УДК 517.986.68

ОПЕРАТОРЫ КМС ТИПА $B(1,1)$ И СУПЕРАЛГЕБРА ЛИ $\mathfrak{osp}(3,2)$

Г. С. Мовсисян[1], А. Н. Сергеев[2]

[1]Мовсисян Геворг Суренович, аспирант кафедры геометрии, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, Саратов, Астраханская, 83, movsisyangs@gmail.com

[2]Сергеев Александр Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры геометрии, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, Саратов, Астраханская, 83, sergeevAN@info.sgu.ru

Основной целью данной статьи является исследование связей между теорией представлений супералгебры Ли $\mathfrak{osp}(3,2)$ и дифференциальным оператором Калоджеро – Мозера – Сазерленда (КМС) типа $B(1,1)$. Этот дифференциальный оператор зависит (полиномиально) от трёх параметров. Соответствующие полиномиальные собственные функции также зависят от трёх параметров, но в общем случае коэффициенты этих собственных функций имеют рациональную зависимость от параметров. Важным является вопрос о специализации собственных функций при заданных значениях параметров. Наиболее интересен случай супералгебр Ли, в котором $k = p = -1$. В этом случае доказывается, что характеры неприводимых конечномерных представлений супералгебр Ли $\mathfrak{osp}(3,2)$ могут быть получены из собственных функций дифференциального оператора КМС типа $B(1,1)$ при указанной специализации и условии того, что k, p связаны также некоторым линейным соотношением.

Ключевые слова: супералгебра, представление, характер, квантовая интегрируемая система.

DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-1-19-30

ВВЕДЕНИЕ

Супералгебра Ли $\mathfrak{osp}(3,2)$ является одним из простейших примеров супералгебр, теория представлений которых не полупроста. В этом случае, как правило, задача описания неприводимых представлений в терминах более простых представлений (в частности, вычисления их характеров) является глубоко нетривиальной. В общем случае для супералгебр $\mathfrak{osp}(n,2m)$ эта задача была решена В. Сергановой [1]. При этом используются полиномы Каждана – Люстига специального вида, а соответствующий алгоритм дает кратности неприводимых модулей в виртуальных модулях Эйлера, характеры которых известны. В данной работе в частном случае супералгебры $\mathfrak{osp}(3,2)$ дается другой способ вычисления характеров неприводимых представлений. А именно, используя связь между супералгебрами Ли и деформированными квантовыми интегрируемыми системами [2], вычисляются специализации собственных полиномиальных функций оператора Калоджеро – Мозера – Сазерленда (КМС) типа $B(1,1)$. Более точно рассматриваемые собственные функции являются полиномами от двух переменных $F_\Lambda(v,u)$ и нумеруются диаграммами Юнга Λ специального вида (крюки). При этом коэффициенты этих полиномов рационально зависят от двух параметров k и p. Случай $k=-1$, $p=-1$ соответствует супералгебре Ли $\mathfrak{osp}(3,2)$. Но этот случай является особым, в том смысле, что коэффициенты полиномов $F_\Lambda(v,u)$ имеют полюса в этих точках. Оказывается, что предел при $k \to -1$, $p \to -1$ существует, если параметры p, k связаны линейным соотношением (которое зависит от диаграммы Λ), и совпадает с характером неприводимого модуля соответствующего диаграмме Λ. Основной новый результат работы сформулирован в теореме 4.

Для удобства читателя результаты излагаются в виде максимально независимом от других источников, используя все возможные упрощения в случае системы корней $B(1,1)$.

1. ДЕФОРМИРОВАННЫЙ ОПЕРАТОР КМС ТИПА $B(1,1)$

Рассмотрим дифференциальный оператор КМС с системой корней типа $B(1,1)$, который является частным случаем общего КМС оператора типа $B(m,n)$ [3]

$$\mathscr{L}_2=(\partial_x)^2+k(\partial_y)^2-p\left(\frac{x+1}{x-1}\partial_x+\frac{y+1}{y-1}\partial_y\right)+$$
$$+(k-1)\frac{y^2+1}{y^2-1}\partial_y+\frac{y+x}{y-x}\left(\partial_x-k\partial_y\right)-\frac{y+x^{-1}}{y-x^{-1}}\left(\partial_x+k\partial_y\right), \tag{1}$$

где $\partial_x=x\frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_y=y\frac{\partial}{\partial y}$ и k, p — комплексные параметры. Введём новые переменные $u=\frac{1}{2}(x+x^{-1}-2)$, $v=\frac{1}{2}(y+y^{-1}-2)$, тогда оператор (1) примет вид

$$\mathscr{L}_2=(\partial_u)^2+k(\partial_v)^2-\frac{u+v}{u-v}(\partial_u-k\partial_v)-(1+p)(\partial_u+\partial_v)-$$
$$-(1+2p)\left(\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v}\right)+2\frac{\partial}{\partial u}\partial_u+2k\frac{\partial}{\partial v}\partial_v-\frac{4}{u-v}(\partial_u-k\partial_v), \tag{2}$$

Мы будем называть параметры k, p общими, если 1, p, k являются линейно независимыми над полем рациональных чисел.

2. АЛГЕБРЫ ДЕФОРМИРОВАННЫХ СИММЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ И СДВИНУТЫХ ДЕФОРМИРОВАННЫХ СИММЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ

Естественной областью действия оператора (2) является следующая алгебра деформированных симметрических полиномов:

$$\mathfrak{A}_{1,1}=\{f\in\mathbb{C}[u,v]|\ (\partial_u-k\partial_v)f\in(u-v)\}, \tag{3}$$

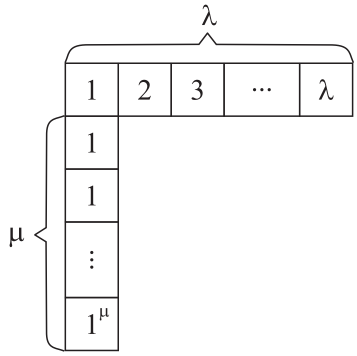

Диаграмма Юнга – Крюк

где $(u-v)$ — это идеал, порождённый многочленом $u-v$ и $\partial_u=u\frac{\partial}{\partial u},\partial_v=v\frac{\partial}{\partial v}$. В качестве линейного базиса в $\mathfrak{A}_{1,1}$ выберем суперполиномы Джека [4], которые в этом случае имеют вид

$$P_\Lambda=v^\lambda u^\mu-\frac{\mu-k\lambda}{\mu+1-k(\lambda-1)}v^{\lambda-1}u^{\mu+1},$$

где $\Lambda=(\lambda,\mu)$ — диаграмма Юнга – Крюк (рисунок). Обозначим через $\Lambda-\delta$ диаграмму $(\lambda-1,\mu)$, а через $\Lambda-\varepsilon$ — диаграмму $(\lambda,\mu-1)$.

Лемма ниже является частным случаем теоремы 2 из [2].

Лемма 1. *Если k не является рациональным неотрицательным числом, то многочлены P_Λ корректно определены и являются базисом алгебры $\mathfrak{A}_{1,1}$.*

Доказательство. Из явной формулы для P_Λ следует, что они корректно определены, если k — не является рациональным неотрицательным числом. Покажем теперь, что P_Λ линейно независимы. Предположим, что $\sum\limits_{\Lambda} C_\Lambda P_\Lambda = 0$ и не все коэффициенты равны нулю. Среди таких коэффициентов выберем максимальный $C_{\tilde\Lambda}$, относительно лексикографического порядка на парах (λ,μ). Рассматривая предыдущее линейное соотношение как многочлен от v, u, мы видим, что его старший коэффициент (относительно лексикографического порядка) тоже равен $C_{\tilde\Lambda}$. Это дает противоречие и доказывает линейную независимость.

Докажем, теперь, что многочлены P_Λ образуют базис. Из условия (3) следует, что размерность однородной компоненты степени n алгебры $\mathfrak{A}_{1,1}$ равна $n-1$. Но рóвно столько же существует многочленов P_Λ степени n. Это доказывает утверждение о базисе. □

Лемма 2. *Оператор* (2) *действует на базис* P_Λ *по следующим формулам:*

$$\mathscr{L}_2(P_\Lambda) = a(\Lambda,\Lambda)P_\Lambda + a(\Lambda-\delta,\Lambda)P_{\Lambda-\delta} + a(\Lambda-\varepsilon,\Lambda)P_{\Lambda-\varepsilon},$$

где $a(\Lambda,\Lambda) = \mu(\mu+1) + k\lambda(\lambda-1) - (p+1)(\lambda+\mu)$, $a(\Lambda-\varepsilon,\Lambda) = \mu(2\mu-2p-1)$,

$$a(\Lambda-\delta,\Lambda) = (\lambda-1)(2k\lambda-2k-2p-1)\frac{\mu-k\lambda}{\mu+1-k(\lambda-1)}\frac{\mu+1-k(\lambda-2)}{\mu-k(\lambda-1)}.$$

В частности, оператор $\mathscr{L}_2$ *отображает алгебру* $\mathfrak{A}_{1,1}$ *в себя.*

Доказательство. Оператор (2) состоит из суммы двух операторов, т. е.

$$\mathscr{L}_2 = \mathscr{L}_2^+ + \mathscr{L}_2^-,$$

где

$$\mathscr{L}_2^+ = (\partial_u)^2 + k(\partial_v)^2 - \frac{u+v}{u-v}(\partial_u - k\partial_v) - (1+p)(\partial_u+\partial_v),$$

$$\mathscr{L}_2^- = -(1+2p)\left(\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v}\right) + 2\frac{\partial}{\partial u}\partial_u + 2k\frac{\partial}{\partial v}\partial_v - \frac{4}{u-v}(\partial_u - k\partial_v).$$

Легко проверить, что многочлен P_Λ является собственной функцией оператора $\mathscr{L}_2^+$ с собственным значением $a(\Lambda,\Lambda)$. Далее легко проверить, что

$$\mathscr{L}_2^-(P_\Lambda) = \alpha v^\lambda u^{\mu-1} + \beta v^{\lambda-1}u^\mu + \gamma v^{\lambda-2}u^{\mu+1},$$

где

$$\alpha = 2\mu^2 - (1+2p)\mu, \qquad \beta = -\frac{2k(\mu-k\lambda)(\lambda-1)^2}{\mu+1-k(\lambda-1)} + \frac{(1+2p)(\mu-k\lambda)(\lambda-1)}{\mu+1-k(\lambda-1)},$$

$$\gamma = -\left(2\frac{(\mu-k\lambda)(\mu+1)^2}{\mu+1-k(\lambda-1)} + 2k\lambda^2 - (1+2p)\frac{(\mu-k\lambda)(\mu+1)}{\mu+1-k(\lambda-1)} + (1+2p)\lambda - 4(\mu-k\lambda)\right).$$

В то же время мы предполагаем, что

$$\mathscr{L}_2^-(P_\Lambda) = a(\Lambda-\delta,\Lambda)P_{\Lambda-\delta} + a(\Lambda-\varepsilon,\Lambda)P_{\Lambda-\varepsilon}.$$

Таким образом,

$$a(\Lambda-\delta,\Lambda)P_{\Lambda-\delta}+a(\Lambda-\varepsilon,\Lambda)P_{\Lambda-\varepsilon}=\alpha v^{\lambda}u^{\mu-1}+\beta v^{\lambda-1}u^{\mu}+\gamma v^{\lambda-2}u^{\mu+1}.$$

Пользуясь явной формулой для многочленов P_Λ и приравнивая коэффициенты при одинаковых мономах, в результате получим переопределённую систему на $a(\Lambda-\varepsilon,\Lambda)$ и $a(\Lambda-\delta,\Lambda)$. Решая эту систему, получим формулы, указанные в утверждении леммы. Тот факт, что оператор (2) отображает алгебру $\mathfrak{A}_{1,1}$ в себя, сразу следует из предыдущих вычислений. □

Нам также понадобится алгебра сдвинутых деформированных симметрических полиномов, которая на самом деле изоморфна алгебре интегралов задачи КМС [2]

$$\mathfrak{B}_{1,1}=\left\{\begin{array}{l} f\in\mathbb{C}[v,u]\mid f \text{ обладает свойствами}\\ 1) f(v,u) \text{ многочлен от } (v-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(p+1)k^{-1})^2 \text{ и } (u-\frac{1}{2}p)^2,\\ 2) f(v+1,u-1)=f(v,u), \text{ если } u=kv\end{array}\right\}.$$

Для общих значений k, p определим многочлены

$$Q_\Lambda(v,u)=(v-1)\dots(v-\lambda+1)u(u-1)\dots(u-\mu+1)\times$$
$$\times k^{-2\mu}(v-(p+1)k^{-1})\dots(v+\lambda-2-(p+1)k^{-1})(u+1-(p+1))\dots(u+\mu-(p+1))\times$$
$$\times\left[(v-k^{-1}\mu)(v+k^{-1}\mu-1-(p+1)k^{-1})-\frac{\lambda-k^{-1}\mu}{\lambda-1-k^{-1}(\mu+1)}k^{-2}(u-\mu)(u+\mu-p)\right].$$

Общий случай следующей леммы рассмотрен в работе [3, предложение 6.3].

Лемма 3. *Полином $Q_\Lambda(v,u)$ обладает следующими свойствами:*
1) $Q_\Lambda(N)=Q_\Lambda(\tilde\lambda,\tilde\mu)=0$, если $N=(\tilde\lambda,\tilde\mu)$ не содержит Λ и

$$Q_\Lambda(\Lambda)=Q_\Lambda(\Lambda)=k^{-2\mu}(\lambda-1)!\mu!(\lambda-(p+1)k^{-1})\dots(2\lambda-2-(p+1)k^{-1})\times$$
$$\times(\mu-p)\dots(2\mu-p-1)(\lambda-k^{-1}\mu)(\lambda+k^{-1}\mu-1-(p+1)k^{-1});$$

2) $Q_\Lambda(v,u)$ является полиномом от $(v-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(p+1)k^{-1})^2$ и $(u-\frac{1}{2}p)^2$;
3) $Q_\Lambda(v+1,u-1)=Q_\Lambda(v,u)$, если $u=kv$.

Доказательство. 1. Рассмотрим две диаграммы $\Lambda=(\lambda,\mu)$ и $N=(\widetilde\lambda,\widetilde\mu)$. Видно, что если $\lambda>\widetilde\lambda$ или $\mu>\widetilde\mu$, то полином обращается в нуль.

2. Данное свойство легко доказать, сгруппировав элементы многочлена $Q_\Lambda(v,u)$.

3. Для доказательства этого свойства нужно показать, что

$$\left.\frac{Q_\Lambda(v+1,u-1)}{Q_\Lambda(v,u)}\right|_{u=kv}=1,$$

таким образом доказательство сводится к подсчёту левой части последнего равенства

$$\left.\frac{Q_\Lambda(v+1,u-1)}{Q_\Lambda(v,u)}\right|_{u=kv}=\frac{(v+\lambda-1-k^{-1}(p+1))}{v-\lambda+1}\times$$
$$\times\frac{\left[(v+1-k^{-1}\mu)-\frac{\lambda-k^{-1}\mu}{\lambda-1-k^{-1}(\mu+1)}(v-k^{-1}-\mu k^{-1})\right]}{\left[(v-k^{-1}\mu-1-(p+1)k^{-1})-\frac{\lambda-k^{-1}\mu}{\lambda-1-k^{-1}(\mu+1)}(v+\mu k^{-1}-pk^{-1})\right]}.$$

Упростим числитель и знаменатель в квадратных скобках:

$$(v+1-k^{-1}\mu)-\frac{\lambda-k^{-1}\mu}{\lambda-1-k^{-1}(\mu+1)}(v-k^{-1}-\mu k^{-1})=$$
$$=-\left(\frac{1+k^{-1}}{\lambda-1-k^{-1}(\mu+1)}\right)(v-\lambda+1),$$
$$(v-k^{-1}\mu-1-(p+1)k^{-1})-\frac{\lambda-k^{-1}\mu}{\lambda-1-k^{-1}(\mu+1)}(v+\mu k^{-1}-pk^{-1})=$$
$$=-\left(\frac{1+k^{-1}}{\lambda-1-k^{-1}(\mu+1)}\right)(v+\lambda-1-k^{-1}(p+1)).$$

□

Лемма 4. *Для общих значений параметров многочлены $Q_\Lambda(v,u)$ являются базисом алгебры $\mathfrak{B}_{1,1}$.*

Доказательство. Докажем вначале, что если $f\in\mathfrak{B}_{1,1}$ и $f=\varphi(v^2,k^{-2}u^2)+$ члены меньшей степени, то $\varphi\in\mathfrak{A}_{1,1}$. Действительно, разложим $f(v+1,u-1)$ в ряд Тейлора $f(v+1,u-1)=f(v,u)+f'_v(v,u)-f'_u(v,u)+\cdots$, так как $f\in\mathfrak{B}_{1,1}$, то при $u=kv$ $\quad f(v+1,u-1)=f(v,u)$, тогда $\quad f'_v(v,u)-f'_u(v,u)\equiv 0$. Но так как $f=\varphi(v^2,k^{-2}u^2)+$члены меньшей степени, то отсюда следует что $f'_v=\varphi'_v+$члены меньшей степени, $f'_u=\varphi'_u+$члены меньшей степени, отсюда $\varphi'_v-\varphi'_u=0$. Для удобства введём замены $x=v^2$, $y=k^{-2}u^2$, отсюда при $u=kv$ получаем $y=x$. Тогда $\varphi'_v=\varphi'_x x'_v=2v\varphi'_x$, $\varphi'_u=\varphi'_y y'_u=2uk^{-1}\varphi'_y$ и $2v\varphi'_x-2uk^{-1}\varphi'_y=0$, при $u=kv$ получаем условие $\varphi'_x-k\varphi'_y=0$, которое эквивалентно условию $\partial_u-k\partial_v=0$ из алгебры $\mathfrak{A}_{1,1}$, а это означает, что $\varphi\in\mathfrak{A}_{1,1}$.

Докажем теперь, что $Q_\Lambda(v,u)$ является базисом алгебры $\mathfrak{B}_{1,1}$. Достаточно показать, что их старшие компоненты образуют базис $\mathfrak{A}_{1,1}$. Но, как легко проверить, старшая компонента $Q_\Lambda(v,u)$ равна $P_\Lambda(v^2,k^{-2}u^2)$ и утверждение следует из леммы 1. □

Общий случай леммы 4 доказан в [2, предложение 3] .

Теорема 1. *Справедлива формула Пиери для многочленов P_Λ:*

$$P_\square P_\Lambda=P_{\Lambda+\delta}+k\frac{\mu-k\lambda}{\mu+1-k(\lambda-1)}\frac{\mu+2-k(\lambda-1)}{\mu+1-k\lambda}P_{\Lambda+\varepsilon},$$

где $P_\square=v+ku$.

Доказательство. Предположим, что

$$P_\square P_\Lambda=aP_{\Lambda+\delta}+bP_{\Lambda+\varepsilon}.$$

В то же время легко проверить, что

$$P_\square P_\Lambda=v^{\lambda+1}u^\mu-\left(\frac{\mu-k\lambda}{\mu+1-k(\lambda-1)}-k\right)v^\lambda u^{\mu+1}-k\frac{\mu-k\lambda}{\mu+1-k(\lambda-1)}v^{\lambda-1}u^{\mu+2}.$$

Таким образом,

$$aP_{\Lambda+\varepsilon}+bP_{\Lambda+\delta}=a\left(v^{\lambda+1}u^\mu-\frac{\mu-k(\lambda+1)}{\mu+1-k\lambda}v^\lambda u^{\mu+1}\right)+$$

$$+b\left(v^{\lambda}u^{\mu+1}-\frac{\mu+1-k\lambda}{\mu+2-k(\lambda-1)}v^{\lambda-1}u^{\mu+2}\right).$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых мономах, в результате получим переопределённую систему, из которой найдем коэффициенты a и b:

$$a=1,\qquad b=k\frac{\mu-k\lambda}{\mu+1-k(\lambda-1)}\frac{\mu+2-k(\lambda-1)}{\mu+1-k\lambda}.$$ □

Теорема 2. *Для общих значений параметров справедлива следующая формула Пиери для полиномов $Q_{\Lambda}(v,u)$:*

$$\Big[(v-\lambda)(v+\lambda-1)-k^{-1}(p+1)(u-\mu+v-\lambda)+k^{-1}(u-\mu)(u+\mu+1)\Big]Q_{\Lambda}(v,u)=$$
$$=Q_{\Lambda+\delta}(v,u)+Q_{\Lambda+\varepsilon}(v,u)k\frac{\mu-k\lambda}{\mu+1-k(\lambda-1)}\frac{\mu+2-k(\lambda-1)}{\mu+1-k\lambda}. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть f — разность между левой и правой частью равенства формулы (4). Мы хотим показать, что $f=0$ тождественно. В лемме 4 было доказано, что старшая компонента $Q_{\Lambda}(v,u)$ — это $P_{\Lambda}(v^2,k^{-2}u^2)$. Следовательно, $\deg f\leqslant 2|\Lambda|+2$, где $|\Lambda|=\lambda+\mu$. Но по теореме 1 P_{Λ} удовлетворяют формуле Пиери с теми же коэффициентами, поэтому $\deg f\leqslant 2|\Lambda|+1$. Докажем теперь, что $f(N)=0$ для любого разбиения N такого, что $|N|\leqslant|\Lambda|$. В самом деле, если $|N|\leqslant|\Lambda|$ и $N\neq\Lambda$, то по лемме 3 $Q_{\Lambda}(N)=Q_{\Lambda+\varepsilon}(N)=Q_{\lambda+\delta}(N)=0$ и, следовательно, $f(N)=0$. Если $N=\Lambda$, то коэффициент при Q_{Λ} в левой части равенства (4) равен нулю, и опять по лемме 3 $Q_{\Lambda+\varepsilon}(N)=Q_{\lambda+\delta}(N)=0$. Следовательно, $f(\Lambda)=0$. Разложим многочлен f по базису Q_{Λ}

$$f=\sum_{N}c_NQ_N. \tag{5}$$

Сравнивая степени левой и правой частей равенства, мы видим, что $|N|\leqslant|\Lambda|$. Предположим, что не все коэффициенты в этом разложении равны нулю. Пусть наименьшая (относительно включения) диаграмма такая, что $c_M\neq 0$. Если $N\subset M$, $N\neq M$, то $c_N=0$ согласно нашему выбору M. Если N не содержится в M, то по лемме 3 $Q_N(M)=0$. Поэтому, подставляя в обе части равенства (5) $N=M$, получим $f(N)=c_MQ_M$. По предыдущему $f(N)=0$, а по лемме 3 $Q_M(M)\neq 0$. Следовательно, $c_M=0$. Полученное противоречие доказывает теорему. □

3. СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ

В этом параграфе мы предполагаем, что параметры p, k — общие. Определим для каждой диаграммы Λ многочлен F_{Λ} по следующей формуле:

$$F_{\Lambda}=\sum_{M\subseteq\Lambda}c(M,\Lambda)P_M, \tag{6}$$

где [3]

$$c(M,\Lambda)=2^{|\Lambda|}\frac{Q_M(\Lambda)}{Q_M(M)}\frac{f_{\Lambda}}{f_M}, \tag{7}$$

$$f_{\Lambda}=-\frac{k+1}{\mu+1-k(\lambda-1)}\frac{2p+1}{k(\lambda-1)+\mu-p-1}\prod_{i=1}^{\lambda-1}\frac{2p+1-2ki}{p+1-k(\lambda+i-1)}\prod_{j=1}^{\mu}\frac{2j-2p-1}{j+\mu-p-1}.$$

Появление множителя $2^{|\Lambda|}$ объясняется тем, что мы хотим, чтобы старший коэффициент многочлена $F_\Lambda(y,x)$ был равен единице.

Теорема 3. *Многочлен* (6) *является собственной функцией оператора* (2).

Доказательство. Докажем, что условие того, что многочлен (6) является собственной функцией равносильно рекуррентной формуле (8) на коэффициенты (7)

$$\Big[a(\Lambda,\Lambda)-a(M,M)\Big]c(M,\Lambda)=\sum_{M\subseteq N\subseteq\Lambda}a(M,N)c(M,\Lambda)=$$
$$=a(M,M+\varepsilon)c(M+\varepsilon,\Lambda)+a(M,M+\delta)c(M+\delta,\Lambda). \tag{8}$$

По лемме 2 $\mathscr{L}_2P_M=\sum\limits_{N\subseteq M}a(N,M)P_N$. Поэтому

$$\mathscr{L}_2F_\Lambda=\sum_{M\subseteq\Lambda}c(M,\Lambda)\left(\sum_{N\subseteq M}a(N,M)P_N\right)=\sum_{M\subseteq\Lambda}\ \sum_{N\subseteq M}c(M,\Lambda)a(N,M)P_N=$$
$$=\sum_{N\subseteq\Lambda}\ \sum_{N\subseteq M\subseteq\Lambda}a(N,M)c(M,\Lambda)P_N=\sum_{N\subseteq\Lambda}\left(\sum_{N\subseteq M\subseteq\Lambda}a(N,M)c(M,\Lambda)\right)P_N.$$

В то же время если F_Λ собственная функция, то $\mathscr{L}_2F_\Lambda=k_\Lambda F_\Lambda=k_\Lambda\sum\limits_{N\subseteq\Lambda}c(N,\Lambda)P_N$. Таким образом, условие быть собственной функцией равносильно системе уравнений

$$\sum_{N\subseteq M\subseteq\Lambda}a(N,M)c(M,\Lambda)=k_\Lambda\ c(N,\Lambda). \tag{9}$$

Пусть $N=\Lambda$, тогда $c(\Lambda,\Lambda)k_\Lambda=a(\Lambda,\Lambda)c(\Lambda,\Lambda)$, поэтому $k_\Lambda=a(\Lambda,\Lambda)$ и систему (9) можно переписать в следующем виде:

$$\sum_{N\subseteq M\subseteq\Lambda}a(N,M)c(M,\Lambda)=a(\Lambda,\Lambda)c(N,\Lambda). \tag{10}$$

Из системы (10) по индукции легко вывести следующие формулы для коэффициентов:

$$c(\Lambda-\delta,\Lambda)=\frac{a(\Lambda-\delta,\Lambda)}{a(\Lambda,\Lambda)-a(\Lambda-\delta,\Lambda-\delta)},\qquad c(\Lambda-\varepsilon,\Lambda)=\frac{a(\Lambda-\varepsilon,\Lambda)}{a(\Lambda,\Lambda)-a(\Lambda-\varepsilon,\Lambda-\varepsilon)}.$$

Из леммы 2 следует, что $a(N,M)=0$, если $M\neq N$, $M\neq N+\varepsilon$, $M\neq N+\delta$, тогда

$$c(N,\Lambda)a(\Lambda,\Lambda)=a(N,N)c(N,\Lambda)+a(N,N+\varepsilon)c(N+\varepsilon,\Lambda)+a(N,N+\delta)c(N+\delta,\Lambda),$$
$$\Big[a(\Lambda,\Lambda)-a(N,N)\Big]c(N,\Lambda)=\sum_{N\subseteq M\subseteq\Lambda}a(N,M)c(N,\Lambda)=$$
$$=a(N,N+\varepsilon)c(N+\varepsilon,\Lambda)+a(N,N+\delta)c(N+\delta,\Lambda). \tag{11}$$

Таким образом, равносильность доказана. Поэтому для того чтобы доказать, что (6) является собственной функцией, достаточно проверить, что коэффициенты (7) удовлетворяют равенству (11). Для этого понадобится следующая вспомогательная лемма.

Лемма 5. *Справедливы следующие соотношения:*

$$\begin{aligned} \frac{f_{\Lambda+\delta}}{f_\Lambda} &= \frac{Q_\Lambda(\Lambda)}{Q_\Lambda(\Lambda+\delta)} \frac{a(\Lambda+\delta,\Lambda)}{[a(\Lambda+\delta,\Lambda+\delta)-a(\Lambda,\Lambda)]}, \\ \frac{f_{\Lambda+\varepsilon}}{f_\Lambda} &= \frac{Q_\Lambda(\Lambda)}{Q_\Lambda(\Lambda+\varepsilon)} \frac{a(\Lambda+\varepsilon,\Lambda)}{[a(\Lambda+\varepsilon,\Lambda+\varepsilon)-a(\Lambda,\Lambda)]}. \end{aligned} \tag{12}$$

Доказательство. Так как эти формулы однозначно определяют f_Λ через f_N, где $N \subseteq \Lambda$, то достаточно проверить, что f_Λ удовлетворяет соотношениям (12). Следовательно, лемма сводится к прямым вычислениям, которые нетрудно проделать. □

Для завершения доказательства теоремы 3 подставим коэффициенты (7) в рекуррентную формулу (11) и воспользуемся соотношениями (12). В результате получим следующий аналог формулы (4):

$$\Big[a(\Lambda,\Lambda)-a(N,N)\Big]Q_N(\Lambda) = Q_{N+\varepsilon}(\Lambda)\frac{Q_N(N+\varepsilon)}{Q_{N+\varepsilon}(N+\varepsilon)}\Big[a(N+\varepsilon,N+\varepsilon)-a(N,N)\Big]+$$
$$+Q_{N+\delta}(\Lambda)\frac{Q_N(N+\delta)}{Q_{N+\delta}(N+\delta)}\Big[a(N+\delta,N+\delta)-a(N,N)\Big],$$

которая уже доказана. Это завершает доказательство теоремы 3. □

4. СПЕЦИАЛИЗАЦИЯ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть $\pm\varepsilon, \pm\delta$ являются ненулевыми весами тождественного представления супералгебры $\mathfrak{osp}(3,2)$. Тогда соответствие

$$\Lambda = (\lambda,\mu) \longrightarrow \lambda\delta + \mu\varepsilon$$

задает биекцию между диаграммами крюками Λ и старшими весами неприводимых конечномерных модулей над супералгеброй Ли $\mathfrak{osp}(3,2)$. Если V — конечномерный модуль, на котором подалгебра Картана действует диагонально, то его суперхарактер определятся по формуле $\mathrm{Sch}\,(V) = \sum\limits_{\mu}(-1)^{p(\mu)}e^{\mu}$, где сумма берется по всем весам модуля V с учетом их четности. Если ввести переменные $x = e^\varepsilon, y = e^\delta$, то суперхарактер будет полиномом от переменных x, x^{-1}, y, y^{-1}. Например, суперхарактер тождественного представления равен $y + y^{-1} - x - x^{-1} - 1$. Для каждой диаграммы крюка Λ мы будем обозначать через V^Λ неприводимый конечномерный модуль со старшим весом $\lambda\delta + \mu\varepsilon$.

Основным результатом этого параграфа и всей работы является следующая теорема.

Теорема 4. *1) если* $\Lambda \neq (\lambda,\lambda-1)$, *то существует* $\lim\limits_{\substack{p\to-1\\k\to-1}} F_\Lambda = \mathrm{Sch}\,(V^\Lambda)$*;*

2) если $\Lambda = (\lambda,\lambda-1)$, *то при условии* $p+1 = \lambda(k+1)$ *существует* $\lim\limits_{k\to-1} F_\Lambda = \mathrm{Sch}\,(V^\Lambda)$*;*

3) если $\Lambda = (1,0)$, *то при условии* $p+1 = 2(k+1)$ *существует* $\lim\limits_{k\to-1} F_\Lambda = \mathrm{Sch}\,(V^\square)$.

Доказательство. Суперхарактер можно разложить по базису из суперполиномов Шура

$$\mathrm{Sch}\,(V^\Lambda) = \sum_{N\subseteq\Lambda} \chi(N,\Lambda)(v^\tau u^\sigma - v^{\tau-1}u^{\sigma+1}),$$

где $\chi(N,\Lambda)$ — некоторые коэффициенты. Далее, мы знаем, что

$$F_\Lambda(v,u) = \sum_{N\subseteq\Lambda} c(N,\Lambda)P_N(v,u).$$

Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$\lim_{\substack{p\to-1\\k\to-1}} P_N(v,u) = (v^\tau u^\sigma - v^{\tau-1}u^{\sigma+1})$$

и предел коэффициентов $c(N,\Lambda)$ при выполнении условий теоремы равен $\chi(N,\Lambda)$. Первое равенство очевидно. Для вычисления предела коэффициентов разберем отдельно три случая.

1. Если $\Lambda \neq (\lambda, \lambda-1)$, то суперхарактер совпадает с суперхарактером Эйлера, для которого есть явная формула (см. [1]), которая в этом случае имеет вид

$$\mathrm{Sch}\,(V^\Lambda) = 2(v-u)\varphi_{\lambda-1}(v)\psi_\mu(u), \tag{13}$$

где $\varphi_\lambda(v) = y^\lambda - y^{\lambda-1} + \dots - y^{1-\lambda} + y^{-\lambda}$, $\psi_\mu(u) = x^\mu + x^{\mu-1} + \dots + x^{1-\mu} + x^{-\mu}$, $u = \frac{1}{2}(x + x^{-1} - 2)$, $v = \frac{1}{2}(y + y^{-1} - 2)$.

Вычислим коэффициенты $\chi(N,\Lambda)$ для формулы (13), для этого разложим многочлены $\varphi_\lambda(v)$, $\psi_\mu(u)$ по базисам v^τ, u^σ соответственно

$$\varphi_\lambda(v) = \sum_{\tau=0}^{\lambda} d(\tau,\lambda)v^\tau,$$

где $d(\tau,\lambda) = 2^\tau\frac{(\lambda-\tau+1)\dots(\lambda+\tau)}{(2\tau)!}$, $\lambda > \tau \geqslant 0$ и $d(\lambda,\lambda) = 2^\lambda$;

$$\psi_\mu(u) = \sum_{\sigma=0}^{\mu} c(\sigma,\mu)u^\sigma,$$

где $c(\sigma,\mu) = 2^\sigma(2\mu+1)\frac{(\mu-\sigma+1)\dots(\mu+\sigma)}{(2\sigma+1)!}$, $\mu > \sigma \geqslant 0$ и $c(\mu,\mu) = 2^\mu$.

Отсюда коэффициенты $\chi(N,\Lambda)$ для формулы (13) примут вид

$$\chi(N,\Lambda) = 2d(\tau-1,\lambda-1)c(\sigma,\mu). \tag{14}$$

Таким образом, остаётся проверить равенство

$$\chi(N,\Lambda) = 2^{|\Lambda|}\lim_{\substack{p\to-1\\k\to-1}} \frac{Q_N(\Lambda)f_\Lambda}{Q_N(N)f_N},$$

где $N = (\tau,\sigma)$. Левая часть известна, посчитаем правую

$$\lim_{\substack{p\to-1\\k\to-1}} \frac{Q_N(\Lambda)}{Q_N(N)} = \frac{(\lambda-\tau+1)\dots(\lambda+\tau-2)(\mu-\sigma+1)\dots(\mu+\sigma)(\lambda+\mu)(\lambda-\mu-1)}{(2\tau-2)!(2\sigma)!(\sigma+\tau)(\tau-\sigma-1)},$$

$$\lim_{\substack{p\to-1\\k\to-1}} \frac{f_\Lambda}{f_N} = 2^{\tau-\lambda}2^{\sigma-\mu}\frac{(\sigma+\tau)(\tau-\sigma-1)}{(\lambda+\mu)(\lambda-\mu-1)}(2\tau+1)(2\mu+1).$$

Отсюда

$$2^{|\Lambda|}\lim_{\substack{p\to-1\\k\to-1}} \frac{Q_N(\Lambda)f_\Lambda}{Q_N(N)f_N} = 2^{\tau}\frac{(\lambda-\tau+1)\dots(\lambda+\tau-2)}{(2\tau-2)!}2^{\sigma}\frac{(\mu-\sigma+1)\dots(\mu+\sigma)}{(2\sigma+1)!}(2\mu+1)$$

и первое утверждение теоремы доказано.

2. Если $\Lambda=(\lambda,\lambda-1)$, то известно [5, пример после теоремы 4], что суперхарактер неприводимого представления супералгебры $\mathfrak{osp}(3,2)$ имеет вид

$$\mathrm{Sch}\,(V^\Lambda) = \varphi_\lambda(v)\psi_{\lambda-1}(u) - \varphi_{\lambda-1}(v)\psi_\lambda(u). \qquad (15)$$

Следовательно, коэффициенты формулы (15) примут вид

$$\chi(N,\Lambda) = d(\lambda,\tau)c(\lambda-1,\sigma) - d(\lambda-1,\tau)c(\lambda,\sigma). \qquad (16)$$

Таким образом, остаётся проверить равенство

$$\chi(N,\Lambda) = \lim_{k\to-1}\big[C(N,\Lambda)-C(N,\Lambda+\delta-\varepsilon)\big]\Big|_{p+1=\lambda(k+1)}, \qquad (17)$$

где $C(N,\Lambda)-C(N,\Lambda+\delta-\varepsilon)$ — старший коэффициент при $v^\lambda u^\mu$, $N=(\tau,\sigma)$. Имеем

$$\lim_{k\to-1} Q_N(N)f_N = -(k+1)\frac{(2\sigma+1)!}{2^\sigma}\frac{(2\tau-2)!}{2^{\tau-1}}, \qquad \lim_{k\to-1} f_\Lambda = -2^{2-2\lambda},$$

$$\lim_{k\to-1} Q_N(\Lambda)\Big|_{p+1=\lambda(k+1)} = (k+1)\frac{(\lambda-\tau+1)\dots(\lambda+\tau-1)(\lambda-\sigma)\dots(\lambda+\sigma)}{\tau+\sigma},$$

$$C(N,\Lambda) = 2^{\sigma+\tau}\frac{(\lambda-\tau+1)\dots(\lambda+\tau-1)(\lambda-\sigma)\dots(\lambda+\sigma)}{(2\sigma+1)!(\tau+\sigma)(2\tau-2)!},$$

$$C(N,\Lambda+\varepsilon-\delta) = 2^{\sigma+\tau}\frac{(\lambda-\tau)\dots(\lambda+\tau)(\lambda-\sigma+1)\dots(\lambda+\sigma-1)}{(2\sigma-1)!(\tau+\sigma)(2\tau)!}.$$

Тогда равенство (17) сводится к проверке равенства (18), которое легко проверить.

$$\begin{aligned}&(\tau+\sigma)[(\lambda+\tau)(\lambda-\sigma)(2\lambda-1)-(\lambda-\tau)(\lambda+\sigma)(2\lambda+1)] = \\ &= (\lambda-\sigma)(\lambda+\sigma)(2\tau-1)2\tau-(\lambda-\tau)(\lambda+\tau)(2\sigma+1)2\sigma.\end{aligned} \qquad (18)$$

3. Если $\Lambda=(1,0)$ то

$$\begin{aligned}\lim_{k\to-1} F_\square\Big|_{p+1=2(k+1)} &= 2\lim_{k\to-1}(P_\square+f_\square)\Big|_{p+1=2(k+1)} = \\ &= 2\lim_{k\to-1}\left(v+ku+\frac{(k+1)(2p+1)}{(p+1)}\right)\Bigg|_{p+1=2(k+1)} = \\ &= 2v-2u-1 = y+y^{-1}-x-x^{-1}-1 = \mathrm{Sch}\,(V^\square).\end{aligned}$$

□

Благодарности. Работа А. Н. Сергеева выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (проект № 1.492.2016/ФПМ).

Библиографический список

1. *Serganova V.* Characters of irreducible representations of simple Lie superalgebras // Proc. Intern. Congress of Math. Berlin, 1998. Doc. Math. Extra. Vol. II. P. 583–593.
2. *Sergeev A. N., Veselov A. P.* Deformed quantum Calogero – Moser systems and Lie superalgeras // Commun. Math. Phys. 2004. Vol. 245, № 2. P. 249–248. DOI: 10.1007/s00220-003-1012-4.
3. *Sergeev A. N., Veselov A. P.* BC_∞ Calogero – Moser operator and super Jacobi polynomials // Advances in Mathematics. 2009. Vol. 222, iss. 5. P. 1687–1726. DOI: 10.1016/j.aim.2009.06.014.
4. *Sergeev A. N., Veselov A. P.* Generalised discriminant, deformed quantum Calogero – Moser – Sutherland problem and super-Jack polynomials // Advances in Math. 2005. Vol. 192, iss. 2. P. 341–375. DOI: 10.1016/j.aim.2004.04.009.
5. *Gruson C., Serganova V.* Cohomology of generalized supergrassmanians and character formulae for basic classical Lie superalgebras // Proc. London Math. Soc. 2010. Vol. 101, № 3. P. 852–892.

Образец для цитирования:

Мовсисян Г. С., Сергеев А. Н. Операторы КМС типа $B(1,1)$ и супералгебра Ли $\mathfrak{osp}(3,2)$ // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 1. С. 19–30. DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-1-19-30.

CMS Operators Type $B(1,1)$ and Lie Superalgebra $\mathfrak{osp}(3,2)$

G. S. Movsisyan[1], A. N. Sergeev[2]

[1]Gevorg S. Movsisyan, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., 410012, Saratov, Russia, movsisyangs@gmail.com,

[2]Alexander N. Sergeev, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., 410012, Saratov, Russia, sergeevAN@info.sgu.ru

The main purpose of this article is to study the realation between the representations theory of Lie superalgebras $\mathfrak{osp}(3,2)$ and the Calogero – Moser – Sutherland (CMS) $B(1,1)$ type differential operator. The differential operator depends polynomially on three parameters. The corresponding polynomial eigenfunctions also depend on three parameters; but in the general case, the coefficients of these eigenfunctions have a rational dependence on the parameters. The issue of specialization of eigenfunctions with given parameter values is an important and interesting question, especially in case of Lie superalgebras for which $k = p = -1$. In this case, we prove that the character of irreducible finite-dimensional representations of Lie superalgebras $\mathfrak{osp}(3,2)$ can be obtained from the eigenfunctions of the CMS $B(1,1)$ type differential operator in case of the specializations mentioned above, considering that k, p are also connected by some linear ratio.

Key words: superalgebra, representations, character, quantum integrable system.

Acknowledgements: This work by A. N. Sergeev was supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (project no. 1.492.2016/FPM).

References

1. Serganova V. Characters of irreducible representations of simple Lie superalgebras. *Proc. Intern. Congress of Math.*, Berlin, 1998, Doc. Math. Extra, vol. II, pp. 583–593.
2. Sergeev A. N., Veselov A. P. Deformed quantum Calogero – Moser systems and Lie superalgeras. *Commun. Math. Phys.*, 2004, vol. 245. no. 2, pp. 249–248. DOI: 10.1007/s00220-003-1012-4.
3. Sergeev A. N., Veselov A. P. BC_∞ Calogero – Moser operator and super Jacobi polynomials. *Advances in Mathematics*, 2009, vol. 222, iss. 5, pp. 1687–1726. DOI: 10.1016/j.aim.2009.06.014.
4. Sergeev A. N., Veselov A. P. Generalised discriminant, deformed quantum Calogero – Moser – Sutherland problem and super-Jack polynomials. *Advances in Math.*, 2005, vol. 192, iss. 2, pp. 341–375. DOI: 10.1016/j.aim.2004.04.009.
5. Gruson C., Serganova V. Cohomology of generalized supergrassmanians and character formulae for basic classical Lie superalgebras. *Proc. London Math. Soc.*, 2010, vol. 101, no. 3, pp. 852–892.

Cite this article as:

Movsisyan G. S., Sergeev A. N. CMS Operators Type $B(1,1)$ and Lie Superalgebra $\mathfrak{osp}(3,2)$. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 1, pp. 19–30 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-1-19-30.