УДК 517.968

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА УРЫСОНА НА ВСЕЙ ПРЯМОЙ

Х. А. Хачатрян[1], **Т. Г. Сардарян**[2]

[1]Хачатрян Хачатур Агавардович, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник отдела методов математической физики, Институт математики НАН Армении, Республика Армения, 0019, Ереван, просп. Маршала Баграмяна, 24/5, Khach82@rambler.ru, Khach82@mail.ru

[2]Сардарян Тигран Грачяевич, кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры высшей математики и теоретической механики, Национальный аграрный университет Армении, Республика Армения, 0009, Ереван, Теряна, 73, Sardaryan.tigran@gmail.com

В настоящей статье исследуется один класс нелинейных интегральных уравнений типа Урысона на всей оси. Рассматриваемые уравнения имеют применение в различных областях математической физики. Предполагается, что нелинейный интегральный оператор типа Гаммерштейна с разностным ядром служит локальной минорантой в смысле М. А. Красносельского для исходного оператора Урысона. Сочетание методов построения инвариантных конусных отрезков для соответствующего нелинейного оператора Урысона с методами теории монотонных операторов и консервативных интегральных уравнений типа свертки при определенных ограничениях на нелинейность позволяет доказать конструктивные теоремы существования однопараметрических семейств положительных решений. Описывается множество параметров и изучается асимптотическое поведение построенных решений в бесконечности. В конце приведены частные примеры указанных уравнений, для которых выполняются все условия сформулированных теорем.

Ключевые слова: интегральное уравнение Урысона, монотонность, последовательные приближения, однопараметрическое семейство положительных решений, условие Каратеодори, множество параметров.

DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-1-40-50

ВВЕДЕНИЕ

Нелинейные интегральные уравнения вида

$$\varphi(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} U(x,t,\varphi(t))dt, \quad x \in \mathbb{R} \equiv (-\infty, +\infty), \tag{0.1}$$

возникают в современном естествознании, в частности, в кинетической теории газов, в биологии, в теории переноса излучения в спектральных линиях, в p-адической математической физике [1–5]. В уравнении (0.1) $\varphi(x)$ — искомая измеримая функция.

Уравнение Урысона вида

$$f(x) = g(x) + \int\limits_{a}^{b} U(x,t,f(t))dt, \quad x \in (a,b), \quad -\infty < a < b < +\infty, \tag{0.2}$$

появилось в начале прошлого столетия [6]. В работе [6] при следующих условиях на функции U и g:

1) функции $U(x,t,y)$ и $g(x)$ определены для $(x,t,y) \in (a,b)\times(a,b)\times(0,+\infty)$;

2а) $U(x,t,0) = 0$;

2б) $U(x,t,y)$ обладает непрерывной производной $U'_y(x,t,y)$ относительно y, причем эта непрерывность является равномерной по отношении к x и t;

2в) $U'_y(x,t,y)$ положительна и убывает с возрастанием y, при этом если $y_1 < y_2$, то $U'_y(x,t,y_1) - U'_y(x,t,y_2)$ имеет (относительно x и t) минимум, отличный от нуля;

2г) при безграничном возрастании y функция $U'_y(x,t,y)$ равномерно стремится к функции $Q(x,t)$, либо тождественно равной нулю, либо с положительным минимумом.

3) $0 \leqslant g(x) \leqslant N$, где N — некоторое положительное число, исследованы вопросы построения непрерывных решений на отрезке $[a,b]$.

В дальнейшем начиная с 1950-х годов в работах М. А. Красносельского и его научной школы были начаты систематические исследования нелинейных уравнений вида (0.2) с условиями, обеспечивающими компактность интегрального оператора [7–9].

Статья Х. А. Хачатряна [10] посвящена изучению уравнения

$$\varphi(x) = \int\limits_0^\infty U(x,t,\varphi(t))dt, \quad x \in \mathbb{R}^+ \tag{0.3}$$

относительно искомой функции $\varphi(x)$.

В [10] доказано, что если существуют число $\eta > 0$ и неотрицательная функция K: $K \in L_1(\mathbb{R})$, $\nu(K) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xK(x)\,dx < 0$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(x)\,dx = 1$, такие что

1) $U(x,t,z) \geqslant K(x-t)z$, $(x,t,z) \in \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\times[0,\eta]$;

2) при всяком фиксированном $(x,t) \in \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$, функция $U(x,t,z)$ монотонно не убывает по z на $[0,\eta]$;

3) удовлетворяет условию Каратеодори по аргументу z на $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\times[0,\eta]$;

4) $\int\limits_0^\infty U(x,t,\eta)\,dt \leqslant \eta$, $x \in \mathbb{R}^+$,

то уравнение (0.3) обладает положительным и ограниченным решением $\varphi(x)$, причем $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = \eta$.

Если существует несколько различных констант η, для которых выполняются условия 1)–4), то тогда уравнение 0.3 обладает таким же количеством решений, предел каждого из которых в бесконечности равен соответствующей константе [10].

В настоящей работе при существенно других ограничениях на функцию U доказывается существование однопараметрического семейства положительных решений уравнения (0.1).

1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ФАКТЫ

1.1. О решениях неоднородных интегральных уравнений на всей прямой

Рассмотрим следующее неоднородное уравнение свертки:

$$\psi(x) = g(x) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(x-t)\psi(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1.4}$$

где

$$0 \leqslant K \in L_1(\mathbb{R}) \cap M(\mathbb{R}), \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(t)\,dt = 1, \tag{1.5}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 K(x)\,dx < +\infty, \tag{1.6}$$

$$\nu(K) \equiv \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xK(x)\,dx \neq 0. \tag{1.7}$$

Свободный член $g(x)$ обладает следующими свойствами:

$$g(x) \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1.8}$$

причем

$$g \in L_1^0(\mathbb{R}^-) \cap M(\mathbb{R}) \quad \text{при} \quad \nu > 0, \tag{1.9}$$

$$g \in L_1^0(\mathbb{R}^+) \cap M(\mathbb{R}) \quad \text{при} \quad \nu < 0, \tag{1.10}$$

где $L_1^0(\mathbb{R}^\pm)$ — пространства суммируемых функций на $\mathbb{R}^\pm$, имеющих нулевой предел в $\pm\infty$ соответственно, а $M(\mathbb{R})$ — пространство измеримых и существенно ограниченных на $\mathbb{R}$ функций.

Из результатов работы [11] следует, что при выполнении условий (1.5)–(1.7) уравнение (1.4) имеет не отрицательное решение $\psi \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$ с асимптотическими свойствами

$$\int\limits_0^x \psi(t)\,dt = o(x) \quad \text{при} \quad x \to -\infty \quad (\nu > 0), \tag{1.11}$$

$$\int\limits_0^x \psi(t)\,dt = o(x) \quad \text{при} \quad x \to +\infty \quad (\nu < 0). \tag{1.12}$$

1.2. Об одном вспомогательном интегральном уравнении типа Гаммерштейна на всей оси

Рассмотрим следующее нелинейное интегральное уравнение типа Гаммерштейна:

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(x-t)(F(t) + \omega(t, F(t)))\,dt, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1.13}$$

относительно искомой измеримой функции $F(x)$, определенной на $\mathbb{R}$, где ядерная функция $K(x)$ удовлетворяет условиям (1.5)–(1.7), а функция $\omega(t,z)$, описывающая нелинейность уравнения (1.13), обладает следующими свойствами:

а) существует число $A > 0$ такое, что $\omega(t,z) \geqslant 0$ при $t \in \mathbb{R}$, $z \geqslant A$;

б) функция $\omega(t,z)$ удовлетворяет условию Каратеодори по аргументу z на множестве $(R \times [A,+\infty))$: $\omega \in Car_z(R \times [A,+\infty))$, т.е. при всяком $z \in [A,+\infty)$ $\omega(t,z)$ измерима по t на $\mathbb{R}$ и почти при всех $t \in \mathbb{R}$ функция $\omega(t,z)$ непрерывна по z на $[A,+\infty)$;

в) существует

$$\sup_{z\geqslant A}\omega(t,z)\equiv\beta(t),\quad \text{причем}\quad \beta\in L_1(\mathbb{R})\cap M(\mathbb{R}); \tag{1.14}$$

г) при каждом фиксированном $t\in\mathbb{R}$ функция $\omega(t,z)$ неубывает по z на $[A,+\infty)$.

Для уравнения (1.13) введем в рассмотрение следующее семейство последовательных приближений:

$$\begin{gathered}F_{n+1}^{\gamma}(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K(x-t)(F_n^{\gamma}(t)+\omega(t,F_n^{\gamma}(t)))dt,\quad x\in\mathbb{R},\\ F_0^{\gamma}(x)=\gamma,\quad \gamma\in[A,+\infty) \text{ — произвольное число},\quad n=0,1,2,\dots\,.\end{gathered} \tag{1.15}$$

Индукцией по n можно убедиться, что

д) $F_n^{\gamma}(x)$ неубывает по n при каждом фиксированном $\gamma\in[A,+\infty)$;

е) если γ_1, $\gamma_2\in[A,+\infty)$ — произвольные числа и $\gamma_1>\gamma_2$, то

$$F_n^{\gamma_1}(x)-F_n^{\gamma_2}(x)\geqslant\gamma_1-\gamma_2,\quad n=0,1,2,\dots,\quad x\in\mathbb{R}. \tag{1.16}$$

Докажем, например, неравенство (1.16). В случае $n=0$ неравенство (1.16) превращается в равенство (см. (1.15)). Пусть (1.16) имеет место при некотором $n\in\mathbb{N}$. Тогда, используя монотонность функции $\omega(t,z)$ по z (см. условие г), неотрицательность ядра K и индукционное предположение из (1.15) будем иметь

$$F_{n+1}^{\gamma_1}(x)-F_{n+1}^{\gamma_2}(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K(x-t)(F_n^{\gamma_1}(t)-F_n^{\gamma_2}(t)+\omega(t,F_n^{\gamma_1}(t))-\omega(t,F_n^{\gamma_2}(t)))\,dt\geqslant$$

$$\geqslant(\gamma_1-\gamma_2)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K(x-t)\,dt+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K(x-t)(\omega(t,F_n^{\gamma_1}(t))-\omega(t,F_n^{\gamma_2}(t)))\,dt\geqslant$$

$$\geqslant(\gamma_1-\gamma_2)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K(t)dt=\gamma_1-\gamma_2,$$

так как $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K(t)\,dt=1$.

Теперь рассмотрим линейное интегральное уравнение (1.4) со специальным свободным членом вида

$$g(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K(x-t)\beta(t)\,dt,\quad x\in\mathbb{R}. \tag{1.17}$$

Так как $\omega(t,z)\geqslant 0$, $t\in\mathbb{R}$, $z\in[A,+\infty)$, и ядро K удовлетворяет условию (1.5), то из (1.17) следует (1.8).

Поскольку K, $\beta\in L_1(\mathbb{R})\cap M(\mathbb{R})$, то из результатов работы [11] следует, что $g\in L_1(\mathbb{R})\cap M(\mathbb{R})$, причем $\lim_{x\to\pm\infty}g(x)=0$. Следовательно, введенная нами функция $g(x)$ удовлетворяет всем требованиям (1.8)–(1.10). Таким образом, используя вышесказанное, можно утверждать, что уравнение (1.4) со свободным членом (1.17) обладает неотрицательным решением $\psi(x)$, причем имеют место асимптотические формулы (1.11) и (1.12).

Теперь докажем, что для любого $\gamma \in [A, +\infty)$

$$F_n^\gamma(x) \leqslant \gamma + \psi(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots . \tag{1.18}$$

При $n = 0$ неравенство выполняется очевидным образом, ибо $\psi \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}$. Пусть (1.18) выполняется при некотором $n \in \mathbb{N}$. Тогда с учетом условий в), г) из (1.15) получим:

$$F_{n+1}^\gamma(x) \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(x-t)(\gamma + \psi(t) + \omega(t, \gamma + \psi(t)))\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(x-t)(\gamma + \psi(t) + \beta(t))\, dt = \gamma + g(x) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(x-t)\psi(t)\, dt = \gamma + \psi(x).$$

Итак, из д), е) и (1.18) следует, что последовательность функций $\{F_n^\gamma(x)\}_{n=0}^\infty$ при каждом фиксированном $\gamma \in [A, +\infty)$ имеет поточечный предел при $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to\infty} F_n^\gamma(x) = F^\gamma(x).$$

Используя предельную теорему Б. Леви [12], можно непосредственным образом проверить, что $F^\gamma(x)$ удовлетворяет уравнению (1.13).

Из е) следует, что

$$F^{\gamma_1}(x) - F^{\gamma_2}(x) \geqslant \gamma_1 - \gamma_2, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1.19}$$

а из д) и (1.18) получим:

$$\gamma \leqslant F^\gamma(x) \leqslant \gamma + \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \gamma \in [A, +\infty). \tag{1.20}$$

Пусть $\nu > 0$. Тогда, используя формулу (1.11), из (1.20) можно утверждать, что

$$\int\limits_0^x F^\gamma(t)dt = \gamma x + o(x) \quad \text{при} \quad x \to -\infty. \tag{1.21}$$

Аналогичным образом, если $\nu < 0$, то

$$\int\limits_0^x F^\gamma(t)dt = \gamma x + o(x) \quad \text{при} \quad x \to +\infty. \tag{1.22}$$

Итак, нами доказана следующая

Теорема 1. *При условиях* (1.5)–(1.7), *а)–г) уравнение* (1.13) *обладает однопараметрическим семейством положительных решений* $\{F^\gamma(x)\}_{\gamma\in[A,+\infty)}$ *со свойствами* (1.19)–(1.20), *причем*

1) если $\nu > 0$, то справедлива асимптотическая формула (1.21);

2) если $\nu < 0$, то имеет место (1.22).

2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Используя теорему 1 займемся построением однопараметрического семейства положительных решений для уравнения (0.1).

Теорема 2. *Пусть существует число $A > 0$ такое, что*

1) $U(x,t,y) \geqslant K(x-t)(y+\omega(t,y))$, $(x,t,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times[A,+\infty)$, где удовлетворяет условиям (1.5)–(1.7)*;*

2) $U(x,t,y)$ не убывает по y на $[A,+\infty)$ при каждом фиксированном $(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$;

3) $U \in Car_y(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times[A,+\infty))$ и для каждой измеримой и ограниченной функции $\varphi(x) : \varphi(x) \geqslant A$, $x \in \mathbb{R}$, функции $U(x,t,\varphi(t))$ и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} U(x,t,\varphi(t))dt$ измеримы соответственно по t и по x на $\mathbb{R}$;

4) существует $\sup\limits_{y\geqslant A}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[U(x,t,y)-K(x-t)y]\,dt \equiv g_0(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $g_0 \in L_1^0(\mathbb{R})\cap L_\infty(\mathbb{R})$, и $\nu(g_0) < +\infty$.

Тогда уравнение (0.1) *имеет однопараметрическое семейство положительных и ограниченных решений $\{\psi^\gamma(x)\}_{\gamma\in\Pi}$, где $\Pi \equiv [A,+\infty)$. Более того, имеют место следующие асимптотические формулы:*

A) если $\nu(K) < 0$, то $\displaystyle\int\limits_0^x \varphi^\gamma(x)\,dx = \gamma x + o(x)$ при $x \to +\infty$;

B) если $\nu(K) > 0$, то $\displaystyle\int\limits_0^x \varphi^\gamma(x)\,dx = \gamma x + o(x)$ при $x \to -\infty$.

Доказательство. Сначала рассмотрим следующее неоднородное уравнение Винера – Хопфа:

$$F^*(x) = g_0(x) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(x-t)F^*(t)\,dt, \tag{2.23}$$

где $g_0(x)$ определяется из условия 4) теоремы 2. Используя результаты работ [13–15] получаем, что уравнение (2.23) имеет положительное локально суммируемое и ограниченное решение.

Введем следующие итерации:

$$\varphi_{n+1}^\gamma(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} U(x,t,\varphi_n^\gamma(t))\,dt, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2.24}$$

$$\varphi_0^\gamma(x) = F^\gamma(x), \quad n = 0,1,2,..., \quad \gamma \in \Pi, \tag{2.25}$$

где $F^\gamma(x)$ — решение уравнения (1.13).

Индукцией по n убедимся, что

а) функции $\varphi_n^\gamma(x)$ измеримы по x на $\mathbb{R}$, $n = 0,1,2,...$, $\gamma \in \Pi$;

б) при каждом фиксированном $\gamma \in \Pi$ $\varphi_n^\gamma(x)$ неубывает по n на $\mathbb{R}$;

в) имеет место следующее неравенство:

$$\varphi_n^\gamma(x) \leqslant F^\gamma(x) + F^*(x), \quad n = 0,1,2,..., \quad x \in \mathbb{R}, \quad \gamma \in \Pi. \tag{2.26}$$

Утверждение а) следует из условия 3) теоремы. Докажем утверждение б). Для этого сперва заметим, что при каждом $\gamma \in \Pi$ имеет место неравенство

$$\varphi_1^\gamma(x) \geqslant \varphi_0^\gamma(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Из условия 1) теоремы следует, что

$$\varphi_1^\gamma(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(x,t,F^\gamma(t))\,dt \geqslant \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-t)(F^\gamma(t)+\omega(t,F^\gamma(t)))\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-t)F^\gamma(t)\,dt + \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-t)\omega(t,F^\gamma(t))\,dt = F^\gamma(x) = \varphi_0^\gamma(x).$$

Предполагая, что $\varphi_n^\gamma(x) \geqslant \varphi_{n-1}^\gamma(x)$ при некотором $n \in \mathbb{N}$ в силу монотонности функции $U(x,t,y)$ по y, получим $\varphi_{n+1}^\gamma(x) \geqslant \varphi_n^\gamma(x)$.

Теперь докажем неравенство в). Заметим, что при $n=0$ неравенство в) очевидно, так как $F^*(x) \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}$. Пусть в) выполняется при некотором $n \in \mathbb{N}$. Тогда, учитывая условия 2), 4) теоремы, будем иметь:

$$\varphi_{n+1}^\gamma(x) \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} U(x,t,F^\gamma(t)+F^*(t))\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} U(x,t,F^\gamma(t)+F^*(t)) - K(x-t)(F^\gamma(t)+F^*(t))\,dt + \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-t)F^\gamma(t)\,dt +$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-t)F^*(t)dt \leqslant g_0(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-t)F^\gamma(t)dt + \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-t)F^*(t)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant g_0(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-t)(F^\gamma(t)+\omega(t,F^\gamma(t)))dt + \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-t)F^*(t)\,dt =$$

$$= F^\gamma(x) + F^*(x).$$

Таким образом, из утверждений а), б) и в) следует, что последовательность функций $\{\varphi_n^\gamma(x)\}_{n=0}^\infty$ имеет поточечный предел при

$$n \to \infty : \quad \lim_{n\to\infty} \varphi_n^\gamma(x) = \varphi^\gamma(x),$$

причем предельная функция $\varphi^\gamma(x)$ удовлетворяет уравнению (0.1). Ограниченность каждого решения $\{\varphi^\gamma(x)\}_{\gamma\in\Pi}$ следует из того, что

$$F^\gamma \in L_\infty(\mathbb{R}), \quad \gamma \in \Pi, \quad F^* \in L_1(\mathbb{R}) \cap \mathbb{L}_\infty(\mathbb{R}).$$

Теперь докажем утверждение A) теоремы. Имеем

$$F^\gamma(t) \leqslant \varphi^\gamma(t) \leqslant F^\gamma(t) + F^*(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.27}$$

Интегрируя обе части неравенства (2.27) по t от 0 до x и учитывая (1.21), получим

$$\gamma x + o(x) \leqslant \int_0^x \varphi^\gamma(t)dt \leqslant \gamma x + o(x) + \int_0^x F^*(t)\,dt. \tag{2.28}$$

Так как $\int_0^x F^*(t)\,dt = o(x)$ (при $x \to +\infty$ в случае $\nu(K) < 0$ и при $x \to -\infty$ в случае $\nu(K) > 0$), то получим

$$\int_0^x \varphi^\gamma(t)\,dt = \gamma x + o(x), \quad \text{при} \quad x \to \pm\infty. \qquad \square$$

3. ПРИМЕРЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ВИДА (0.1)

Приведем примеры нелинейных уравнений вида (0.1), для которых выполняются все условия теоремы 2.

Пусть $G(t,y)$ — определенная на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ вещественная функция, причем имеет место следующие условия:

1) $G(t,y) \geqslant y$, $(t,y) \in \mathbb{R} \times [A,+\infty)$;
2) $G(t,y)$ неубывает по y на $[A,+\infty)$;
3) $G \in Car_y(\mathbb{R} \times [A,+\infty))$;
4) $\sup\limits_{y \geqslant A}(G(t,y) - y) \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R})$, $\quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t\Big(\sup\limits_{y \geqslant A}(G(t,y) - y)\Big)dt < +\infty.$

В качестве $G(t,y)$ можно выбрать следующие функции:

- $G(t,y) = y + e^{-y}e^{-t^2}$ при $A = 0$;
- $G(t,y) = y + \frac{y}{y+1}e^{-|t|}$ при $A = 0$;
- $G(t,y) = y + e^{-|t|\sin^2 y}$ при $A = 0$;
- $G(t,y) = y + \ln\left(e - \dfrac{1}{y^2}\right)e^{-t^2}$ при $A = \sqrt{\frac{1}{e-1}}$;
- $G(t,y) = y + (\sqrt{y^2+1} - y)e^{-t^2}$ при $A = 0$;
- $G(t,y) = y + \ln\left(1 - \dfrac{y}{y^2+1}\right)e^{-|t|}$ при $A = 0$.

В качестве частного примера уравнения (0.1) можно выбрать следующий класс нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна:

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-t)(G(t,\varphi(t)) + \omega(t,\varphi(t)))\,dt, \quad x \geqslant 0,$$

где функции G и ω удовлетворяют соответственно условиям 1)–4) этого параграфа и условиям а)–г) из п. 1.2.

Авторы выражают благодарность рецензенту за полезные замечания.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке ГКН МОН РА (проект № SCS 16YR-1A002).

Библиографический список

1. *Хачатрян А. Х., Хачатрян Х. А.* Качественное различие решений для стационарных модельных уравнений Больцмана в линейном и нелинейном случаях // ТМФ. 2014. Т. 180, № 2. С. 272–288. DOI: 10.4213/tmf8623.
2. *Khachatryan Kh. A.* On solvability of some classes of Urysohn nonlinear integral equations with noncompact operators // Уфимск. матем. журн. 2010. Т. 2, № 2. С. 103–117.
3. *Хачатрян А. Х., Хачатрян Х. А.* Об одном нелинейном интегральном уравнении типа уравнения Гаммерштейна с некомпактным оператором // Матем. сб. 2010. Т. 201, № 4. С. 125–136. DOI: 10.4213/sm7310.
4. *Diekman O.* Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection // J. Math. Biol. 1978. Vol. 6, № 2. P. 109–130. DOI: 10.1007/BF02450783.
5. *Vladimirov V. S., Volovich Y. I.* Nonlinear Dynamics equation in p-adic string theory // Theoret. and Math. Phys. 2004. Vol. 138, № 3. P. 297–309. DOI: 10.1023/B:TAMP.0000018447.02723.29.
6. *Урысон П. С.* Об одном типе нелинейных интегральных уравнений // Матем. сб. 1923. Т. 31, № 2. С. 236–255.
7. *Забрейко П. П., Пустыльник Е. И.* О непрерывности и полной непрерывности нелинейных интегральных операторов в пространствах L_p // УМН. 1964. Т. 19, вып. 2(116). С. 204–505.
8. *Бобылев Н. А., Исмаилов И. Г.* Итерационные процедуры в задачах управления и оптимизации // Приборы и системы управления. 1997. № 1. С. 15–18.
9. *Забрейко П. П., Красносельский М. А.* О разрешимости нелинейных операторных уравнений // Функц. анализ и его прилож. 1971. Т. 5, вып. 3. С. 42–44.
10. *Хачатрян Х. А.* Достаточные условия разрешимости интегрального уравнения Урысона на полуоси // Докл. АН. 2009. Т. 425, № 4. С. 462–465.
11. *Арабаджян Л. Г., Хачатрян А. С.* Об одном классе интегральных уравнений типа свертки // Матем. сб. 2007. Т. 198, № 7. С. 45–62. DOI: 10.4213/sm1483.
12. *Колмогоров А. Н., Фомин В. С.* Элементы теории функций и функционального анализа. М. : Наука, 1981. 544 с.
13. *Yengibarian N. B.* Renewal equation on the whole line // Stochastic Process. Apll. 2000. Vol. 85, iss. 2. P. 237–247. DOI: 10.1016/S0304-4149(99)00076-9.
14. *Енгибарян Н. Б.* Консервативные системы интегральных уравнений свертки на полупрямой и всей прямой // Матем. сб. 2002. Т. 193, № 6. С. 61–82. DOI: 10.4213/sm660.
15. *Рудин У.* Функциональный анализ. М. : Мир, 1975. 449 с.

Образец для цитирования:

Хачатрян Х. А., Сардарян Т. Г. О разрешимости одного класса нелинейных интегральных уравнений типа Урысона на всей прямой // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 1. С. 40–50. DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-1-40-50.

On Solvability of One Class of Urysohn Type Nonlinear Integral Equation on the Whole Line

Kh. A. Khachatryan[1], T. H. Sardaryan[2]

[1]Khachatur A. Khachatryan, Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Armenia, 24/5, Marshal Baghramyan Avenue, 0019, Yerevan, Republic of Armenia, Khach82@rambler.ru, Khach82@mail.ru
[2]Tigran H. Sardaryan, Armenian National Agrarian University, 74, Teryan str., 0009, Yerevan, Republic of Armenia, Sardaryan.tigran@gmail.com

In present work one class of Urysohn type nonlinear integral equation on whole line is studied. Equations observed have applications in various fields of mathematical physics. It is assumed that Hammerstein type nonlinear integral operator with a difference kernel serves local minorant in terms of M. A. Krasnoselskii for the Urysohn initial operator. Combination of construction methods of invariant cone segments for initial Urysohn nonlinear operator with the methods of monotone operator theory and convolution type conservative integral equations in the case of some restrictions on nonlinearity allows us to prove constructive existence theorems about one parametric positive solutions. A set of parameters is described and the behavior of constructed solutions at infinity is examined. At the end of the work specific examples are given for which conditions of formulated theorems are satisfied.

Key words: Urysohn integral equation, monotonicity, successive approximations, one-parameter family of positive solutions, Caratheodory's condition, set of parameters.

Acknowledgements: This work was supprted by State Committee Science MES RA (project no. SCS 16YR-1A002).

References

1. Khachatryan A. Kh., Khachatryan Kh. A. Qualitative difference between solutions of stationary model Boltzmann equations in the linear and nonlinear cases. *Theoret. and Math. Phys.*, 2014, vol. 180, no. 2, pp. 990–1004. DOI: 10.1007/s11232-014-0194-6.
2. Khachatryan Kh. A. On solvability of some classes of Urysohn nonlinear integral equations with noncompact operators. *Ufimsk. Mat. Zh.*, 2010, vol. 2, no. 2, pp. 103–117.
3. Khachatryan A. Kh., Khachatryan Kh. A. A nonlinear integral equation of Hammerstein type with a noncompact operator. *Sb. Math.*, 2010, vol. 201, no. 4, pp. 595–606. DOI: 10.1070/SM2010v201n04ABEH004083.
4. Diekman O. Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection. *J. Math. Biol.*, 1978, vol.6, no. 2, pp. 109–130. DOI: 10.1007/BF02450783.
5. Vladimirov V. S., Volovich Ya. I. Nonlinear Dynamics equation in p-adic string theory. *Theoret. and Math. Phys.*, 2004, vol. 138, no. 3, pp. 297–309. DOI: 10.1023/B:TAMP.00000 18447.02723.29.
6. Urysohn P. Ob odnom tipe nelineynix integralnix uravnenij [One type of nonlinear integral equations]. *Mat. Sb.* [Sbornik: Mathematics], 1923, vol. 31, no. 2, pp. 236—255 (in Russian).
7. Zabreiko P. P., Pustyl'nik E. I. On continuity and complete continuity of nonlinear integral operators in L_p spaces. *Uspekhi Mat. Nauk*, 1964, vol. 19, iss. 2(116), pp. 204—205 (in Russian).
8. Bobylev N. A., Ismailov I. G. Iterationnie proceduri v zadachax upravleniyai optimizacii [Itertive control problems in the procedures and optimization]. *Pribory i sistemi upravleniya* [Devices and control systems], 1997, no. 1, pp. 15–18 (in Russian).

9. Krasnoselskii M. A., Zabreiko P. P. Solvability of nonlinear operator equations. *Funct. Anal. Appl.*, 1971, vol. 5, iss. 3, pp. 206–208. DOI: 10.1007/BF0107 8126.
10. Khachatryan Kh. A. Sufficient conditions for the solvability of the Uryshon integral equation on a half-axis. *Dokl. Math.*, 2009, vol. 79, iss. 2, pp. 246–249. DOI: 10.1134/S1064562409020264.
11. Arabadzhyan L. G., Khachatryan A. S. A class of integral equations of convolution type. *Sb. Math.*, 2007, vol. 198, no. 7, pp. 949–966. DOI: 10.1070/ SM2007v198n07ABEH003868.
12. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*. Moscow, Nauka, 1981. 544 p. (in Russian).
13. Yengibarian N. B. Renewal equation on the whole line. *Stochastic Process. Apll.*, 2000, vol. 85, iss. 2, pp. 237–247. DOI: 10.1016/S0304-4149(99)00076-9.
14. Engibaryan N. B. Conservative systems of integral convolution equations on the half-line and the entire line. *Sb. Math.*, 2002, vol. 193, no. 6, pp. 847–867. DOI: 10.1070/SM2002v193n06ABEH000660.
15. Rudin W. *Functional analysis*. McGraw-Hill, 1973. 397 p. (Russ. ed.: Rudin W. *Funktsional'nyi analiz*. Moscow, Mir, 1975. 449 p.)

Cite this article as:
Khachatryan Kh. A., Sardaryan T. H. On Solvability of One Class of Urysohn Type Nonlinear Integral Equation on the Whole Line. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 1, pp. 40–50 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-1-40-50.