'_{08} &= 3a + c - \delta, & y'_{08} &= -a + \delta. \end{aligned}$$

Численные исследования для плиты с двумя квадратными отверстиями были проведены для различных значений c/a , отношения расстояния между отверстиями c к полудлине их сторон a . Как показали расчеты, с уменьшением расстояния между отверстиями (отношения c/a) значения изгибающих моментов вблизи контуров и в точках перемычки растут.

Если расстояние между отверстиями более трех длин сторон ($c/a > 6$), то влияние одного отверстия на значения моментов около другого незначительно и им можно пренебречь. Для близких расстояний между контурами особенно большие значения моментов возникают в точках перемычки

вблизи контуров отверстий.

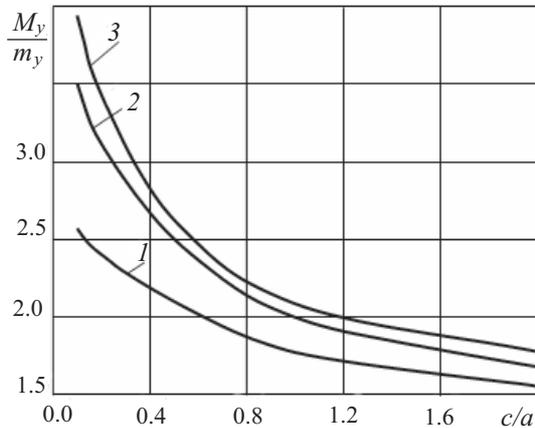


Рис. 6. Графики изменения моментов M_y в точке перемычки E_1 плиты с двумя квадратными отверстиями

На рис. 6 изображены графики изменения изгибающих моментов M_y/m_y вблизи точки перемычки $E_1(a, 0)$ на контуре левого отверстия в зависимости от c/a . Кривые 1, 2, 3 соответствуют плите из материалов М1, М2, М3. Видно, что с уменьшением c/a значения моментов резко растут, особенно в плите из материала с сильной «степенью анизотропии» М3.

Пусть теперь плита с треугольным отверстием в виде равнобедренного треугольника с высотой $2a$ по оси абсцисс и углом при вершине φ (рис. 7) изгибается моментами $M_y^\infty = m_y$. В этом случае вершины треугольника располагаются в точках $A(2a, 0), B(0, 2a \operatorname{tg}(\varphi/2)), C(0, -2a \operatorname{tg}(\varphi/2))$.

Стороны треугольника будем представлять внешними берегами разрезов L_1, L_2, L_3 вдоль сторон, т.е. с концами A, B, C . В этом случае $L = 3, a_1 = a_3 = 2a/\cos(\varphi/2), a_2 = 4a \operatorname{tg}(\varphi/2)$.

Численные исследования были проведены для различных значений угла φ при вершине треугольника. Как показали расчеты, с уменьшением угла φ значения изгибающих моментов вблизи боковых сторон треугольника уменьшаются, вблизи

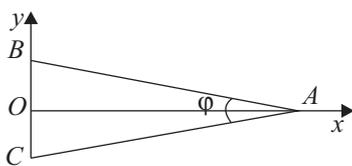


Рис. 7. Треугольное отверстие в плите



основания растут. Если угол φ равен нулю, то моменты в окрестности точки A получаются такими же, как в плите с одним эллиптическим отверстием-трещиной. Это видно из данных рис. 8, где приведены графики изменения M_y/m_y в точке оси Ox вблизи вершины A зависимости от угла φ .

Кривые 1, 2, 3 соответствуют плите из материалов М1, М2, М3. Видно, что с уменьшением угла φ значения моментов растут и при $\varphi = 0$ они получаются такими же, как в плите с одним эллиптическим отверстием-трещиной, причем это значение не зависит от анизотропии материала. Последнее согласуется с известным фактом для пластинки с трещиной в плоской задаче, когда σ_y вблизи вершины на продолжении трещины (и коэффициент интенсивности напряжений k_1), чему при изгибе плиты соответствует M_y , не зависит от анизотропии материала [5]. Как показали расчеты, в точках плиты на продолжении высоты, удаленных от вершины A на расстояние более высоты $2a$, значения моментов такие же, как в плите без отверстия, т. е. влиянием отверстия на напряженное состояние можно пренебречь.

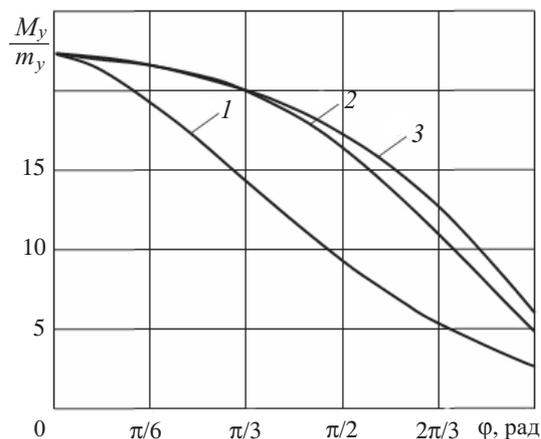


Рис. 8. График изменения изгибающих моментов вблизи вершины A треугольника

Библиографический список

1. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. М. : Гостехиздат, 1957. 463 с.
2. Космодамианский А. С. Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями или полостями. Киев ; Донецк : Вища шк., 1976. 200 с.
3. Меглинский В. В. Некоторые задачи изгиба тонких многосвязных анизотропных плит // Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1967. Вып. 3. С. 97–127.
4. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. Киев : Наук. думка, 1968. 887 с.
5. Калоеров С. А., Горянская Е. С. Двумерное напряженно-деформированное состояние многосвязного анизотропного тела // Концентрация напряжений. Механика композитов : в 12 т. Киев : А. С. К., 1998. Т. 7. С. 10–26.
6. Калоеров С. А., Добряк Д. А. Термоупругое состояние кусочно-однородной анизотропной пластинки // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А, Природ. науки. 2006. Вип. 2. С. 77–88.
7. Калоеров С. А. Комплексные потенциалы теории изгиба многосвязных анизотропных плит // Теорет. и прикладная механика. 2012. № 4 (50). С. 115–136.
8. Калоеров С. А., Авдюшина Е. В., Мироненко А. Б. Концентрация напряжений в многосвязных изотропных пластинках. Донецк : Изд-во ДонНУ, 2013. 440 с.
9. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. М. : Мир, 1969. 280 с.
10. Космодамианский А. С., Калоеров С. А. Температурные напряжения в многосвязных пластинках. Киев ; Донецк : Вища шк., 1983. 160 с.
11. Космодамианский А. С., Митраков В. А. Изгиб конечной анизотропной пластинки с криволинейным отверстием // Прикладная механика. 1976. Т. 12, № 12. С. 96–99.

Образец для цитирования:

Калоеров С. А., Занько А. И. Изгиб многосвязных анизотропных плит с криволинейными отверстиями // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 4. С. 456–464. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-456-464.



Bending of Multiconnected Anisotropic Plates with the Curvilinear Holes

S. A. Kaloerov¹, A. I. Zanko²

¹Stephen A. Kaloerov, Donetsk National University, 24, Universitetskaya str., 83055, Donetsk, Ukraine, kaloerov@mail.ru

²Alena I. Zanko, Donetsk National University, 24, Universitetskaya str., 83055, Donetsk, Ukraine, all53700@mail.ru

An approximate method for determination of the stress state of thin plates with curvilinear holes, consisting in the use of the complex potential theory of bending of anisotropic plates, approximating the contours of holes by ellipse arcs and straight sections, the use of conformal mapping, presentation of complex potentials by Laurent series and determining the unknown series coefficients of the generalized least squares method. Isotropic plates are considered as a special case of anisotropic plates. Numerical studies carried out for plates with square or triangular holes. Studies have established a high degree of accuracy of the results. Significant differences were noted in the literature known from the real results obtained by this approach.

Key words: anisotropic plate, isotropic plate, curved hole complex potentials, generalized least squares method.

References

1. Lekhnitskii S. G. *Anisotropic Plates*. New York, Springer-Verlag, 1984, 546 p.
2. Kosmodamianskii A. S. *Napriazhennoe sostoianie anizotropnykh sred s otverstiiami ili polostiami* [Stressed state of anisotropic media with holes or cavities]. Donetsk, Vishcha shk., 1976, 200 p. (in Russian).
3. Meglinskii V. V. *Nekotorye zadachi izgiba tonkikh mnogosviaznykh anizotropnykh plit* [Some problems of bending of thin multi-connected anisotropic plates]. *Nekotorye zadachi teorii uprugosti o kontsentratsii napriazhenii i deformatsii uprugikh tel: sb. nauch. tr.* [Some problems of elasticity theory about stress concentration and deformation of elastic bodies. Collection of Papers], Saratov, Saratov Univ. Press, 1967, iss. 3, pp. 97–127 (in Russian).
4. Savin G. N. *Raspredelenie napriazhenii okolo otverstii* [Stress distribution near the holes]. Kiev, Nauk. dumka, 1968, 887 p. (in Russian).
5. Kaloerov S. A., Goriaskaia E. S. *Dvumernoe napriazhenno-deformirovannoe sostoianie mnogosviaznogo anizotropnogo tela* [The two-dimensional stress-strain state of a multi-connected anisotropic body]. *Kontsentratsiia napriazhenii. Mekhanika kompozitov: v 12 t.* [The mechanics of composites. Stress concentration]. Kiev, A. S. K., 1998, vol. 7, pp. 10–26 (in Russian).
6. Kaloerov S. A., Dobriak D. A. *Termouprugoe sostoianie kusochno-odnorodnoi anizotropnoi plastinki* [Thermoelastic state of piecewise-homogeneous anisotropic plate]. *Visn. Donets. un-tu, Ser. A, Prirod. nauki* [Bulletin of Donetsk University, Series A, Natural Sciences], 2006, iss. 2, pp. 77–88 (in Russian).
7. Kaloerov S. A. *Kompleksnye potentsialy teorii izgiba mnogosviaznykh anizotropnykh plit* [Complex potentials the theory of bending of multi-connected anisotropic plates]. *Teoret. i prikladnaia mekhanika* [Theoretical and Applied Mechanics], 2012, no. 4 (50), pp. 115–136 (in Russian).
8. Kaloerov S. A., Avdiushina E. V., Mironenko A. B. *Kontsentratsiia napriazhenii v mnogosviaznykh izotropnykh plastinkakh* [Stress concentration in multi-connected anisotropic plates]. Donetsk, DonNU Press, 2013, 440 p. (in Russian).
9. Forsythe G. E., Malcolm M. A., Moler C. B. *Computer methods for mathematical computations*. New Jersey, Prentice-Hall, 1977, 280 p.
10. Kosmodamianskii A. S., Kaloerov S. A. *Temperaturnye napriazheniia v mnogosvi-aznykh plastinkakh* [Thermal stresses in multi-connected plates]. Kiev, Donetsk, Vishcha shk., 1983, 160 p. (in Russian).
11. Kosmodamianskii A. S., Mitrov V. A. *Izhib konechnoi anizotropnoi plastinki s krivolineinym otverstiem* [Bend of finite anisotropic plate with a curvilinear hole]. *Prikladnaia mekhanika* [Applied Mechanics], 1976, vol. 12, no. 12, pp. 96–99 (in Russian).

Please cite this article in press as:

Kaloerov S. A., Zanko A. I. Bending of Multiconnected Anisotropic Plates with the Curvilinear Holes. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 4, pp. 456–464 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-456-464.



ИНФОРМАТИКА

УДК 517.935.2

АДАПТИВНЫЙ АЛГОРИТМ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО СИНТЕЗА КОМБИНИРОВАННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Д. К. Андрейченко¹, К. П. Андрейченко², Д. В. Мельничук³,
М. С. Портенко⁴

¹Андрейченко Дмитрий Константинович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического обеспечения вычислительных комплексов и информационных систем, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, andreichenkodk@gmail.com

²Андрейченко Константин Петрович, доктор технических наук, профессор кафедры прикладной математики и системного анализа, Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А., kp_andreichenko@renet.ru

³Мельничук Дмитрий Вадимович, магистрант факультета компьютерных наук и информационных технологий, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, meldm007@gmail.com

⁴Портенко Марина Сергеевна, старший преподаватель кафедры информатики и программирования, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, msportenko@gmail.com

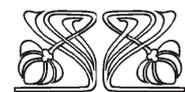
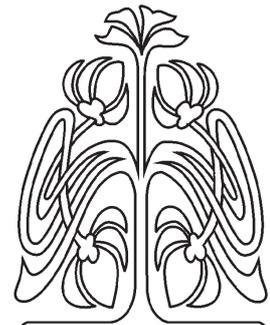
Комбинированные динамические системы (КДС) представляют собой связанные посредством граничных условий и условий связи системы обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных при соответствующих начальных условиях. Под параметрическим синтезом понимают алгоритм выбора значений параметров обратных связей управляемых КДС, обеспечивающих требуемое качество переходных процессов. В работе предложен адаптивный алгоритм параметрического синтеза управляемых КДС, в котором к множеству параметров оптимизации добавляются параметры желаемой вещественной частотной характеристики.

Ключевые слова: параметрический синтез, комбинированные динамические системы.

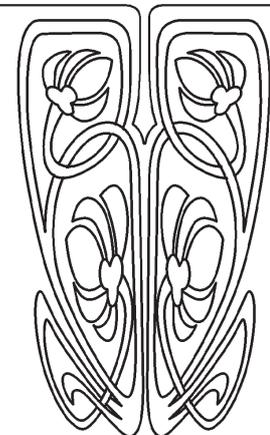
DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-465-475

ВВЕДЕНИЕ

Комбинированные динамические системы (КДС) представляют собой математические модели в форме связанных посредством граничных условий и условий связи обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных при соответствующих начальных условиях [1, 2]. Основные теоремы об устойчивости КДС сформулированы и доказаны в [1, 2], а необходимые для их применения теоремы об аналитичности характеристического и возмущающих квазимногочленов КДС — в [3]. Различные варианты параметрического синтеза управляемых КДС, т.е. алгоритма выбора



**НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ**





значений параметров обратных связей, обеспечивающих требуемое качество переходных процессов, рассмотрены в [2, 4–6]. Целью данной работы является развитие адаптивного алгоритма параметрического синтеза, в котором к множеству параметров оптимизации добавляются параметры «желаемой» вещественной частотной характеристики.

1. УПРАВЛЯЕМЫЕ КОМБИНИРОВАННЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

На рис. 1 приведена структурная схема управляемой КДС с входной вектор-функцией $\mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{N_x}$ и характеризующей движение объектов управления с сосредоточенными по пространству параметрами выходной вектор-функцией $\mathbf{y} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{N_y}$, где t — время. Здесь ОДУ — обыкновенные дифференциальные уравнения, УЧП — уравнения в частных производных, ГУ — граничные условия, УС — условия связи, НУ — начальные условия. Уравнения движения КДС можно привести к виду, аналогичному [2, с. 8]

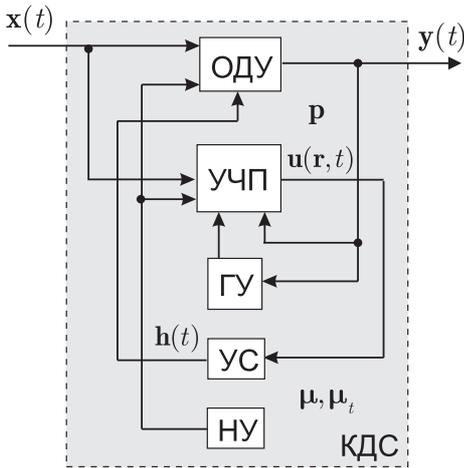


Рис. 1. Структурная схема КДС

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{h}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_t t), \quad \mathbf{h} = \int_S \mathbb{H}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}) dS, \quad (1)$$

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbb{F}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_t t), \quad \mathbf{r} \in \Omega, \quad \mathbb{G}(\mathbf{u}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\mu})|_S = 0, \quad (2)$$

$$\mathbf{y}(0) = 0, \quad \mathbf{u}(\mathbf{r}, 0) = 0. \quad (3)$$

Причем $\mathbb{H}(0, \boldsymbol{\mu}) \equiv 0$, $\mathbf{f}(0, 0, 0, \mathbf{p}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_t t) \equiv 0$, $\mathbb{F}(0, 0, 0, 0, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_t t) \equiv 0$, $\mathbb{G}(0, 0, \boldsymbol{\mu}) \equiv 0$. Здесь $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^{N_r}$ — независимые пространственные координаты, $\Omega \subset \mathbb{R}^{N_r}$ — область, занятая объектами с распределенными по пространству параметрами, $S = \partial\Omega$ — граница области, $\mathbf{u} : \mathbb{R}^{N_r} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{N_u}$ характеризует движение объектов с распределенными по пространству параметрами, $\mathbf{h} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{N_h}$, $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{N_x} \times \mathbb{R}^{N_y} \times \mathbb{R}^{N_h} \times \mathbb{R}^{N_p} \times \mathbb{R}^{N_\mu} \times \mathbb{R}^{N_t} \rightarrow \mathbb{R}^{N_y}$, операторы \mathbb{F} , \mathbb{G} , \mathbb{H} соответствуют уравнениям в частных производных, граничным условиям и условиям связи; $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{N_p}$ — параметры обратных связей, $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^{N_\mu}$ — параметры типовых нелинейностей, $\boldsymbol{\mu}_t \in \mathbb{R}^{N_t}$ — параметры, характеризующие нестационарность, $(\dot{\cdot}) = d(\cdot)/dt$ либо $(\dot{\cdot}) = \partial(\cdot)/\partial t$. Функция \mathbf{f} и операторы \mathbb{F} , \mathbb{G} , \mathbb{H} достаточное число раз дифференцируемы по всем своим аргументам. При $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_t = 0$ КДС (1)–(3) является линейной и стационарной, т.е.

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{h}, \mathbf{p}, 0, 0) = B(\mathbf{p})\mathbf{x} + C(\mathbf{p})\mathbf{y} + A(\mathbf{p})\mathbf{h}, \quad \mathbb{H}(\mathbf{u}, 0) = \mathbb{L}^{(H)}\mathbf{u}, \quad (4)$$

$$\mathbb{F}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, 0, 0) = \mathbb{L}_1^{(F)}\mathbf{u} + L_2^{(F)}\mathbf{x} + L_3^{(F)}\mathbf{y} + L_4^{(F)}\dot{\mathbf{y}}, \quad \mathbb{G}(\mathbf{u}, \mathbf{y}, 0) = \mathbb{L}_1^{(G)}\mathbf{u} + L_2^{(G)}\mathbf{y}.$$

Здесь $A(\mathbf{p})$, $B(\mathbf{p})$, $C(\mathbf{p})$ — матрицы, элементы которых не зависят от координат \mathbf{r} ; $L_2^{(F)}$, $L_3^{(F)}$, $L_4^{(F)}$, $L_2^{(G)}$ — матрицы, элементы которых могут зависеть от координат \mathbf{r} , а линейные операторы $\mathbb{L}_1^{(F)}$, $\mathbb{L}_1^{(G)}$, $\mathbb{L}^{(H)}$ соответствуют линеаризованным уравнениям в частных производных, граничным условиям и условиям связи. После выполнения одностороннего интегрального преобразования Лапласа по времени t $f(t) \rightarrow \tilde{f}(\lambda) = \int_0^\infty f(t)e^{-\lambda t} dt$ уравнения линейной стационарной КДС принимают вид (5) и далее аналогично [2] либо [3, формулы (4)–(12)], динамическая модель КДС сводится к матрице передаточных функций (6):

$$\lambda \tilde{\mathbf{y}} = B(\mathbf{p})\tilde{\mathbf{x}} + C(\mathbf{p})\tilde{\mathbf{y}} + A(\mathbf{p})\tilde{\mathbf{h}}, \quad \tilde{\mathbf{h}} = \int_S \mathbb{L}^{(H)}(\tilde{\mathbf{u}}) dS, \quad (5)$$

$$\lambda \tilde{\mathbf{u}} = \mathbb{L}_1^{(F)}\tilde{\mathbf{u}} + L_2^{(F)}\tilde{\mathbf{x}} + (L_3^{(F)} + \lambda L_4^{(F)})\tilde{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{r} \in \Omega, \quad (\mathbb{L}_1^{(G)}\tilde{\mathbf{u}} + L_2^{(G)}\tilde{\mathbf{y}})|_S = 0;$$

$$\Phi(\lambda, \mathbf{p}) = [Q_{kj}(\lambda, \mathbf{p})/D(\lambda, \mathbf{p})], \quad k = \overline{1, N_y}, \quad j = \overline{1, N_x}, \quad \Phi : \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{N_p} \rightarrow \mathbb{C}^{(N_y, N_x)}, \quad (6)$$

$$\tilde{\mathbf{y}}(\lambda) = \Phi(\lambda, \mathbf{p})\tilde{\mathbf{x}}(\lambda), \quad D(\bar{\lambda}, \mathbf{p}) = \overline{D(\lambda, \mathbf{p})}, \quad Q_{kj}(\bar{\lambda}, \mathbf{p}) = \overline{Q_{kj}(\lambda, \mathbf{p})}.$$

Аналитичность характеристического и возмущающих квазимногочленов $D(\lambda, \mathbf{p})$ и $Q_{kj}(\lambda, \mathbf{p})$ при $\text{Re} \lambda > \sigma_0$, $\sigma_0 \in (-\infty, 0)$ устанавливается методами [3]. Обобщенная степень $n \in \mathbb{R}$ (обычно $n = N_u$)



квазимногочлена $D(\lambda, \mathbf{p})$ определяется из условия [2]

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{-n} D(\lambda, \mathbf{p}) = C_a(\mathbf{p}), \quad 0 < |C_a(\mathbf{p})| < \infty, \quad \operatorname{Re} \lambda > \sigma_0, \quad \sigma_0 \in (-\infty, 0).$$

Пусть $\Omega_{st} \subset \mathbb{R}^{N_p}$ — область устойчивости. Из теорем [1, 2] следуют быстрый алгоритм проверки устойчивости и уравнения возможных границ области устойчивости:

$$\mathbf{p} \in \Omega_{st} \Leftrightarrow \Delta_{0 \leq \omega < \infty} \arg D(i\omega, \mathbf{p}) = n\pi/2, \quad (7)$$

$$\partial\Omega_{st} \subset \{\mathbf{p} : \operatorname{Re} D(i\omega, \mathbf{p}) = 0, \operatorname{Im} D(i\omega, \mathbf{p}) = 0, 0 \leq \omega < \infty\}.$$

2. АДАПТИВНЫЙ АЛГОРИТМ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО СИНТЕЗА

Параметрический синтез основан на минимизации среднеквадратического отклонения вещественной частотной характеристики системы от желаемой вещественной частотной характеристики [2, 4–6] и выполняется посредством минимизации функции

$$F : \mathbb{R}^{N_p} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(\mathbf{p}) \rightarrow \min, \quad F(\mathbf{p}) = \begin{cases} f(\mathbf{p}), & \mathbf{p} \in \Omega_{st}, \\ +\infty, & \mathbf{p} \notin \Omega_{st}; \end{cases} \quad (8)$$

$$f(\mathbf{p}) = \left(\|R_A(0, \mathbf{p}_0)\|^{-2} + \|R_A(0, \mathbf{p})\|^{-2} \right) \int_0^\infty f(\omega, \mathbf{p}) d\omega,$$

$$f(\omega, \mathbf{p}) = \|R_A(\omega, \mathbf{p}) - R_A(0, \mathbf{p})R_A^*(\omega)\|^2 + c_1 \|R_A'(\omega, \mathbf{p}) - R_A(0, \mathbf{p})R_A^{*'}(\omega)\|^2 + c_2 \|R_A''(\omega, \mathbf{p}) - R_A(0, \mathbf{p})R_A^{*''}(\omega)\|^2, \quad (\cdot)' = d(\cdot)/d\omega,$$

$$R_A(\omega, \mathbf{p}) = [R_{A\nu j}(\omega, \mathbf{p})], \quad R_{A\nu j}(\omega, \mathbf{p}) = \begin{cases} \operatorname{Re} \Phi_{\nu j}(i\omega, \mathbf{p}), & A_j(\mathbf{p}) \neq 0, \\ \sqrt{1 + \omega^2} \operatorname{Re}[\Psi_{\nu j}(i\omega, \mathbf{p})], & A_j(\mathbf{p}) = 0, \end{cases} \quad (9)$$

$$R_A^*(\omega) = \operatorname{diag}\{R_{A_j}^*(\omega)\}, \quad R_{A_j}^*(\omega) = \begin{cases} R^*(\omega), & A_j(\mathbf{p}) \neq 0, \\ \sqrt{1 + \omega^2} R^*(\omega), & A_j(\mathbf{p}) = 0, \end{cases}$$

$$A_j(\mathbf{p}) = \left[\sum_{\nu=1}^{N_y} |\Phi_{\nu j}(0, \mathbf{p})|^2 \right]^{1/2}, \quad \Psi_{\nu j}(\lambda, \mathbf{p}) = \frac{1}{\lambda} \Phi_{\nu j}(\lambda, \mathbf{p}), \quad \nu = \overline{1, N_y}, \quad j = \overline{1, N_x};$$

$$R^*(\omega) = [1 - (t_0\omega)^2]/[1 + (t_0\omega)^4]. \quad (10)$$

Здесь $c_1 = 0.003 \div 0.01$, $c_2 = 0.001 \div 0.003$, $\mathbf{p}_0 \in \Omega_{st}$ — значения параметров обратных связей в момент старта параметрического синтеза. Для минимизации целевой функции (8) используется безградиентный метод Нелдера – Мида. Обобщением (10) может служить «желаемая» вещественная частотная характеристика

$$R^*(\omega) = (1 + \alpha^2)[1 + \alpha^2 - 2(t_0\omega)^2]\{[1 + \alpha^2 - 2(t_0\omega)^2]^2 + 8(t_0\omega)^2\}^{-1}, \quad (11)$$

$$t_0^{(\min)} \leq t_0 \leq t_0^{(\max)}, \quad 0 \leq \alpha \leq \alpha_{\max}.$$

В адаптивном алгоритме параметрического синтеза t_0 и α вносятся в пространство параметров оптимизации, и выполняется минимизация функции $F : \mathbb{R}^{N_p} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(\mathbf{p}, t_0, \alpha) \rightarrow \min, \quad F(\mathbf{p}, t_0, \alpha) = \begin{cases} f(\mathbf{p}), & (\mathbf{p}, t_0, \alpha) \in \Omega_{st} \times [t_0^{(\min)}, t_0^{(\max)}] \times [0, \alpha_{\max}], \\ +\infty, & (\mathbf{p}, t_0, \alpha) \notin \Omega_{st} \times [t_0^{(\min)}, t_0^{(\max)}] \times [0, \alpha_{\max}], \end{cases} \quad (12)$$

где $f(\mathbf{p})$ определяется в соответствии с (9), а вместо (10) используется (11).



3. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД МНОГИХ МАСШТАБОВ

Пусть в (1), (2) $\mu \rightarrow 0$, $\mu_t \rightarrow 0$, но требуется изучить поведение системы вплоть до значений времени, когда влияние малых параметров становится существенным, т. е.

$$\begin{aligned} \mu &= \mu\mu^*, \quad \mu_t = \mu\mu_t^*, \quad \mu^* = O(1), \quad \mu_t^* = O(1), \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad \mu \rightarrow +0, \quad 0 \leq t \leq O(1/\mu), \\ \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{h}, \mathbf{p}, \mu, \mu t), \quad \dot{\mathbf{u}} = \mathbb{F}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \mu, \mu t), \quad \mathbf{r} \in \Omega, \\ \mathbb{G}(\mathbf{u}, \mathbf{y}, \mu)|_S &= 0, \quad \mathbf{h} = \int_S \mathbb{H}(\mathbf{u}, \mu) dS, \quad \mathbf{y}(0) = 0, \quad \mathbf{u}(\mathbf{r}, 0) = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Полагаем, что уравнения (13) учитывают малое, но конечное демпфирование, значительно превосходящее характерную величину параметра μ . Аналогично (4)

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{h}, \mathbf{p}, 0, t_1) &= B(\mathbf{p}, t_1)\mathbf{x} + C(\mathbf{p}, t_1)\mathbf{y} + A(\mathbf{p}, t_1)\mathbf{h}, \quad \mathbb{G}(\mathbf{u}, \mathbf{y}, 0) = \mathbb{L}_1^{(G)}\mathbf{u} + \mathbb{L}_2^{(G)}\mathbf{y}, \\ \mathbb{F}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, 0, t_1) &= \mathbb{L}_1^{(F)}(t_1)\mathbf{u} + \mathbb{L}_2^{(F)}(t_1)\mathbf{x} + \mathbb{L}_3^{(F)}(t_1)\mathbf{y} + \mathbb{L}_4^{(F)}(t_1)\dot{\mathbf{y}}, \quad \mathbb{H}(\mathbf{u}, 0) = \mathbb{L}^{(H)}\mathbf{u}. \end{aligned} \tag{14}$$

Здесь матрицы $A, B, C, \mathbb{L}_2^{(F)}, \mathbb{L}_3^{(F)}, \mathbb{L}_4^{(F)}$ и линейный оператор $\mathbb{L}_1^{(F)}$ могут зависеть от «медленного» времени $t_1 = \mu t$. Для асимптотического интегрирования (13) воспользуемся методом «многих масштабов» [7] и будем полагать

$$\begin{aligned} t_j &= \mu^j t, \quad j = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad t_0 \equiv t, \quad \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j \mathbf{u}_j(\mathbf{r}, t_0, t_1, t_2, \dots), \\ \mathbf{y}(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j \mathbf{y}_j(t_0, t_1, t_2, \dots), \quad \mathbf{h}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j \mathbf{h}_j(t_0, t_1, t_2, \dots), \quad (\dot{}) = \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j \partial(\cdot)/\partial t_j. \end{aligned} \tag{15}$$

Подстановка формальных степенных рядов (15) в (13) и приравнивание слагаемых при одинаковых степенях малого параметра μ с учетом (14) приводит к результату:

$$\begin{aligned} \partial \mathbf{y}_0 / \partial t_0 &= B(\mathbf{p}t_1)\mathbf{x} + C(\mathbf{p}t_1)\mathbf{y}_0 + A(\mathbf{p}t_1)\mathbf{h}_0, \quad \mathbf{h}_0 = \int_S \mathbb{L}^{(H)} \mathbf{u}_0 dS, \\ \partial \mathbf{u}_0 / \partial t_0 &= \mathbb{L}_1^{(F)}(t_1)\mathbf{u}_0 + \mathbb{L}_2^{(F)}(t_1)\mathbf{x} + \mathbb{L}_3^{(F)}(t_1)\mathbf{y}_0 + \mathbb{L}_4^{(F)}(t_1)\partial \mathbf{y}_0 / \partial t_0, \quad \mathbf{r} \in \Omega, \\ (\mathbb{L}_1^{(G)}\mathbf{u}_0 + \mathbb{L}_2^{(G)}\mathbf{y}_0)|_S &= 0; \quad \mathbf{y}_0(0, 0, \dots) = 0, \quad \mathbf{u}_0(\mathbf{r}, 0, 0, \dots) = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

В качестве начальных условий $\mathbf{y}_0|_{t_0=0} = \mathbf{f}_1(t_1, t_2, \dots)$, $\mathbf{u}_0|_{t_0=0} = \mathbf{f}_2(\mathbf{r}, t_1, t_2, \dots)$ можно задать любые достаточно гладкие функции \mathbf{f}_1 и \mathbf{f}_2 параметров t_1, t_2, \dots , такие, что $\mathbf{f}_1(0, 0, \dots) = 0$, $\mathbf{f}_2(\mathbf{r}, 0, 0, \dots) \equiv 0$. При учете малого, но конечного демпфирования и асимптотической устойчивости (16) влияние $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ будет экспоненциально затухать с ростом t_0 и с учетом (15) будет иметь порядок $O(\mu)$ при $0 \leq t \leq O(1/\mu)$. Можно полагать $\mathbf{y}_0(0, t_1, t_2, \dots) = 0$, $\mathbf{u}_0(\mathbf{r}, 0, t_1, t_2, \dots) = 0$, т. е. $\mathbf{y}_0, \mathbf{u}_0, \mathbf{h}_0$ зависят лишь от t_0 и t_1 , и

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0(t, \mu t) + O(\mu), \quad \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t, \mu t) + O(\mu), \quad \mathbf{h}(t) = \mathbf{h}_0(t, \mu t) + O(\mu), \quad 0 \leq t \leq O(1/\mu).$$

Здесь функции $\mathbf{y}_0(t, t_1), \mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t, t_1), \mathbf{h}_0(t, t_1)$ — решение системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}} &= B(\mathbf{p}, t_1)\mathbf{x} + C(\mathbf{p}, t_1)\mathbf{y} + A(\mathbf{p}, t_1)\mathbf{h}, \quad \dot{\mathbf{u}} = \mathbb{L}_1^{(F)}(t_1)\mathbf{u} + \mathbb{L}_2^{(F)}(t_1)\mathbf{x} + \mathbb{L}_3^{(F)}(t_1)\mathbf{y} + \mathbb{L}_4^{(F)}(t_1)\dot{\mathbf{y}}, \\ \mathbf{r} \in \Omega, \quad (\mathbb{L}_1^{(G)}\mathbf{u} + \mathbb{L}_2^{(G)}\mathbf{y})|_S &= 0, \quad \mathbf{h} = \int_S \mathbb{L}^{(H)} \mathbf{u} dS, \quad \mathbf{y}(0) = 0, \mathbf{u}(\mathbf{r}, 0) = 0, \end{aligned} \tag{17}$$

зависящих от параметра t_1 . Пусть при $t \geq 0$ $|\mathbf{x}(t)| < \infty$. Для справедливости асимптотических разложений необходимо, в частности, условие асимптотической устойчивости КДС (17) при всех $0 \leq t_1 \leq O(1)$.

После выполнения интегрального преобразования Лапласа по времени t линеаризованная модель (17) сводится к матрице передаточных функций [3, формулы (4)–(12)]

$$\Phi(\lambda, \mathbf{p}, t_1) = [Q_{kj}(\lambda, \mathbf{p}, t_1)/D(\lambda, \mathbf{p}, t_1)], \quad \tilde{\mathbf{y}}(\lambda) = \Phi(\lambda, \mathbf{p}, t_1)\tilde{\mathbf{x}}(\lambda), \quad t_1 = \mu t, \quad k = \overline{1, N_y}, \quad j = \overline{1, N_x},$$



которая зависит от «медленного» времени. Аналогично КДС (1)–(3) со слабой нелинейностью и нестационарностью с асимптотической погрешностью $O(|\mu|) = O(|\mu_t|)$ отображается в семейство линейных стационарных КДС с матрицей передаточных функций:

$$\Phi(\lambda, \mathbf{p}, \mathbf{t}_1) = [Q_{kj}(\lambda, \mathbf{p}, \mathbf{t}_1)/D(\lambda, \mathbf{p}, \mathbf{t}_1)], \quad \mathbf{t}_1 = \mu_t t, \quad k = \overline{1, N_y}, \quad j = \overline{1, N_x}.$$

4. СИНТЕЗ СЕМЕЙСТВА ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ МОДЕЛЕЙ КДС

Пусть линеаризованная модель КДС задается матрицей передаточных функций:

$$\Phi(\lambda, \mathbf{p}, \mathbf{s}) = [Q_{kj}(\lambda, \mathbf{p}, \mathbf{s})/D(\lambda, \mathbf{p}, \mathbf{s})], \quad k = \overline{1, N_y}, \quad j = \overline{1, N_x},$$

где $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{N_p}$ — параметры обратных связей, $\mathbf{s} \in \Omega_s \subset \mathbb{R}^{N_s}$ — конструктивные параметры. Пусть $\Omega_{st} = \Omega_{st}(\mathbf{s}) \subset \mathbb{R}^{N_p}$ — область устойчивости, $\Omega^{(st)} = \bigcap_{\mathbf{s} \in \Omega_s} \Omega_{st}(\mathbf{s})$, причем

$$\mathbf{p} \in \Omega_{st}(\mathbf{s}) \Leftrightarrow \Delta_{0 \leq \omega < \infty} \arg D(i\omega, \mathbf{p}, \mathbf{s}) = n\pi/2, \quad \mathbf{p} \in \Omega^{(st)} \Leftrightarrow \forall \mathbf{s} \in \Omega_s \quad \mathbf{p} \in \Omega_{st}(\mathbf{s}).$$

Требуется выбрать параметры \mathbf{p} так, чтобы улучшить качество переходных процессов сразу для всех линейных моделей КДС при $\mathbf{s} \in \Omega_s$. После применения метода «многих масштабов» к КДС (1)–(3) при выполнении параметрического синтеза семейства линеаризованных моделей КДС в множество компонент вектора \mathbf{s} включаются либо непосредственно «медленные времена» $\mathbf{t}_1 = \mu_t t$, либо характерные параметры задачи, которые изменяются в зависимости от \mathbf{t}_1 . Обобщением (8) служит параметрический синтез семейства линеаризованных моделей КДС [5] ($R^*(\omega)$ определено согласно (10))

$$F(\mathbf{p}) \rightarrow \min, \quad F(\mathbf{p}) = \begin{cases} f(\mathbf{p}), & \mathbf{p} \in \Omega^{(st)}, \\ +\infty, & \mathbf{p} \notin \Omega^{(st)}; \end{cases} \quad (18)$$

$$f(\mathbf{p}) = \int_{\Omega_s} f(\mathbf{p}, \mathbf{s}) ds_1 \dots ds_{N_s},$$

$$f(\mathbf{p}, \mathbf{s}) = \left(\|R_A(0, \mathbf{p}_0, \mathbf{s})\|^{-2} + \|R_A(0, \mathbf{p}_0, \mathbf{s})\|^2 \right) \int_0^\infty f(\mathbf{p}, \mathbf{s}, \omega) d\omega,$$

$$f(\mathbf{p}, \mathbf{s}, \omega) = \|R_A(\omega, \mathbf{p}, \mathbf{s}) - R_A(0, \mathbf{p}, \mathbf{s})R_A^*(\omega)\|^2 +$$

$$+ c_1 \|R'_A(\omega, \mathbf{p}, \mathbf{s}) - R_A(0, \mathbf{p}, \mathbf{s})R_A^{*'}(\omega)\|^2 + c_2 \|R''_A(\omega, \mathbf{p}, \mathbf{s}) - R_A(0, \mathbf{p}, \mathbf{s})R_A^{*''}(\omega)\|^2,$$

$$(\cdot)' = d(\cdot)/d\omega, \quad R_{A_{\nu j}}(\omega, \mathbf{p}, \mathbf{s}) = \begin{cases} \operatorname{Re} \Phi_{\nu j}(i\omega, \mathbf{p}, \mathbf{s}), & A_j(\mathbf{p}, \mathbf{s}) \neq 0, \\ \sqrt{1 + \omega^2} \operatorname{Re}[\Psi_{\nu j}(i\omega, \mathbf{p}, \mathbf{s})], & A_j(\mathbf{p}, \mathbf{s}) = 0, \end{cases} \quad (19)$$

$$R_{A_j}^*(\omega) = \operatorname{diag}\{R_{A_j}^*(\omega)\}, \quad R_{A_j}^*(\omega) = \begin{cases} R^*(\omega), & A_j(\mathbf{p}, \mathbf{s}) \neq 0, \\ \sqrt{1 + \omega^2} R^*(\omega), & A_j(\mathbf{p}, \mathbf{s}) = 0, \end{cases}$$

$$A_j(\mathbf{p}, \mathbf{s}) = \left[\sum_{\nu=1}^{N_y} |\Phi_{\nu j}(0, \mathbf{p}, \mathbf{s})|^2 \right]^{1/2}, \quad \Psi_{\nu j}(\lambda, \mathbf{p}, \mathbf{s}) = \frac{1}{\lambda} \Phi_{\nu j}(\lambda, \mathbf{p}, \mathbf{s}), \quad \nu = \overline{1, N_y}, \quad j = \overline{1, N_x}.$$

При $\mathbf{p} \in \Omega^{(st)}$ функция $f(\mathbf{p}, \mathbf{s})$ является достаточно гладкой, и при вычислении $f(\mathbf{p})$ используются квадратурные формулы с постоянным числом узлов. В адаптивном алгоритме вместо (10) используется «желаемая» вещественная частотная характеристика (11), $f(\mathbf{p})$ вычисляется на основе (19), параметры t_0, α вносятся в пространство параметров оптимизации и минимизируется функция $F: \mathbb{R}^{N_p} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(\mathbf{p}, t_0, \alpha) \rightarrow \min, \quad F(\mathbf{p}, t_0, \alpha) = \begin{cases} f(\mathbf{p}), & (\mathbf{p}, t_0, \alpha) \in \Omega^{(st)} \times [t_0^{(\min)}, t_0^{(\max)}] \times [0, \alpha_{\max}], \\ +\infty, & (\mathbf{p}, t_0, \alpha) \notin \Omega^{(st)} \times [t_0^{(\min)}, t_0^{(\max)}] \times [0, \alpha_{\max}]. \end{cases} \quad (20)$$

5. ПРОЕКЦИОННЫЙ МЕТОД ГАЛЕРКИНА

Пусть $\mathbf{W}_k(\mathbf{r})$, $\mathbf{W}_k: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{N_u}$, $k = 1, 2, \dots$ — полная система функций в области Ω ; $\Gamma_k(\mathbf{r}|_S)$, $\Gamma_k: S \rightarrow \mathbb{R}^{N_G}$, $k = 1, 2, \dots$ — полная система функций на $S = \partial\Omega$. Полагаем

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \approx \sum_{k=1}^{N_\Omega + N_S} u_k(t) \mathbf{W}_k(\mathbf{r}). \tag{21}$$

Для того чтобы приближенно выполнить уравнения (2), требуем [2] выполнение следующих условий:

$$\int_{\Omega} \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{W}_k(\mathbf{r}) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbb{F}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_t) \mathbf{W}_k(\mathbf{r}) d\Omega, \quad k = \overline{1, N_\Omega},$$

$$\int_S \mathbb{G}(\mathbf{u}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}) \cdot \Gamma_k(\mathbf{r}) dS = 0, \quad k = \overline{1, N_S}, \tag{22}$$

где $(\cdot) \cdot (\cdot)$ — скалярное произведение векторов соответствующей размерности. Из (1), (3), (22), (21) следует задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которая далее интегрируется численно «жестко устойчивым» ФДН-методом:

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{Y}), \quad \mathbf{Y}(0) = 0, \quad \mathbf{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_{N_y}, u_1, u_2, \dots, u_{N_u})^T.$$

6. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ СИСТЕМЫ СТАБИЛИЗАЦИИ

Пусть поворот системы координат характеризуется углами $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T$, и

$$A(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{bmatrix} \cos \alpha_3 & -\sin \alpha_3 & 0 \\ \sin \alpha_3 & \cos \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha_2 & 0 & \sin \alpha_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha_2 & 0 & \cos \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_1 & -\sin \alpha_1 \\ 0 & \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 \end{bmatrix},$$

$$B(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \alpha_2 \\ 0 & \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 \sin \alpha_1 \\ 0 & -\sin \alpha_1 & \cos \alpha_2 \cos \alpha_1 \end{bmatrix}.$$

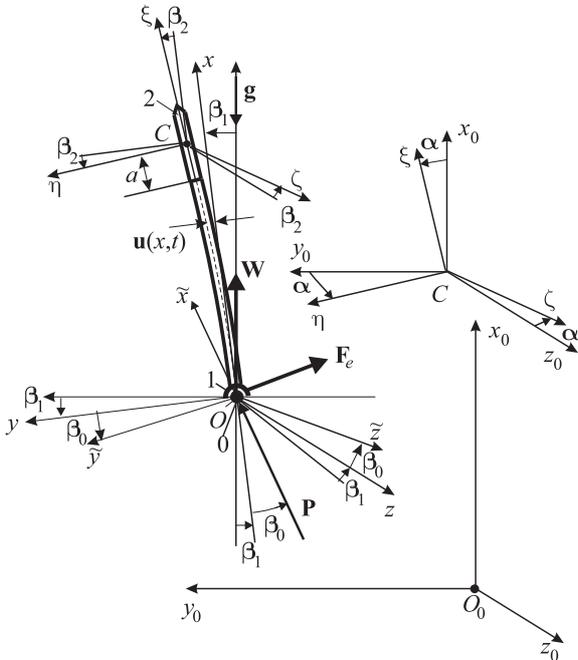


Рис. 2. Расчетная схема

Рассмотрим систему угловой стабилизации подвижного объекта управления — ракеты с учетом упругих деформаций ее корпуса (рис. 2).

Объект движется относительно неподвижной системы координат $O_0x_0y_0z_0$ под действием силы \mathbf{P} , притяжения к Земле и возмущающей силы $\mathbf{F}_e = (0, F_{e_{y_0}}, F_{e_{z_0}})^T$. Система координат $Oxyz$ связана с телом 1, а $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)^T$ и $\boldsymbol{\beta}_1 = (\beta_{1,1}, \beta_{1,2}, \beta_{1,3})^T$ характеризуют его линейные и угловые перемещения относительно $O_0x_0y_0z_0$. Линейные $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)^T$ и угловые $\boldsymbol{\beta}_2 = (\beta_{2,1}, \beta_{2,2}, \beta_{2,3})^T$ смещения тела 2 относительно $Oxyz$ вызваны упругими перемещениями $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)^T = \mathbf{u}(x, t)$ осевой линии корпуса. Углы поворота $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T$ тела 2 относительно $O_0x_0y_0z_0$ измеряет гиросtabilизатор, и формируются управляющие моменты M_{c_2} и M_{c_3} , под действием которых тело 0 поворачивается на углы $\boldsymbol{\beta}_0 = (0, \beta_{0,2}, \beta_{0,3})^T$ относительно $Oxyz$.



Пусть $\omega_0 = (\omega_{0x}, \omega_{0y}, \omega_{0z})^T$, $\Omega_1 = (\Omega_{1x}, \Omega_{1y}, \Omega_{1z})^T$, $\Omega_2 = (\Omega_{2x}, \Omega_{2y}, \Omega_{2z})^T$ — относительная и абсолютные угловые скорости тел 0, 1, 2, $\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2, Q_3)^T$, $\mathbf{M} = (M_1, M_2, M_3)^T$ — действующие в поперечных сечениях корпуса внутренние силы и моменты сил. После приведения к безразмерным переменным модельные уравнения КДС принимают вид

$$\begin{aligned}
 \Omega_1 &= B(\mu_1\beta_1)\dot{\beta}_1, & \Omega_2 &= A^T(\mu_1\beta_2)\Omega_1 + B(\mu_1\beta_2)\dot{\beta}_2, & E &= \text{diag}\{1, 1, 1\}, \\
 \omega_{0x} &= -\dot{\beta}_{0,2} \sin(\mu_1\beta_{0,3}), & \omega_{0y} &= \dot{\beta}_{0,2} \cos(\mu_1\beta_{0,3}), & \omega_{0z} &= \dot{\beta}_{0,3}, \\
 m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 &= A(\mu_1\beta_1)\mathbf{Q}(0, t) - \mathbf{F}_e + a_x[(1 + m_2)A(\mu_1\beta_1)\Phi(0, \beta_0) + m_1\Phi(\beta_1, \beta_0)], \\
 \Phi(\alpha, \beta) &= \mu_1^{-1}(A(\mu_1\alpha)A(\mu_1\beta) - E)(1, 0, 0)^T = (\Phi_1(\alpha, \beta), \Phi_2(\alpha, \beta), \Phi_3(\alpha, \beta))^T, \\
 J_0(\dot{\Omega}_1 + \dot{\omega}_0) + J^{(1)}\dot{\Omega}_1 + \mu_1\Omega_1 \times (J_0\omega_0 + J^{(1)}\Omega_1) &= \mathbf{M}(0, t), & J^{(1)} &= \text{diag}\{J_{1k}, J_1, J_1\}, \\
 J_0[\dot{\Omega}_{1y} + \dot{\omega}_{0y} + \mu_1(\Omega_{1z}\omega_{0x} - \Omega_{1x}\omega_{0z})] &= M_2^{(c)} \cos(\mu_1\beta_{0,3}) + M_3^{(c)} \sin(\mu_1\beta_{0,3}) \times \\
 &\times \sin(\mu_1\beta_{0,2}), & J_0[\dot{\Omega}_{1z} + \dot{\omega}_{0z} + \mu_1(\Omega_{1x}\omega_{0y} - \Omega_{1y}\omega_{0x})] &= M_3^{(c)} \cos(\mu_1\beta_{0,2}), \\
 \alpha_2 &= -\frac{1}{\mu_1} \arcsin(\mu_1\Phi_3(\beta_2, \beta_1)), & \alpha_3 &= \frac{1}{\mu_1} \arcsin \frac{\mu_1\Phi_2(\beta_2, \beta_1)}{\cos(\mu_1\alpha_2)}, & f_1(z) &= \text{tg } z, \\
 M_3^{(c)} &= \mathbb{S}_3[\alpha_3] - p_1\dot{\beta}_{0,3} - p_2\mu_2^{-1}f_1(\mu_2\beta_{0,3}), & M_2^{(c)} &= \mathbb{S}_2[\alpha_2] - p_6\dot{\beta}_{0,2} - p_7\mu_2^{-1}f_1(\mu_2\beta_{0,2}), \\
 \mathbb{S}_3[\alpha] &= \frac{1}{\mu_3} f_2(\mu_3\mathbb{S}_3^{(L)}[\alpha]), & \mathbb{S}_3^{(L)}[\alpha] &= p_3 \frac{d\alpha}{dt} + p_4\alpha + p_5 \int_0^t \alpha(\xi) d\xi, \\
 \mathbb{S}_2[\alpha] &= \frac{1}{\mu_3} f_2(\mu_3\mathbb{S}_2^{(L)}[\alpha]), & \mathbb{S}_2^{(L)}[\alpha] &= p_8 \frac{d\alpha}{dt} + p_9\alpha + p_{10} \int_0^t \alpha(\xi) d\xi, & f_2(z) &= \text{th } z, \\
 m_2\mathbf{w}_2 &= a_x m_2 [\Phi(0, \mu_1(0, \beta_{2,2}, \beta_{2,3}))^T - \Phi^*(0, \mu_1\beta_1)] - A(\mu_1(0, \beta_{2,2}, \beta_{2,3}))^T \mathbf{Q}(1, t), \\
 \mathbf{w}_2 &= A^T(\mu_1\beta_1)\ddot{\mathbf{r}}_1 + \dot{\Omega}_1 \times \mathbf{R}_2 + \mu_1(\Omega_1 \cdot \mathbf{R}_2)\Omega_1 - \mu_1\Omega_1^2 \mathbf{R}_2 - 2\mu_1\Omega_1 \times \dot{\mathbf{r}}_2 + \ddot{\mathbf{r}}_2, \\
 \Phi^*(\alpha, \beta) &= \mu_1^{-1}(A^T(\mu_1\alpha)A^T(\mu_1\beta) - E)(1, 0, 0)^T = (\Phi_1^*(\alpha, \beta), \Phi_2^*(\alpha, \beta), \Phi_3^*(\alpha, \beta))^T, \\
 J^{(2)}\dot{\Omega}_2 + \mu_1\Omega_2 \times J^{(2)}\Omega_2 &= -A^T((\mu_1\beta_{2,1}, 0, 0)^T)\mathbf{M}(1, t) + (a, 0, 0)^T \times \\
 &\times A^T((\mu_1\beta_{2,1}, 0, 0)^T)\mathbf{Q}(1, t), & \mathbf{R}_2 &= (1 + a, 0, 0)^T + \mu_1\mathbf{r}_2, & J^{(2)} &= \text{diag}\{J_{2k}, J_2, J_2\};
 \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
 u'_x &= \frac{1}{\mu_1} \left[(1 - \mu_1^2(u_y'^2 + u_z'^2))^{1/2} - 1 \right], & L_{21} &= \mu_1 u'_y, & L_{31} &= \mu_1 u'_z, & L_{33} &= (1 - L_{31}^2)^{1/2}, \\
 L_{11} &= (L_{33}^2 - L_{21}^2)^{1/2}, & L_{12} &= -L_{21}/L_{33}, & L_{22} &= L_{11}/L_{33}, & L_{13} &= -L_{31}L_{22}, & L_{23} &= L_{31}L_{12}, \\
 \kappa_1 &= u'_z(L_{12}L'_{22} - L_{22}L'_{12}), & \kappa_2 &= u'_z L_{22}L'_{11} - u_y'' L_{23} - u_z'' L_{33}, & \kappa_3 &= -u_y' \frac{L'_{11}}{L_{33}} + u_y'' L_{22}, \\
 \ddot{u}_y + (A^T(\mu_1\beta_1)\ddot{\mathbf{r}}_1) \cdot (0, 1, 0)^T - (\mu_1\dot{\Omega}_{1x}u_z - \dot{\Omega}_{1z}(x + \mu_1u_x)) + \\
 + \mu_1[(x + \mu_1u_x)\Omega_{1x} + \mu_1u_z\Omega_{1z}]\Omega_{1y} - \mu_1^2(\Omega_{1x}^2 + \Omega_{1z}^2)u_y + 2\mu_1(\Omega_{1x}\dot{u}_z - \Omega_{1z}\dot{u}_x) = \\
 = L_{21}(Q'_1 + \mu_1(\kappa_2Q_3 - \kappa_3Q_2)) + L_{22}(Q'_2 - \mu_1(\kappa_1Q_3 - \kappa_3Q_1)) + \\
 + L_{23}(Q'_3 + \mu_1(\kappa_1Q_2 - \kappa_2Q_1)) - a_x[\Phi_2^*(0, \beta_1) + ((m_2 + 1 - x)u'_y)'], \\
 \ddot{u}_z + (A^T(\mu_1\beta_1)\ddot{\mathbf{r}}_1) \cdot (0, 0, 1)^T + \mu_1\dot{\Omega}_{1x}u_y - \dot{\Omega}_{1y}(x + \mu_1u_x) + \\
 + \mu_1[(x + \mu_1u_x)\Omega_{1x} + \mu_1u_y\Omega_{1y}]\Omega_{1z} - \mu_1^2(\Omega_{1x}^2 + \Omega_{1y}^2)u_z - 2\mu_1(\Omega_{1x}\dot{u}_y - \Omega_{1y}\dot{u}_x) = \\
 = L_{31}(Q'_1 + \mu_1(\kappa_2Q_3 - \kappa_3Q_2)) + L_{33}(Q'_3 + \mu_1(\kappa_1Q_2 - \kappa_2Q_1)) - \\
 - a_x[\Phi_3^*(0, \beta_1) + ((m_2 + 1 - x)u'_z)'], \\
 Q''_1 - \mu_1^2(\kappa_2^2 + \kappa_3^2)Q_1 = \mu_1\{-a_x(m_2 + 1 - x)(\kappa_2^2 + \kappa_3^2) + \kappa'_3Q_2 - \kappa'_2Q_3 + \\
 + 2\kappa_3Q'_2 - 2\kappa_2Q'_3 - \mu_1\kappa_1(\kappa_2Q_2 + \kappa_3Q_3) - (\dot{u}_x'^2 + \dot{u}_y'^2 + \dot{u}_z'^2) + \\
 + (\Omega_{1x}L_{11} + \Omega_{1y}L_{21} + \Omega_{1z}L_{31})^2 - (\Omega_{1x}^2 + \Omega_{1y}^2 + \Omega_{1z}^2) + \\
 + 2[L_{11}(\Omega_{1y}\dot{u}'_z - \Omega_{1z}\dot{u}'_y) - L_{21}(\Omega_{1x}\dot{u}'_z - \Omega_{1z}\dot{u}'_x) + L_{31}(\Omega_{1x}\dot{u}'_y - \Omega_{1y}\dot{u}'_x)]\}, & (\cdot)' &= \partial(\cdot)/\partial x; \\
 u_y(0, t) &= 0, & u'_y(0, t) &= 0, & u_y(1, t) &= y_2 - a\Phi_2(0, \beta_2), & u'_y(1, t) &= \cos(\mu_1\beta_{2,2}) \frac{\sin(\mu_1\beta_{2,3})}{\mu_1}, \\
 u_z(0, t) &= 0, & u'_z(0, t) &= 0, & u_z(1, t) &= z_2 - a\Phi_3(0, \beta_2), & u'_z(1, t) &= -\frac{1}{\mu_1} \sin(\mu_1\beta_{2,2}),
 \end{aligned} \tag{25}$$



$$\begin{aligned}
 Q'_1(0, t) + \mu_1(\kappa_2(0, t)Q_3(0, t) - \kappa_3(0, t)Q_2(0, t)) &= \ddot{\mathbf{r}}_1 \cdot A(\mu_1\beta_1)(1, 0, 0)^T + \\
 + a_x\Phi_1^*(0, \beta_1), \quad Q'_1(1, t) + \mu_1(\kappa_2(1, t)Q_3(1, t) - \kappa_3(1, t)Q_2(1, t)) &= a_x\Phi_1^*(\beta_2, \beta_1) + \\
 + \mu_1a(\Omega_{2\eta}^2 + \Omega_{2\zeta}^2) + (1, 0, 0)^T \cdot A^T(\mu_1\beta_2)w_2, \quad x_2 &= u_x(1, t) + a\Phi_1(0, \beta_2); \\
 M_1 = I_k \left(\beta_{2,1} + \gamma\dot{\beta}_{2,1} - \int_0^1 \kappa_1 dx \right), \quad M_2 = \kappa_2 - \gamma\dot{u}_z'', \quad M_3 = \kappa_3 + \gamma\dot{u}_y'', & \quad (26)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_2 &= -M'_3 + \mu_1(\kappa_2M_1 - \kappa_1M_2), \quad Q_3 = M'_2 + \mu_1(\kappa_3M_1 - \kappa_1M_3); \\
 \beta_1(0) = \dot{\beta}_1(0) = \beta_2(0) = \dot{\beta}_2(0) = \beta_{0,2}(0) = \dot{\beta}_{0,2}(0) = \beta_{0,3}(0) = \dot{\beta}_{0,3}(0) = & \\
 = \mathbf{r}_1(0) = \dot{\mathbf{r}}_1(0) = y_2(0) = \dot{y}_2(0) = z_2(0) = \dot{z}_2(0) = u_y(x, 0) = \dot{u}_y(x, 0) = u_z(x, 0) = \dot{u}_z(x, 0) = 0. & \quad (27)
 \end{aligned}$$

Здесь входная и выходная вектор-функции суть $\mathbf{x}(t) = (F_{e_{y_0}}(t), F_{e_{z_0}}(t))^T$, $\mathbf{y}(t) = (\beta_{1,3}(t), \beta_{2,3}(t), \beta_{1,2}(t), \beta_{2,2}(t))^T$, параметры обратных связей $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_{10})^T$, (23) — обыкновенные дифференциальные уравнения, (24) — уравнения в частных производных, (25) — граничные условия, (26) — условия связи, (27) — начальные условия, вектор $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)^T$ характеризует типовые нелинейности, $\mu_t = \{\mu_4\}$, параметр $\mu_4 \in [0, \infty)$ характеризует изменение перегрузки по закону $a_x(t) = a_x^{(\min)} + (a_x^{(\max)} - a_x^{(\min)})e^{-\mu_4 t}$, $t \geq 0$. При $\mu = 0$ (23)–(27) линеаризуются и распадаются на два независимых подмножества, которые переходят друг в друга. В линейной стационарной КДС $a_x = Const$, $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)^T$.

При моделировании системы стабилизации приняты значения параметров

$$J_0 = 0.00003, \quad m_1 = 0.0667, \quad J_1 = 0.00009728, \quad m_2 = 0.333, \quad J_2 = 0.00345, \quad (28)$$

$$J_0 = 0.02, \quad m_1 = 0.3, \quad J_1 = 0.07, \quad m_2 = 0.2, \quad J_2 = 0.05. \quad (29)$$

Также принято $\gamma = 0.01$, $a = 0.166667$, $J_{2k} = 0.2$, $J_k = 2$, $a_x^{(\min)} = 0.2$, $a_x^{(\max)} = 2$, $F_{e_{y_0}}(t) = 1(t)$, $F_{e_{z_0}}(t) = 1(t) - 1(t - 1)$, где $1(t)$ — функция единичного скачка Хевисайда.

На рис. 3 показаны границы (7) областей устойчивости в плоскости $p_1 = 3$, $p_2 = 10$, $p_3 = 6$ для набора параметров (28) и в плоскости $p_1 = 2$, $p_2 = 7$, $p_3 = 5.3$, для набора параметров (29). Пересечение областей устойчивости $\Omega^{(st)}$ выделено затенением.

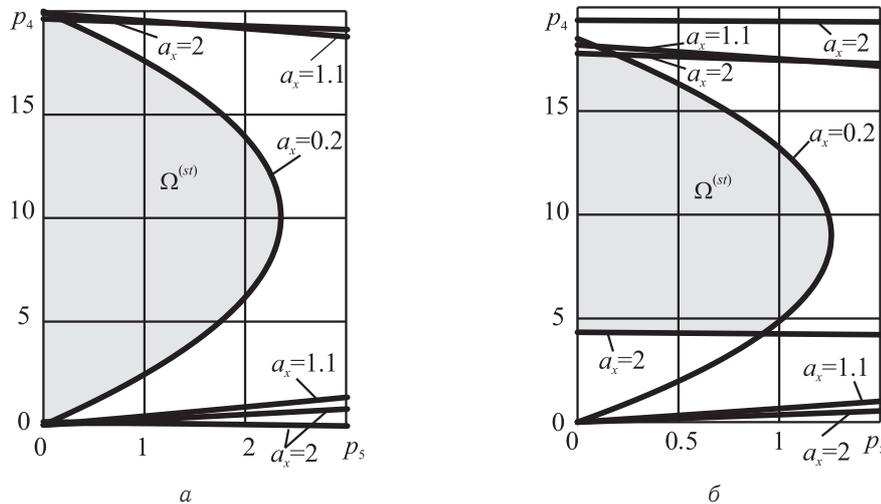


Рис. 3. Области устойчивости: а — для параметров (28), б — для параметров (29)

Параметрический синтез семейства линеаризованных моделей КДС выполнялся в предположении $\mathbf{s} = \{a_x\}$, $\Omega_s = [a_x^{(\min)}, a_x^{(\max)}]$. На рис. 4 приведена зависимость от времени компоненты $\beta_{1,3}(t)$ выходной вектор-функции линейной стационарной модели ($a_x = Const$) до выполнения параметрического синтеза (показана пунктиром, $p_1 = 3$, $p_2 = 10$, $p_3 = 6$, $p_4 = 10$, $p_5 = 1$ для набора параметров (28) и $p_1 = 2$, $p_2 = 7$, $p_3 = 5.3$, $p_4 = 10$, $p_5 = 0.65$ для набора параметров (29)), после выполнения параметрического синтеза на основе (18) (показана штриховой линией, $t_0 = 1$, $p_1 = 2.987$, $p_2 = 4.451$, $p_3 = 4.793$, $p_4 = 1.986$, $p_5 = 1.986$ для набора параметров (28) и $t_0 = 1$, $p_1 = 2.462$, $p_2 = 3.484$, $p_3 = 7.265$, $p_4 = 3.972$, $p_5 = 0.9145$ для набора параметров (29)) и после выполнения параметрического синтеза согласно (20) (показана сплошной линией, $t_0^{(\min)} = 0.05$, $t_0^{(\max)} = 3$, $\alpha_{\max} = 4$, $p_1 = 3.090$,



$p_2 = 5.008, p_3 = 5.720, p_4 = 2.392, p_5 = 0.5052$ для набора параметров (28) и $t_0^{(\min)} = 0.05, t_0^{(\max)} = 3, \alpha_{\max} = 7, p_1 = 3.226, p_2 = 4.428, p_3 = 9.420, p_4 = 3.871, p_5 = 0.8052$ для набора параметров (29).

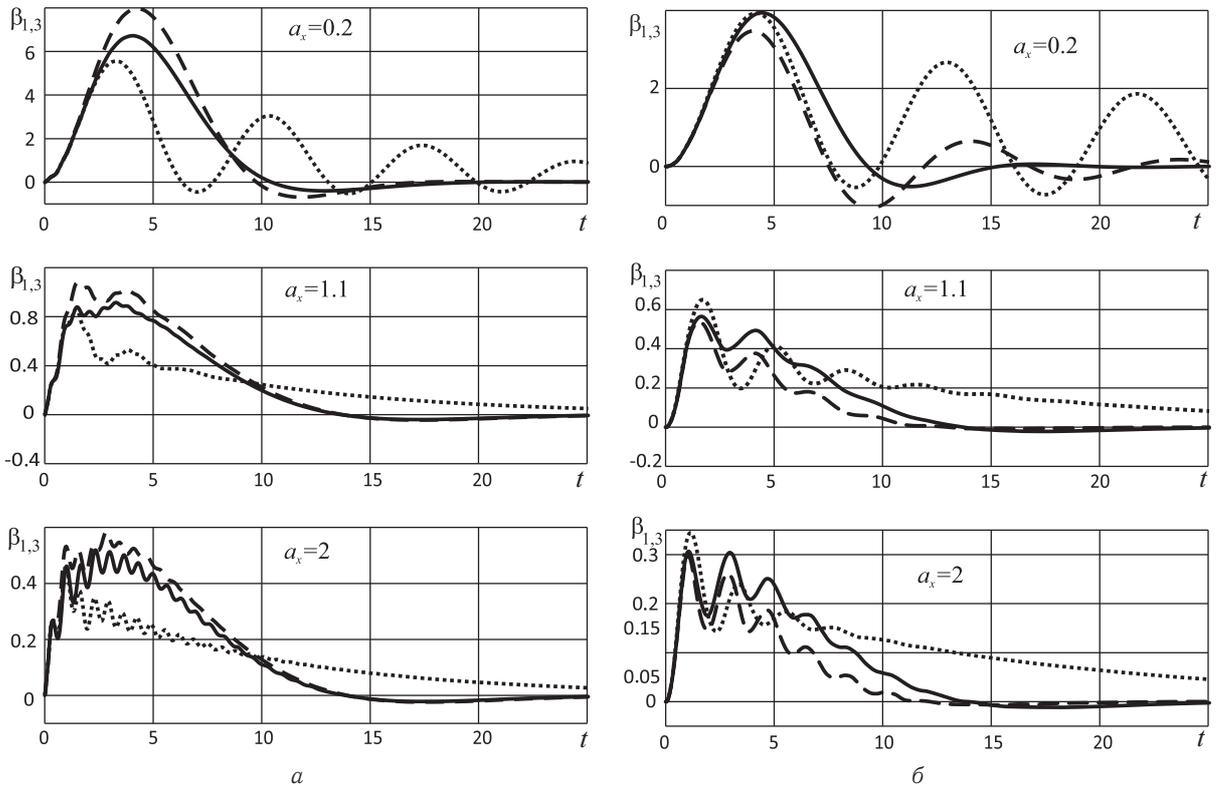


Рис. 4. Выходные функции: а — для параметров (28), б — для параметров (29)

Области устойчивости в пространстве параметров обратных связей характеризуются малой протяженностью, однако оба алгоритма параметрического синтеза (18) и (20) позволяют успешно подавить ошибки системы стабилизации во всем диапазоне изменения перегрузок $a_x^{(\min)} \leq a_x \leq a_x^{(\max)}$. В целом адаптивный алгоритм (20) более эффективен.

После параметрического синтеза выполнялось численное моделирование на основе проекционно-го метода Галеркина выходных вектор-функций исходной нелинейной КДС ($p_{k+5} = p_k, k = \overline{1, 5}$). На рис. 5 представлены результаты численного моделирования компоненты $\beta_{1,3}$ выходных вектор-функций исходной нелинейной нестационарной КДС (23)–(27) при $\mu_1 = 0.015, \mu_2 = 0.1, \mu_3 = 0.04, \mu_4 = 0.05$ для набора параметров (28) и при $\mu_1 = 0.05, \mu_2 = 0.12, \mu_3 = 0.05, \mu_4 = 0.05$ для параметров (29) (показаны сплошной линией), а также ее линейного стационарного аналога при $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 0$ для параметров (28) и (29) (показаны штриховой линией).

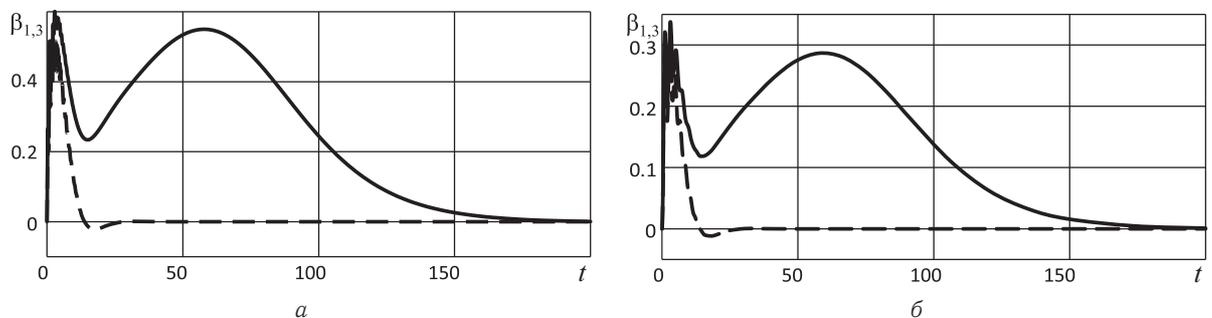


Рис. 5. Выходные функции а — для параметров (28), б — для параметров (29)

Значительное отличие результатов объясняется тем, что безразмерная перегрузка a_x плавно убывает, при уменьшении a_x в рассматриваемом диапазоне изменения перегрузок в линейной стационарной системе затухание переходных процессов уменьшается, а характерная величина выходной



вектор-функции — увеличивается. Тем не менее параметрический синтез по линеаризованной модели позволяет успешно стабилизировать исходную нелинейную систему во всем диапазоне изменения перегрузок.

Библиографический список

1. Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П. К теории комбинированных динамических систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2000. № 3. С. 54–69.
2. Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П. Моделирование, анализ и синтез комбинированных динамических систем : учеб. пособие. Саратов : Райт-Экспо, 2013. 144 с.
3. Портенко М. С., Мельничук Д. В., Андрейченко Д. К. Условия аналитичности характеристического и возмущающих квазимногочленов комбинированных динамических систем // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 2. С. 208–217. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-2-208-217.
4. Андрейченко Д. К., Ерофтиев А. А., Мельничук Д. В. Распараллеливание параметрического синтеза по схеме «портфель задач» на основе технологии MPI // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 2. С. 222–228. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-2-222-228.
5. Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П., Кононов В. В. Параллельный алгоритм вычисления оптимальных параметров одноканальной системы угловой стабилизации // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 4, ч. 1. С. 109–117.
6. Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П., Комарова М. С. Выбор параметров систем и динамический анализ газореактивных систем стабилизации с упругими стержнями // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2012. № 4. С. 101–114.
7. Найфэ А. Н. Методы возмущений. М. : Мир, 1976. 456 с.

Образец для цитирования:

Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П., Мельничук Д. В., Портенко М. С. Адаптивный алгоритм параметрического синтеза комбинированных динамических систем // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 4. С. 465–475. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-465-475.

Adaptive Algorithm of Parametric Synthesis of Hybrid Dynamical Systems

D. K. Andreichenko¹, K. P. Andreichenko², D. V. Melnichuk³, M. S. Portenko⁴

¹Dmitry K. Andreichenko, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., 410012, Saratov, Russia, andreichenkodk@gmail.com

²Konstantin P. Andreichenko, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, 77, Politechnicheskaya str., 410054, Saratov, Russia, kp_andreichenko@renet.ru

³Dmitry V. Melnichuk, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., 410012, Saratov, Russia, meldm007@gmail.com

⁴Marina S. Portenko, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., 410012, Saratov, Russia, msporkenko@gmail.com

Hybrid dynamical systems (HDS) are connected by means of the boundary conditions and the constraint's conditions systems of ordinary differential equations and partial differential equations with the corresponding initial conditions. Under the parametric synthesis we understand the algorithm for selecting parameters of feedbacks of controlled HDS, providing the required quality of transients. This paper proposes an adaptive algorithm for parametric synthesis of controlled HDS in which the parameters of "desired" real frequency characteristics are added to the set of optimization parameters.

Key words: parametric synthesis, hybrid dynamical systems.

References

1. Andreichenko D. K., Andreichenko K. P. On the theory of hybrid dynamical systems. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2000, vol. 39, no. 3, pp. 383-398.
2. Andreichenko D. K., Andreichenko K. P. *Modelirovanie, analiz i sintez kombinirovannykh dinamicheskikh sistem. Uchebnoe posobie* [Modeling, analysis and synthesis of combined dynamical systems. Tutorial]. Saratov, Rait-Ekspo Publ., 2013. 144 p. ISBN 978-5-4426-0018-6 (in Russian).
3. Portenko M. S., Melnichuk D. V., Andreichenko D. K. Analyticity conditions of characteristic and disturbing quasipolynomials of hybrid dynamical systems. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 2, pp. 208–217 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-2-208-217.



4. Andreichenko D. K., Eroftiev A. A., Melnichuk D. V. Parallelization of parametric synthesis by “problems portfolio” scheme based on MPI technology. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2015, vol. 15, iss. 2, pp. 222–228 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-2-222-228.
5. Andreichenko D. K., Andreichenko K. P., Kononov V. V. Parallel algorithm of optimal parameters calculation for the single channel angular stabilization system. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2013, vol. 13, iss. 4, pt. 1, pp. 109–117 (in Russian).
6. Andreichenko D. K., Andreichenko K. P., Komarova M. S. Parameter Selection and Dynamic Analysis of Gas Jet Stabilization Systems with Elastic Rods. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2012, vol. 51, no. 4, pp. 573–586. DOI: 10.1134/S1064230712030021.
7. Nayfeh A. H. *Perturbation methods*. New York, Wiley, 1973. 425 p. (Russ. ed. : Nayfeh A. *Metody vozmushchenij*. Moscow, Mir, 1976. 456 p.)

Please cite this article in press as:

Andreichenko D. K., Andreichenko K. P., Melnichuk D. V., Portenko M. S. Adaptive Algorithm of Parametric Synthesis of Hybrid Dynamical Systems. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 4, pp. 465–475 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-465-475.

УДК 519.1

ИНДЕКСЫ СОСТОЯНИЙ В ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ ДВОИЧНЫХ ВЕКТОРОВ, АССОЦИИРОВАННЫХ С ОРИЕНТАЦИЯМИ ПАЛЬМ

А. В. Жаркова

Жаркова Анастасия Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, ZharkovaAV3@gmail.com

Рассматривается динамическая система двоичных векторов, ассоциированных с ориентациями пальм. Дерево называется пальмой, если оно является объединением цепей, имеющих общую концевую вершину, причём все эти цепи, за исключением, быть может, одной, имеют длину 1. Данная система в зависимости от размерности состояний разбивается на конечные подсистемы. Состояниями конечной динамической системы являются все возможные ориентации данной пальмы, которые естественным образом кодируются двоичными векторами, а эволюционная функция задаётся следующим образом: динамическим образом данной ориентации пальмы является ориентация, полученная из исходной путём переориентации всех дуг, входящих в стоки, других отличий между исходной ориентацией пальмы и её образом нет. Предлагается алгоритм вычисления индексов состояний системы, находится глубина бассейна системы заданной размерности.

Ключевые слова: двоичный вектор, глубина, индекс, конечная динамическая система, пальма, сверхстройное (звездобразное) дерево.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-475-484

ВВЕДЕНИЕ

Графовые модели, в которых отказы процессоров интерпретируются как удаление соответствующих вершин, а отказы сетевых каналов — как удаление дуг, занимают важное место в задачах, связанных с отказоустойчивостью компьютерных сетей. Здесь можно выделить следующие три основные конструкции, получившие самостоятельное значение в теории графов: минимальное расширение графа [1], T-неприводимое расширение графа [2], бесконтурный граф с заданной структурой источников и стоков [3]. В модели [3] в качестве механизма восстановления работоспособности сети предлагается так называемая SER-динамика бесконтурных связных ориентированных графов. Это позволяет использовать при изучении модельных графов идеи и методы теории конечных динамических систем, и, в частности, динамических систем двоичных векторов (см., например, [4, 5]) — когда имеется естественная двоичная кодировка графов рассматриваемого класса. В указанных выше работах по отказоустойчивости графовых систем основные результаты получены для систем, в основе которых лежат цепи, циклы и частные типы деревьев. К числу деревьев, для которых найдено описание как минимальных, так и T-неприводимых расширений, относятся пальмы [1, 2]. Дерево



называется *пальмой*, если оно является объединением цепей, имеющих общую концевую вершину, причём все эти цепи, за исключением, быть может, одной, имеют длину 1. Пальма является частным случаем *сверхстройного (звездообразного) дерева* (дерево, в котором в точности одна вершина имеет степень больше 2). В настоящей работе пальмы изучаются с точки зрения динамического подхода к отказоустойчивости графовых систем.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Под *конечной динамической системой* понимается пара (S, δ) , где S — конечное непустое множество, элементы которого называются *состояниями системы*, $\delta: S \rightarrow S$ — отображение множества состояний в себя, называемое *эволюционной функцией системы*. Таким образом, каждой конечной динамической системе сопоставляется карта, представляющая собой орграф с множеством вершин S и дугами, проведенными из каждой вершины $s \in S$ в вершину $\delta(s)$. Компоненты связности графа, задающего динамическую систему, называются её *бассейнами*. Получается, что каждый бассейн представляет собой контур с входящими в него деревьями. Контур, в свою очередь, называется предельными циклами, или *аттракторами*.

Основными проблемами теории конечных динамических систем являются задачи отыскания эволюционных параметров без проведения динамики. К их числу относятся *индекс* состояния (его расстояние до аттрактора того бассейна, которому оно принадлежит) и *глубина бассейна* (наибольший из индексов состояний). Автором составлены программы для ЭВМ, позволяющие вычислять различные параметры динамических систем двоичных векторов, ассоциированных с некоторыми типами графов, в частности [6]. Автором предложены алгоритмы вычисления индексов состояний в конечных динамических системах двоичных векторов, ассоциированных с ориентациями таких типов графов, как цепи [7] и циклы [8].

В данной работе предлагается алгоритм вычисления индексов состояний в конечных динамических системах двоичных векторов, ассоциированных с ориентациями пальм, находится глубина бассейна системы заданной размерности.

2. ОПИСАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Пусть пальма p образована объединением цепей p_0, p_1, \dots, p_c , имеющих общую концевую вершину. Будем считать, что p_0 имеет среди этих цепей максимальную длину $s > 0$. Назовём p_0 *стволом пальмы* p , а цепи p_1, p_2, \dots, p_c , имеющие длину 1, — её *листьями*, а их совокупность — *кроной*. Будем говорить, что p является пальмой типа (s, c) . Пальма с точностью до изоморфизма определяется своим типом. При $c = 1$ пальма вырождается в цепь (см., например, [5–7]), поэтому далее не будем рассматривать этот случай, считая $c > 1$.

Пусть имеется пальма p типа (s, c) , $s + c = n$. Зафиксируем расположение её цепей и перенумеруем рёбра пальмы p , начиная от корня (начальной вершины ствола), двигаясь к кроне (рёбра с номерами от 1 по s), а далее — рёбра кроны слева направо (рёбра с номерами от $s + 1$ по $s + c$).

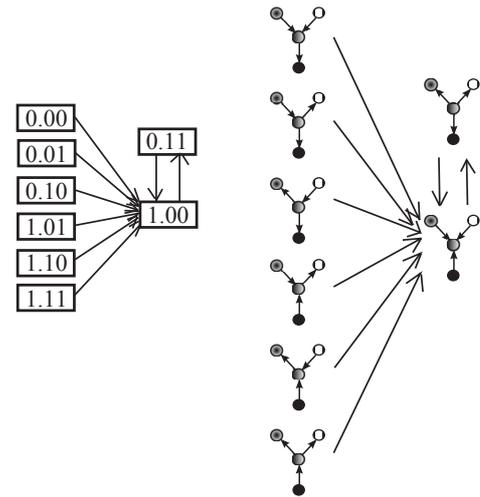
Придадим каждому ребру пальмы произвольную ориентацию и сопоставим полученному ориентированному графу p n -мерный двоичный вектор $v(p)$, полагая его i -ю компоненту равной 1, если i -е ребро пальмы p ориентировано от корня (начальной вершины ствола), и 0 — в противном случае. Теперь можно последовательно выписать получившуюся последовательность из нулей и единиц: $v = v_1 \dots v_s \cdot v_{s+1} \dots v_{s+c}$, где v_i , $0 < i \leq s + c$, принимает значение 0 или 1 в зависимости от ориентации i -го ребра пальмы. Таким образом, каждой ориентации пальмы сопоставляется n -мерный двоичный вектор, причём $n = s + c$. В свою очередь, каждый такой вектор $v = v_1 \dots v_s \cdot v_{s+1} \dots v_{s+c}$ однозначно определяет некоторую ориентацию пальмы $p(v)$ типа (s, c) . Таким образом, между множеством P_{s+c} , $s > 0, c > 1$, всевозможных ориентированных пальм типа (s, c) указанного вида и множеством B^{s+c} , $s > 0, c > 1$, всех двоичных векторов размерности $n = s + c$ указанного вида устанавливается взаимно однозначное соответствие. В дальнейшем ориентации пальмы для простоты также будем называть пальмами, часть $v_1 \dots v_s$ вектора v будем называть *стволом вектора* v , а $v_{s+1} \dots v_{s+c}$ — его *кроной*.

Опишем конечную динамическую систему ориентаций (s, c) -пальмы p на языке двоичных векторов. Пусть $B = \bigcup_{s>0, c>1} B^{s+c}$. Пусть состоянием динамической системы в данный момент времени является вектор $v = v_1 \dots v_s \cdot v_{s+1} \dots v_{s+c} \in B$. Тогда в следующий момент времени она окажется



в состоянии $\gamma(v) = v'$, полученном путем одновременного применения следующих правил: I) если $v_1 = 0$, то $v'_1 = 1$; II) если $v_i = 1$ и $v_{i+1} = 0$ для некоторого $0 < i < s$, то $v'_i = 0$ и $v'_{i+1} = 1$; III) если $v_i = 1$ для некоторого $s < i \leq s + c$, то $v'_i = 0$; IV) если $v_s = 1$ и $v_i = 0$ для всех $s < i \leq s + c$, то $v'_s = 0$ и $v'_i = 1$ для всех $s < i \leq s + c$; V) других отличий между v и $\gamma(v)$ нет. Например, эволюция состояния 011.11 в динамической системе (B^{3+2}, γ) выглядит следующим образом: $011.11 \xrightarrow{1} 111.00 \xrightarrow{2} 110.11 \xrightarrow{3} 101.00 \xrightarrow{\text{аттрактор}} 010.11$. Каждое состояние размерности $n = s + c$ при динамике переходит в состояние также размерности $n = s + c$. Таким образом, система (B, γ) в зависимости от s и c разбивается на конечные подсистемы (B^{s+c}, γ) , $s > 0, c > 1$.

Пусть теперь имеется n -реберная (s, c) -пальма. На языке ориентаций пальм эволюция динамической системы вводится следующим образом: если дана некоторая ориентированная пальма $p \in P_{s+c}$, то её динамическим образом $\gamma(p)$ является пальма, получаемая из p одновременным превращением всех стоков в источники. Напомним, что *стоком* в ориентированном графе называется вершина с нулевой степенью исхода, а *источником* — вершина с нулевой степенью захода. Это частный случай динамики бесконтурных связанных ориентированных графов, введенной в [3]. Преобразования ориентаций пальм в динамической системе (P_{s+c}, γ) , $s > 0, c > 1$, соответствуют эволюционным преобразованиям соотносимых им двоичных векторов в динамической системе (B^{s+c}, γ) , $s > 0, c > 1$, и обратно, а именно $v(\gamma(p)) = \gamma(v(p))$ [9]. Таким образом, конечные динамические системы (B^{s+c}, γ) и (P_{s+c}, γ) , $s > 0, c > 1$, изоморфны. Например, на рисунке изображены карты изоморфных динамических систем (B^{1+2}, γ) и (P_{1+2}, γ) .



Карты конечных динамических систем (B^{1+2}, γ) и (P_{1+2}, γ)

3. ИНДЕКСЫ СОСТОЯНИЙ

Через $p_{st}(v)$ обозначим количество пар совпадающих соседних компонент в стволе вектора v , назовём данную величину *плотностью ствола вектора v* ; по аналогии через $p_{cr}(v)$ обозначим *плотность кроны вектора v* . Под *блоком* будем понимать максимальное по включению множество подряд стоящих нулей (0-блок) или единиц (1-блок) в количестве > 1 . *Длина блока* — число нулей (единиц) в блоке, уменьшенное на 1. Обозначим через $p_{st}^0(v)$ ($p_{cr}^0(v)$), $p_{st}^1(v)$ ($p_{cr}^1(v)$) суммы длин 0- и 1-блоков соответственно в стволе (кроне) вектора v .

Введём необходимые обозначения:

$i(v)$ — индекс состояния v ;

x^k — в состоянии компонента x повторяется $k \geq 0$ раз;

$(x)^k$ — в состоянии совокупность компонент x повторяется $k \geq 0$ раз;

$\{01\}^k$ — произвольный набор из 0 и 1 размерности $k \geq 0$;

$\{0[x]1\}^k$ — произвольный набор из 0 и 1 размерности $k > 0$, содержащий в себе обязательный элемент x ;

p_{st}^0, p_{st}^1 — суммы длин рассматриваемых 0-блоков и 1-блоков соответственно;

$v \rightarrow \gamma(v)$ — один шаг выполнения динамики системы;

f — порядковый номер первой компоненты первого 0-блока в стволе рассматриваемого состояния;

l — порядковый номер последней компоненты последнего 1-блока в стволе рассматриваемого состояния;

УНГ — указатель начала группы;

УРС — указатель рассмотрения состояния.



Алгоритм вычисления индекса состояния системы (B^{s+c}, γ) , $s > 0, c > 1$

Индекс $i(v)$ состояния v системы (B^{s+c}, γ) , $s > 0, c > 1$, вычисляется исходя из вида состояния как вектора по следующему алгоритму. Изначально $i(v) := 0$.

I. Если $p_{st}(v) = 0$, то

1) если v есть одно из следующих состояний: $(01)^{\frac{s-1}{2}} 0.1^c$ или $(10)^{\frac{s-1}{2}} 1.0^c$ при нечётном s , $(01)^{\frac{s}{2}} 0^c$ или $(10)^{\frac{s}{2}} 1^c$ при чётном s , то $i(v) := 0$, конец алгоритма;

2) если v есть $(01)^{\frac{s-1}{2}} 0.\{0[0]1\}^c$ при нечётном s или $(10)^{\frac{s}{2}}.\{0[0]1\}^c$ при чётном s , то $i(v) := 1$, конец алгоритма;

3) если v есть $(10)^{\frac{s-1}{2}} 1.\{0[1]1\}^c$ при нечётном s или $(01)^{\frac{s}{2}}.\{0[1]1\}^c$ при чётном s , то $i(v) := s$, конец алгоритма.

II. Если $v = \{01\}^{l-1} 1^{s-1}.\{0[1]1\}^c$, то $i(v) := s$, конец алгоритма.

III. Если $v = \{01\}^t 10^{1^{s-t-2}}.\{0[1]1\}^c$, $t \geq 0, s - t > 2$, то $i(v) := 1$, $v := \gamma(v)$ и перейти на соответствующий шаг алгоритма IV, VII или VIII с новым v .

IV. Если $p_{st}^0(v) = 0$ и $p_{st}^1(v) > 0$, то $i(v) := i(v) + l - 1$, конец алгоритма.

V. Если $p_{st}^0(v) > 0$ и $p_{st}^1(v) = 0$, то $i(v) := s - f + 1$, конец алгоритма.

VI. Если в стволе состояния v присутствуют 1-блоки, после которых идут 0-блоки, то $i(v) := \max(s - f + 1, l - 1)$, конец алгоритма.

VII. Если в стволе состояния v присутствуют 0-блоки, после которых идут 1-блоки, то

$$i(v) := i(v) + \begin{cases} l - 1, & \text{если } p_{st}^0 < p_{st}^1; \\ \frac{l-f+1}{2} - 1, & \text{если } p_{st}^0 = p_{st}^1; \\ s - f + 1, & \text{если } p_{st}^0 > p_{st}^1. \end{cases}$$

Конец алгоритма.

VIII. Просматривая ствол состояния v слева направо, выполняем следующие действия.

1. УНГ и УРС ставятся в начале вектора. Если в стволе до первого 0-блока есть 1-блоки, то первой группой будет являться отрезок ствола вектора от начальной компоненты до последней компоненты того 1-блока, который стоит перед первым 0-блоком включительно; УНГ и УРС ставятся между последней компонентой того 1-блока, который стоит перед первым 0-блоком, и следующей компонентой.

2. Если ствол состояния уже полностью разбит на группы или если в стволе 1-блоков больше нет, то группа заканчивается на последней компоненте ствола вектора и переходим в пункт 6, иначе $p_{st}^{0'} := 0, p_{st}^{1'} := 0$.

3. $p_{st}^{0'} := p_{st}^{0'} +$ (сумма длин 0-блоков до первого (следующего) 1-блока от УРС); УРС ставится между последним из таких 0-блоков и следующей компонентой.

4. $p_{st}^{1'} := p_{st}^{1'} +$ (сумма длин 1-блоков до первого (следующего) 0-блока от УРС); УРС ставится между последним из таких 1-блоков и следующей компонентой.

5. При $p_{st}^{0'} \leq p_{st}^{1'}$, если в стволе остались ещё 0-блоки после УРС, то группа заканчивается на компоненте, стоящей перед УРС, УНГ ставится туда же, где стоит УРС, и перейти в пункт 2; а если 0-блоков больше нет, то группа заканчивается на последней компоненте ствола состояния и перейти в пункт 6. Если $p_{st}^{0'} > p_{st}^{1'}$ и ещё остались 1-блоки, то перейти в пункт 3, а если 1-блоков больше нет, то группа заканчивается на последней компоненте ствола состояния и перейти в пункт 6.

6. В каждой группе подсчитываем $p_{st}^{0'}$ и $p_{st}^{1'}$, и помечаем группы знаками «-», «=», «+», если в них $p_{st}^{0'} > p_{st}^{1'}$, $p_{st}^{0'} = p_{st}^{1'}$, $p_{st}^{0'} < p_{st}^{1'}$, соответственно. Объединяем рядом стоящие группы с одинаковыми пометками «-» или «+» в одну, при этом если между «+»-группами встречаются «=»-группы, то их также объединяем в «+»-группу. Пусть h — общее количество групп. Считаем групповые индексы i_j , $0 < j \leq h$, согласно следующим правилам:

$$i_j := \begin{cases} s - f_j + 1, & \text{в «-»-группе;} \\ \frac{l_j - f_j + 1}{2} - 1, & \text{в «=»-группе;} \\ l_j - 1, & \text{в «+»-группе.} \end{cases}$$

7. $i(v) := i(v) + \max_{0 < j \leq h} i_j$, конец алгоритма.



Теорема 1. Предложенный алгоритм вычисления индекса состояния конечной динамической системы (B^{s+c}, γ) , $s > 0$, $c > 1$, корректен.

Доказательство. Рассмотрим состояния динамической системы (B^{s+c}, γ) , $n = s + c$, $s > 0$, $c > 1$, в зависимости от наличия и количества 0- и 1-блоков в стволе соответствующего вектора v .

I. Рассмотрим состояния, в стволе которых нет ни 0-, ни 1-блоков, т. е. $p_{st}(v) = 0$.

1) s — нечётное. Тогда имеем:

а) $(01)^{\frac{s-1}{2}} 0.1^c \rightarrow (10)^{\frac{s-1}{2}} 1.0^c$, при этом $(10)^{\frac{s-1}{2}} 1.0^c \rightarrow (01)^{\frac{s-1}{2}} 0.1^c$. Таким образом, данные состояния образуют аттрактор длины 2 [10, теорема 2], что означает, что $i((01)^{\frac{s-1}{2}} 0.1^c) = i((10)^{\frac{s-1}{2}} 1.0^c) = 0$. Для дальнейшего доказательства заметим, что предшественников состояния $(01)^{\frac{s-1}{2}} 0.1^c$ согласно [11, следствие 2] в самом общем случае можно записать как $\{01\}^{s-1} 1.\{01\}^c$.

б) $(01)^{\frac{s-1}{2}} 0.\{0[0]1\}^c \rightarrow (10)^{\frac{s-1}{2}} 1.0^c$, т. е. приходит в состояние из пункта I (1, а), которое принадлежит аттрактору. Таким образом, $i((01)^{\frac{s-1}{2}} 0.\{0[0]1\}^c) = 1$. Для дальнейшего доказательства заметим, что предшественников данного состояния согласно [11, следствие 2] в самом общем случае можно записать как $\{01\}^{s-2} 00.\{01\}^c$.

в) $(10)^{\frac{s-1}{2}} 1.\{0[1]1\}^c \xrightarrow{1} (01)^{\frac{s-1}{2}} 1.0^c \xrightarrow{2} (10)^{\frac{s-3}{2}} 110.1^c \xrightarrow{3} \dots \xrightarrow{s-2} 011(01)^{\frac{s-3}{2}} .0^c \xrightarrow{s-1} 110(10)^{\frac{s-3}{2}} .1^c \xrightarrow{s} (10)^{\frac{s-1}{2}} 1.0^c$, т. е. в итоге приходит в состояние из пункта I (1, а), которое принадлежит аттрактору. Таким образом, $i((10)^{\frac{s-1}{2}} 1.\{0[1]1\}^c) = s$. Для дальнейшего доказательства заметим, что согласно [10, следствие 1] данное состояние является недостижимым.

2) s — чётное. Тогда имеем:

а) $(01)^{\frac{s}{2}} .0^c \rightarrow (10)^{\frac{s}{2}} .1^c$, при этом $(10)^{\frac{s}{2}} .1^c \rightarrow (01)^{\frac{s}{2}} .0^c$. Таким образом, данные состояния образуют аттрактор длины 2 [10, теорема 2], что означает, что $i((01)^{\frac{s}{2}} .0^c) = i((10)^{\frac{s}{2}} .1^c) = 0$. Для дальнейшего доказательства заметим, что предшественников состояния $(10)^{\frac{s}{2}} .1^c$ согласно [11, следствие 2] в самом общем случае можно записать как $\{01\}^{s-1} 1.\{01\}^c$.

б) $(01)^{\frac{s}{2}} .\{0[1]1\}^c \xrightarrow{1} 1(01)^{\frac{s-2}{2}} 1.0^c \xrightarrow{2} (01)^{\frac{s-2}{2}} 10.1^c \xrightarrow{3} \dots \xrightarrow{s-2} 01(10)^{\frac{s-2}{2}} .1^c \xrightarrow{s-1} 11(01)^{\frac{s-2}{2}} .0^c \xrightarrow{s} (10)^{\frac{s}{2}} .1^c$, т. е. в итоге приходит в состояние из пункта I (2, а), которое принадлежит аттрактору. Таким образом, $i((01)^{\frac{s}{2}} .\{0[1]1\}^c) = s$. Для дальнейшего доказательства заметим, что согласно [10, следствие 1] данное состояние является недостижимым.

в) $(10)^{\frac{s}{2}} .\{0[0]1\}^c \rightarrow (01)^{\frac{s}{2}} .0^c$, т. е. приходит в состояние из пункта I (2, а), которое принадлежит аттрактору. Таким образом, $i((10)^{\frac{s}{2}} .\{0[0]1\}^c) = 1$. Для дальнейшего доказательства заметим, что предшественников данного состояния согласно [11, следствие 2] в самом общем случае можно записать как $\{01\}^{s-2} 00.\{01\}^c$.

Получаем, что пункт I предложенного алгоритма является корректным.

Теперь рассмотрим состояния, в стволе которых присутствуют 0- или 1-блоки. Исключим пока из рассмотрения состояния вида $\{01\}^{s-1} 1.\{0[1]1\}^c$ и $\{01\}^t 101^{s-t-2} .\{0[1]1\}^c$, где $s > 1$, $t \geq 0$, $s - t > 2$, $p_{st} > 0$, и рассмотрим их в самом конце доказательства (пункт VII). Согласно [10, следствие 1] данные состояния являются недостижимыми, значит, не могут получиться из какого-либо другого состояния в процессе эволюции, поэтому данное ограничение не повлияет на дальнейшее рассмотрение пунктов II–VI. Заметим, что в предложенном алгоритме данные состояния рассматриваются на шаге II и III соответственно, что означает, что на шагах IV–VIII алгоритма они также исключаются.

II. Рассмотрим состояния, в стволе которых нет 0-блоков и есть хотя бы один 1-блок, т. е. $p_{st}^0(v) = 0$, $p_{st}^1(v) > 0$.

1) $p_{st}^1(v) = s - 1$.

Тогда эволюция состояния будет выглядеть следующим образом:

$$1^s .0^c \xrightarrow{1} 1^{s-1} 0.1^c \xrightarrow{2} 1^{s-2} 01.0^c \xrightarrow{3} \dots$$

а) s — нечётное: $\dots \xrightarrow{s-2} 11(01)^{\frac{s-3}{2}} 0.1^c \xrightarrow{s-1} (10)^{\frac{s-1}{2}} 1.0^c$, т. е. в итоге приходит в состояние из пункта I (1, а), которое принадлежит аттрактору.

б) s — чётное: $\dots \xrightarrow{s-2} 11(01)^{\frac{s-2}{2}} .0^c \xrightarrow{s-1} (10)^{\frac{s}{2}} .1^c$, т. е. в итоге приходит в состояние из пункта I (2, а), которое принадлежит аттрактору.

Таким образом, для данного состояния $i(v) = s - 1$; заметим, что в данном случае $l = s$.

Заметим, что длина 1-блока в стволе на каждом очередном шаге уменьшается на единицу за счёт поглощения самой левой компоненты и за ним следуют чередующиеся нули и единицы (самая левая



компонента 1-блока на каждом очередном шаге переходит в ноль по правилу II или IV, тем самым длина блока уменьшается на единицу), что продолжается до тех пор, пока все его компоненты кроме последней не поглотятся. Тем самым состояние в итоге приходит в состояние, в стволе которого нет ни 0-, ни 1-блоков, т. е. в состояние из пункта I.

$$2) p_{st}^1(v) < s - 1.$$

При эволюции в стволе каждый 1-блок на каждом очередном шаге смещается влево на одну компоненту (с каждым очередным шагом эволюции ноль, стоящий перед 1-блоком, переходит в единицу по правилу I или II, а последняя единица 1-блока переходит в ноль по правилу II или IV, тем самым длина 1-блока сохраняется), пока не встаёт в начало состояния, затем длина 1-блока на каждом очередном шаге уменьшается на единицу за счёт поглощения самой левой компоненты и за ним следуют чередующиеся нули и единицы, что продолжается до тех пор, пока все его компоненты кроме последней не поглотятся (см. пункт II (1)). Таким образом, в данном случае последними поглотятся все компоненты кроме последней самого правого 1-блока, т. е. такое состояние в итоге приходит в состояние, в стволе которого нет ни 0-, ни 1-блоков, т. е. в состояние из пункта I, причём в состояние $(10)^{\frac{s-1}{2}} \cdot 1 \cdot 0^c$ при нечётном s или в состояние $(10)^{\frac{s}{2}} \cdot 1 \cdot 0^c$ при чётном s , которые принадлежат аттрактору. Таким образом, для данного состояния $i(v) = l - 1$.

Таким образом, заключаем, что пункт IV предложенного алгоритма корректен.

III. Рассмотрим состояния, в стволе которых нет 1-блоков и есть хотя бы один 0-блок, т. е. $p_{st}^0(v) > 0, p_{st}^1(v) = 0$.

$$1) p_{st}^0(v) = s - 1.$$

Тогда эволюция состояния будет выглядеть следующим образом:

$$0^s \cdot \{01\}^c \xrightarrow{1} 10^{s-1} \cdot 0^c \xrightarrow{2} 010^{s-2} \cdot 0^c \xrightarrow{3} \dots$$

а) s — нечётное: $\dots \xrightarrow{s-2} (10)^{\frac{s-1}{2}} \cdot 0 \cdot 0^c \xrightarrow{s-1} (01)^{\frac{s-1}{2}} \cdot 0 \cdot 0^c$, т. е. приходит в состояние из пункта I (1, б).

б) s — чётное: $\dots \xrightarrow{s-2} (01)^{\frac{s-2}{2}} \cdot 00 \cdot 0^c \xrightarrow{s-1} (10)^{\frac{s}{2}} \cdot 0 \cdot 0^c$, т. е. приходит в состояние из пункта I (2, в).

Таким образом, для данного состояния $i(v) = s$; заметим, что в данном случае $f = 1$.

Заметим, что в стволе длина 0-блока на каждом очередном шаге эволюции уменьшается на единицу за счёт поглощения самой правой компоненты и перед ним идут чередующиеся нули и единицы (на каждом очередном шаге эволюции самая первая компонента 0-блока переходит в единицу по правилу I или II, тем самым длина 0-блока уменьшается на единицу), что продолжается до тех пор, пока все его компоненты кроме первой не поглотятся. Тем самым состояние в итоге приходит в состояние, в стволе которого нет ни 0-, ни 1-блоков, т. е. в состояние из пункта I.

$$2) p_{st}^0(v) < s - 1.$$

При эволюции в стволе каждый 0-блок на каждом очередном шаге смещается вправо на одну компоненту (с каждым очередным шагом эволюции первый ноль 0-блока переходит в единицу по правилу I или II, единица, стоящая после 0-блока переходит в ноль по правилу II или IV, тем самым длина 0-блока сохраняется), пока не встаёт в конец ствола состояния, затем длина 0-блока на каждом очередном шаге уменьшается на единицу за счёт поглощения самой правой компоненты, и перед ним идут чередующиеся нули и единицы, что продолжается до тех пор, пока все его компоненты не поглотятся (см. пункт III (1)). Таким образом, в данном случае последними поглотятся все компоненты, кроме первой самого левого 0-блока, т. е. такое состояние в итоге приходит в состояние, в стволе которого нет ни 0-, ни 1-блоков, т. е. в состояние из пункта I, причём в состояние из I (1, б) при нечётном s или в состояние I (2, в) при чётном s . Таким образом, для данного состояния $i(v) = s - f + 1$.

Таким образом, заключаем, что пункт V предложенного алгоритма корректен.

IV. Ствол вектора содержит в себе 1-блоки, после которых идут 0-блоки.

Из предыдущих пунктов имеем, что в данном случае на каждом шаге эволюции одновременно 0- и 1-блоки начнут движение вправо и влево соответственно, пока не достигнут своих концов ствола вектора и не начнут поглощаться, в результате чего останется вектор, не содержащий в своём стволе ни 0-, ни 1-блоков, т. е. данное состояние на очередном шаге эволюции приходит в состояние из пункта I. При этом самым последним поглотится тот блок (кроме одной компоненты), который будет стоять дальше от соответствующего края, поэтому согласно пунктам II и III доказательства имеем,



что если $l-1 < s-f+1$ (т. е. последним поглотится 0-блок), то для данного состояния $i(v) = s-f+1$, иначе (т. е. последним поглотится 1-блок или 0- и 1-блоки поглотятся одновременно) $i(v) = l-1$. Таким образом, заключаем, что пункт VI предложенного алгоритма корректен.

V. В стволе вектора присутствуют 0-блоки, после которых идут 1-блоки.

В стволе таких состояний на каждом шаге эволюции 0-блоки начинают двигаться вправо, 1-блоки — влево за счет поглощения компонент, стоящих между блоками (первая компонента 0-блока при эволюции заменится на единицу по правилу I или IV, единица, следующая за 0-блоком, при эволюции заменится на ноль по правилу II, таким образом, длина 0-блока сохранится, аналогичное происходит и с 1-блоком); когда они оказываются стоящими рядом, то блоки начинают уменьшаться на единицу каждый за счет поглощения компонент друг друга (у 0-блока первая компонента перейдет в единицу по правилу эволюции I или II, а у 1-блока последняя компонента перейдет в 0 по правилу эволюции II или IV, тем самым длины 0- и 1-блоков уменьшаются на единицу), пока один из блоков полностью не поглотится, после чего опять продолжают сдвиги блоков навстречу друг другу.

1. Если у исходного состояния $p_{st}^0(v) < p_{st}^1(v)$, то самым последним из 0-блоков поглотится самый левый 0-блок (кроме его первой компоненты), в результате чего в состоянии останутся только 1-блоки и чередующиеся 0 и 1, дальнейшая эволюция которого описана в пункте II доказательства. Таким образом, получается, что в процессе эволюции для подсчета индекса состояния имеет значение только последний (правый) 1-блок в стволе, а точнее порядковый номер его последней компоненты, так как при эволюции его последняя компонента просто смещается влево на каждом шаге эволюции, пока из всего этого 1-блока не останется она одна, что означает, что $i(v) = l-1$.

2. Если у исходного состояния $p_{st}^0(v) = p_{st}^1(v)$, то в процессе эволюции левый 0-блок и правый 1-блок поглотятся последними и одновременно (от них останется по одной компоненте), причем это уже будет вектор, ствол которого не содержит ни 0-, ни 1-блоков, эволюция которого описана в пункте I, причём это будет состояние из пункта I (1, а) при нечётном s или состояние из пункта I (2, а) при чётном s , которое принадлежит аттрактору. Таким образом, для данного состояния $i(v) = \frac{l-f+1}{2} - 1$ (чётность количества компонент от первой компоненты первого 0-блока до последней компоненты последнего 1-блока, т. е. числа $l-f+1$, показана в [7]).

3. Если у исходного состояния $p_{st}^0(v) > p_{st}^1(v)$, то здесь ситуация будет аналогична пункту V (1), только в состоянии в итоге остаются одни 0-блоки и чередующиеся 0 и 1, дальнейшая эволюция которого описана в пункте III доказательства, т. е. $i(v) = s-f+1$.

Таким образом, получаем, что пункт VII предложенного алгоритма является корректным.

VI. Ствол вектора содержит в своём составе 0-блоки и 1-блоки в произвольном порядке, отличном от предыдущих пунктов IV–V.

Из рассуждений предыдущих пунктов получаем, что при эволюции такого состояния в его стволе 0-блоки будут сдвигаться вправо, при этом если они будут встречаться с 1-блоками, то длина этого 0-блока будет уменьшаться с очередным шагом эволюции, т. е. если есть подряд стоящие 0-блоки, то они или все поглотятся, если следующие за ними подряд стоящие 1-блоки в сумме имеют равную или большую длину, или поглотят сами следующие за ними подряд стоящие 1-блоки, и продолжат сдвиг вправо, встречая очередные 1-блоки, если сумма длин 0-блоков будет больше суммы длин 1-блоков. В итоге получим состояние, имеющее только 0-блоки, только 1-блоки или состояние, не имеющее ни 0-, ни 1-блоков, чья эволюция описана в пунктах I–III. С точки зрения 1-блоков ситуация получается аналогичная, но так как на очередном шаге эволюции движение 0- и 1-блоков в стволе происходит одновременно, то, не теряя общности, будем рассматривать этот случай с точки зрения движения 0-блоков, т. е. ситуаций, когда 0-блоки будут полностью поглощаться 1-блоками, что возможно, когда суммы длин 1-блоков больше или равны сумме длин 0-блоков, или 0-блоки поглотят 1-блоки, что возможно, когда суммы длин 1-блоков меньше суммы длин 0-блоков. В пункте VIII (1–5) предложенного алгоритма как раз описывается процедура деления ствола состояния на группы, в которых суммы длин 0-блоков или меньше сумм длин 1-блоков, или равны, или больше (в этом случае это может быть только крайняя справа группа). В итоге получаем вектор, ствол которого разделён на группы, причём в результате возможного объединения, описанного в пункте VIII (6) алгоритма, слева будет «+»-группа, справа «-»-группа, а между ними могут быть ещё «=»-группы. Так как при эволюции эти группы (блоки) начинают своё движение одновременно, то индекс будет равен максимальному из групповых индексов, а это описано в пункте VIII (6, 7) предложенного алгоритма. Получаем, что VIII пункт предложенного алгоритма является корректным.



VII. Теперь рассмотрим состояния вида $\{01\}^1 1^{s-1} \cdot \{0[1]1\}^c$ и $\{01\}^t 101^{s-t-2} \cdot \{0[1]1\}^c$, где $s > 1$, $t \geq 0$, $s - t > 2$, $p_{st} > 0$.

1) $\{01\}^1 1^{s-1} \cdot \{0[1]1\}^c \rightarrow 1^s \cdot 0^c$, т.е. данное состояние при эволюции переходит в состояние из пункта II (1), таким образом $i(\{01\}^1 1^{s-1} \cdot \{0[1]1\}^c) = s$, что означает, что пункт II предложенного алгоритма является корректным.

2) $\{01\}^t 101^{s-t-2} \cdot \{0[1]1\}^c \rightarrow \{01\}^t 01^{s-t-1} \cdot 0^c$, таким образом, далее нужно рассматривать соответствующее получившееся состояние, эволюция которого описана в пункте II, V или VI. Получаем, что индекс состояния будет равен величине, полученной согласно соответствующему пункту, увеличенной на 1, т.е. пункт III предложенного алгоритма является корректным.

Таким образом, рассмотрев все возможные ситуации, заключаем, что предложенный алгоритм вычисления индекса состояния системы (B^{s+c}, γ) , $s > 0$, $c > 1$, является корректным. \square

Сложность алгоритма равна $O(n)$, где $n = s + c$.

Пример 1. Вычислим индекс состояния $v = 11101000101101100010101.010$ системы (B^{23+3}, γ) . $i(v) := 0$. Сначала выполняется III шаг алгоритма:

III. $i(v) := 1$, $v := \gamma(v) = 11010100011011010001011.000$ и переход на VIII шаг алгоритма.

VIII. Сначала получаем деление ствола состояния на группы (в результате выполнения переходов $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6$): $[11][010100011011][010001011].000$. Подсчитываем групповые индексы: $i_1 = l_1 - 1 = 2 - 1 = 1$ («+»-группа); $i_2 = \frac{l_2 - f_2 + 1}{2} - 1 = \frac{14 - 7 + 1}{2} - 1 = 3$ («-»-группа); $i_3 = s - f_3 + 1 = 23 - 17 + 1 = 7$ («-»-группа). Таким образом, $i(v) := i(v) + \max_{0 < j \leq 3} i_j = 1 + 7 = 8$.

Эволюция состояния:

$$\begin{aligned} & 11101000101101100010101.010 \xrightarrow{1} 11010100011011010001011.000 \xrightarrow{2} \\ & 10101010010110101000110.111 \xrightarrow{3} 01010101001101010100101.000 \xrightarrow{4} \\ & 101010101010101010010.111 \xrightarrow{5} 0101010101010101001.000 \xrightarrow{6} \\ & 101010101010101010100.111 \xrightarrow{7} 0101010101010101010.000 \xrightarrow{8} \\ & 101010101010101010101.000 \text{ (аттрактор), т.е. } i(v) = 8. \end{aligned}$$

Пример 2. Вычислим индекс состояния $v = 1^{50} \cdot (01)^{25}$ системы (B^{50+50}, γ) . $i(v) := 0$. Выполняется II шаг алгоритма, т.е. $i(v) := s = 50$.

Одним из параметров конечной динамической системы является наибольший из индексов состояний. В случае конечной динамической системы (B^{s+c}, γ) , которая имеет единственный бассейн при любых $s > 0$ и $c > 1$ [10, теорема 2], речь идет о глубине бассейна.

Теорема 2. Конечная динамическая система (B^{s+c}, γ) , $s > 0$, $c > 1$, имеет глубину бассейна, равную s .

Доказательство. Рассмотрим формулы вычисления индекса состояния в каждом пункте предложенного алгоритма при непосредственном выполнении каждого из них.

I, II, V–VIII. Максимальное значение индекса равно s .

III. Максимальное значение индекса будет равно s , так как максимальное значение индекса при переходе в пункты IV (при $l = s$), VII (при $l = s$, $f = 2$) и VIII (при $l = s$, $f = 2$) будет равно $s - 1$.

IV. Максимальное значение индекса равно $s - 1$ при $l = s$.

Таким образом, глубина бассейна системы (B^{s+c}, γ) , $s > 0$, $c > 1$, равна s . \square

Библиографический список

1. Абрисимов М. Б. Графовые модели отказоустойчивости. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2012. 192 с.
2. Курносова С. Г. Т-неприводимые расширения для некоторых классов графов // Теоретические проблемы информатики и ее приложений : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2004. Вып. 6. С. 113–125.
3. Barbosa V. C. An atlas of edge-reversal dynamics. Boca Raton : Chapman&Hall/CRC, 2001. 385 p.
4. Colon-Reyes O., Laubenbacher R., Pareigis B. Boolean monomial dynamical systems // Annals of Combinatorics. 2004. Vol. 8. P. 425–439. DOI: 10.1007/s00026-004-0230-6.



5. Салий В. Н. Об одном классе конечных динамических систем // Вестн. Том. гос. ун-та. Приложение. 2005. № 14. С. 23–26.
6. Исследование эволюционных параметров в динамических системах двоичных векторов : свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2009614409, Рос. Федерация / Власова А. В.; выданное Роспатентом. Зарегистрировано 20.08.2009, Реестр программ для ЭВМ.
7. Власова А. В. Индексы в динамической системе (B, δ) двоичных векторов // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2011. Т. 11, вып. 3, ч. 1. С. 116–122.
8. Жаркова А. В. Индексы в динамической системе двоичных векторов, ассоциированных с ориентациями циклов // Прикладная дискретная математика. 2012. № 2 (16). С. 79–85.
9. Власова А. В. Динамические системы, определяемые пальмами // Компьютерные науки и информационные технологии : материалы междунар. науч. конф. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2009. С. 57–60.
10. Жаркова А. В. Аттракторы в конечных динамических системах двоичных векторов, ассоциированных с ориентациями пальм // Прикладная дискретная математика. 2014. № 3 (25). С. 58–67.
11. Жаркова А. В. О ветвлении и непосредственных предшественниках состояний в конечной динамической системе всех возможных ориентаций графа // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2013. № 6. С. 76–78.

Образец для цитирования:

Жаркова А. В. Индексы состояний в динамической системе двоичных векторов, ассоциированных с ориентациями пальм // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 4. С. 475–484. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-475-484.

Indices of States in Dynamical System of Binary Vectors Associated with Palms Orientations

A. V. Zharkova

Anastasiia V. Zharkova, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., 410012, Saratov, Russia, ZharkovaAV3@gmail.com

Dynamical system of binary vectors associated with palms orientations is considered. A tree is called a palm with $s + c$ edges if it is a union of $c + 1$ paths with common end vertex and all of these paths except perhaps one (with s edges) have a length 1. The system splits into finite subsystems according to the dimension of states. States of a finite dynamical system (B^{s+c}, γ) are all possible orientations of a given palm with $s + c$ edges. They are naturally encoded by binary vectors and the evolutionary function γ transforms a given palm orientation by reversing all arcs that enter sinks and there is no other difference between the given state and the next one. An algorithm to calculate indices of states in this dynamical system is proposed and it is proved that the depth of the basin of the finite dynamical system (B^{s+c}, γ) , $s > 0, c > 1$, is equal to s .

Key words: binary vector, depth, finite dynamical system, index, palm, starlike tree.

References

1. Abrosimov M. B. *Grafovye modeli otkazoustojchivosti* [Graph models of fault tolerance]. Saratov, Saratov Univ. Press, 2012, 192 p. (in Russian).
2. Kurnosova S. G. T-irreducible extensions for some classes of graphs. *Teoreticheskie problemy informatiki i ee prilozhenii : sb. nauch. tr.* [Theoretical Problems of computer science and its applications : collection of scientific works]. Saratov, Saratov Univ. Press, 2004, vol. 6, pp. 113–125 (in Russian).
3. Barbosa V. C. *An atlas of edge-reversal dynamics*. Boca Raton, Chapman&Hall/CRC, 2001. 385 p.
4. Colon-Reyes O., Laubenbacher R., Pareigis B. Boolean monomial dynamical systems. *Ann. Combinatorics*, 2004, vol. 8, pp. 425–439. DOI: 10.1007/s00026-004-0230-6.
5. Salii V. N. A class of finite dynamical systems. *Tomsk State University Journal. Supplement*, 2005, no. 14, pp. 23–26 (in Russian).
6. *Issledovanie jevoljucionnyh parametrov v dinamicheskikh sistemah dvoichnyh vektorov* [The investigation of evolutionary parameters in dynamical systems of binary vectors] : Certificate of state registration for comput. programs № 2009614409 / Vlasova A. V.; issued by Rospatent. Registered in August 20, 2009 (in Russian).
7. Vlasova A. V. Indices in dynamical system (B, δ) of binary vectors. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2011, vol. 11, iss. 3, pt. 1, pp. 116–122 (in Russian).
8. Zharkova A. V. Indices in dynamic system of binary vectors associated with cycles orientations. *Appl. Discrete Math.*, 2012, no. 2 (16), pp. 79–85 (in Russian).



9. Vlasova A. V. Dynamical systems defined by palm trees. *Komp'yuternye nauki i informacionnye tehnologii : Materialy Mezhdunar. nauch. konf.* [Computer Science and Information Technology : Proc. Intern. Sci. Conf.]. Saratov, Sararov Univ. Press, 2009, pp. 57–60 (in Russian).
10. Zharkova A. V. Attractors in finite dynamic systems of binary vectors associated with palms orientations. *Appl. Discrete Math.*, 2014, no. 3 (25). pp. 58–67 (in Russian).
11. Zharkova A. V. On branching and immediate predecessors of the states in finite dynamic system of all possible orientations of a graph. *Appl. Discrete Math. Supplement*, 2013, no. 6, pp. 76–78 (in Russian).

Please cite this article in press as:

Zharkova A. V. Indices of States in Dynamical System of Binary Vectors Associated with Palms Orientations. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 4, pp. 475–484 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-475-484.

ХРОНИКА НАУЧНОЙ ЖИЗНИ

18-Я МЕЖДУНАРОДНАЯ САРАТОВСКАЯ ЗИМНЯЯ ШКОЛА «СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ»

18-я международная Саратовская зимняя школа «Современные проблемы теории функций и их приложения» традиционно проходила в Саратове с 27 января по 3 февраля 2016 года. Организаторами школы выступили Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова и Математический институт имени В. А. Стеклова РАН. Финансовую поддержку школе оказал Российский фонд фундаментальных исследований (проект № 16-31-10001 мол_г).

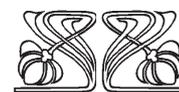
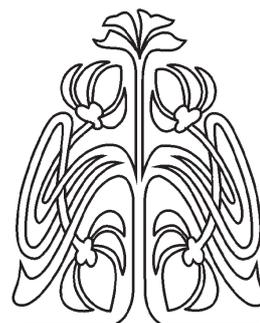
В рамках конференции были представлены новые научные результаты в области действительного и комплексного анализа, ортогональных полиномов и рядов, спектральной теории операторов, теории дифференциальных уравнений, функционального анализа и других разделах математических знаний, а также их приложений.

В конференции приняли участие более 150 ученых из Волгограда, Вологды, Воронежа, Горячего Ключа, Долгопрудного, Екатеринбурга, Ижевска, Казани, Липецка, Махачкалы, Москвы, Новосибирска, Озерска, Петрозаводска, Ростова-на-Дону, Самары, Санкт-Петербурга, Саратова. Самыми многочисленными были делегации из Саратова (46 чел.), Москвы (32 чел.), Екатеринбурга (7 чел.) и Волгограда (5 чел.). В число участников входили один академик РАН, один чл.-корр. РАН, 32 доктора и 40 кандидатов физ.-мат. наук.

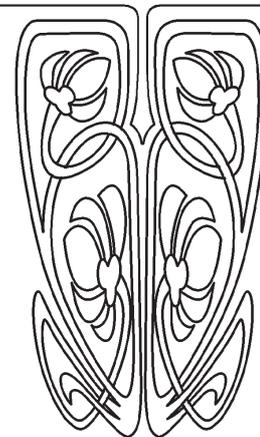
Необходимо отметить, что благодаря финансовой поддержке РФФИ в школе смогли принять участие большое количество иногородних (66 чел.), а также молодых ученых, аспирантов и студентов (57 чел.).

К началу работы конференции был издан сборник материалов (Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 18-й междунар. Саратовской зимней школы. Саратов: Научная книга, 2016. 360 с. ISBN 978-5-9758-1623-8). В сборнике опубликовано 148 статей.

Оргкомитет конференции возглавил доктор физ.-мат. наук, профессор, академик РАН Б. С. Кашин, в состав оргкомитета вошли также Б. И. Голубов (зам. председателя), Л. Ю. Коссович (зам. председателя), А. Н. Чумаченко (зам. председателя), А. П. Хромов (зам. председателя), А. В. Абанин, А. Д. Баев, академик РАН В. И. Бердышев, Е. П. Долженко, С. И. Дудов, М. И. Дьяченко, чл.-корр. РАН С. В. Конягин, В. Г. Кротов, А. Г. Лосев, С. Р. Насыров, А. М. Олевский, Е. С. Половинкин, Д. В. Прохоров, А. М. Седлецкий, М. А. Скопина, чл.-корр. РАН Ю. Н. Субботин, С. П. Сидоров (секретарь).



ПРИЛОЖЕНИЯ





Программный комитет конференции возглавил доктор физ.-мат. наук, профессор А. П. Хромов; в состав программного комитета вошли также академик РАН Б. С. Кашин, чл.-корр. РАН В. Н. Дубинин, чл.-корр. РАН С. В. Конягин, чл.-корр. РАН Ю. Н. Субботин, профессора В. В. Арестов, С. В. Асташкин, Б. И. Голубов, А. Л. Лукашов, С. И. Дудов, В. Г. Кротов, С. Ф. Лукомский, С. Р. Насыров, С. Я. Новиков, С. С. Платонов, Е. С. Половинкин, Д. В. Прохоров, В. В. Старков, П. А. Терехин, Н. И. Черных, С. С. Волосивец, С. П. Сидоров, В. А. Халова (секретарь).

18-я международная Саратовская зимняя школа проходила в формате школы, т.е. помимо участия молодых ученых в ее работе принимали участие также и состоявшиеся исследователи, которые представляли свои результаты на пленарных и секционных выступлениях. Подобный формат проведения конференции способствовал интенсивной передаче научного опыта молодому поколению, более активному вовлечению молодых исследователей в актуальное пространство современной науки.

Было прочитано 16 лекций, сделано более 90 докладов и выступлений по следующим направлениям: ортогональные системы и ряды, тригонометрические ряды, системы функций, порожденные сдвигами, базисы в различных пространствах, вопросы конструктивной теории функций, однолистные функции, квазиконформные отображения, граничные свойства аналитических функций, спектральная теория операторов, приложения к дифференциальным уравнениям в частных производных, численные методы анализа, гармонический и вейвлет-анализ, оптимизация и негладкий анализ. Все приведенные направления являются актуальными и представляют научный и практический интерес. Оргкомитет и программный комитет школы рекомендовали авторам лучших докладов опубликовать свои результаты в журнале «Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика».

На утренних заседаниях для участников конференции ведущими учеными были прочитаны лекции, в которых были представлены решения важных научных проблем действительного и комплексного анализа, теории приближений, спектральной теории операторов, оптимизации, негладкого анализа, гармонического и вейвлет-анализа. Результаты, представленные участниками школы, внесли новый вклад в актуальные направления науки. Для целостного представления о современном состоянии и существующих приложениях теории функций и возможных путях ее дальнейшего развития были прочитаны следующие лекции:

Метод Фурье для волнового уравнения (д-р физ.-мат. наук А. П. Хромов, Саратов);

Об устойчивом восстановлении функций по ее коэффициентам Фурье (чл.-корр. РАН С. В. Конягин, Москва);

Chaining Колмогорова (академик РАН Б. С. Кашин, Москва);

Приближение суммами сдвигов одной функции (д-р физ.-мат. наук П. А. Бородин, Москва);

Дифференциальные операторы с сингулярными коэффициентами (д-р физ.-мат. наук А. А. Шкаликов, Москва);

Обратные спектральные задачи для дифференциальных операторов (д-р физ.-мат. наук В. А. Юрко, Саратов);

Определяющие множества в пространстве голоморфных в шаре функций полиномиального роста (д-р физ.-мат. наук А. В. Абанин, Ростов-на-Дону);

Оператор обобщенного сдвига, порожденный весом Якоби, и неравенство Никольского для алгебраических многочленов на отрезке (д-р физ.-мат. наук В. В. Арестов, канд. физ.-мат. наук М. В. Дейкалова, Екатеринбург);

О сходимости орторекурсивных разложений (д-р физ.-мат. наук Т. П. Лукашенко, академик РАН В. А. Садовничий, канд. физ.-мат. наук В. В. Галатенко, Москва);

Случайно безусловные базисы в функциональных пространствах (д-р физ.-мат. наук С. В. Асташкин, Самара);

Спектральный анализ интегродифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве (д-р физ.-мат. наук В. В. Власов, Москва);

Обобщенные разделенные разности и униформизация комплексных торов (д-р физ.-мат. наук С. Р. Насыров, Казань);

Дифференциальные включения с неограниченной правой частью и необходимые условия оптимальности (д-р физ.-мат. наук Е. С. Половинкин, Москва);



Пространства Липшица на бесконечномерном торе (д-р физ.-мат. наук С. С. Платонов, Петрозаводск);

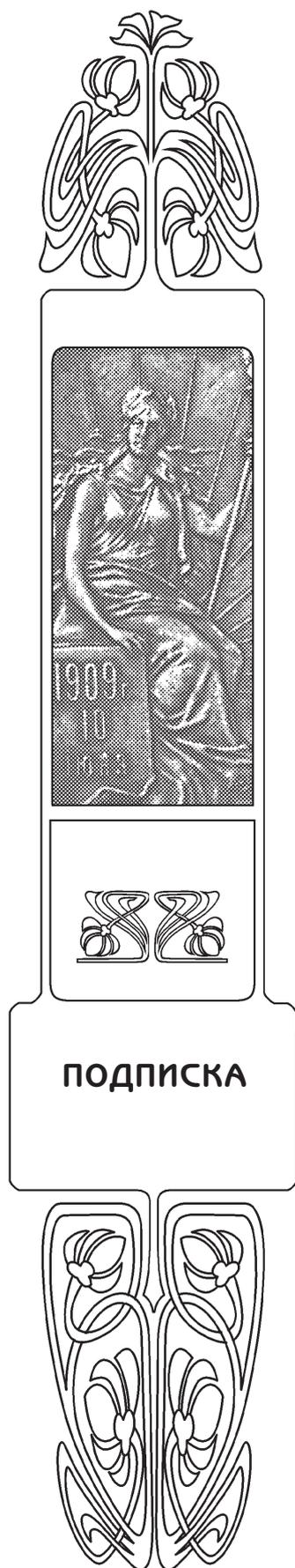
Спектральная теория линейных обратных задач для эволюционных уравнений (д-р физ.-мат. наук И. В. Тихонов, Москва);

Фреймы Парсеваля в анализе Уолша (д-р физ.-мат. наук Ю. А. Фарков, Москва).

Несомненно, тематика и проблематика исследований по научным направлениям, представленным на школе, являются актуальными и представляют широкий научный и практический интерес. Отметим также, что более половины лекций, докладов и сообщений, представленных на конференции, выполнены при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

Следующую школу планируется провести в январе–феврале 2018 года в окрестностях Саратова. Оргкомитету поручено провести необходимую подготовительную работу.

*Б. И. Голубов, Б. С. Кашин, Л. Ю. Коссович,
С. П. Сидоров, А. П. Хромов, А. Н. Чумаченко*



Подписка на I полугодие 2017 года

Индекс издания в объединенном каталоге «Пресса России» 36017, раздел 30 «Научно-технические издания. Известия РАН. Известия вузов». Журнал выходит 4 раза в год.

Цена свободная.

Оформить подписку онлайн можно в Интернет-каталоге «Пресса по подписке» (www.akc.ru).

По всем вопросам обращаться в редакцию журнала:
410012, Саратов, Астраханская, 83;
тел. (845-2) 51-45-49, 52-26-89; факс (845-2) 27-85-29;
e-mail: izvestiya@sgu.ru